

数学物理方法

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法 和一般本征值问题

第 1 节至第 4 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 2 月 9 日



第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题



对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解




本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程





虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解法则

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题


 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解

 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程


 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解法则

 一阶线性常微分方程 $\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$ 的通解可以用系数和非齐次项表达为


$$u(x) = \left\{ \int_{x_0}^x Q(t) \exp \left[\int_{x_0}^t P(s) ds \right] dt + C \right\} \exp \left[- \int_{x_0}^x P(t) dt \right]$$


 虽然上式中的积分不一定能积出初等函数，但至少有一个通用形式

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题


 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解

 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程


 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解法则

 一阶线性常微分方程 $\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$ 的通解可以用系数和非齐次项表达为

$$u(x) = \left\{ \int_{x_0}^x Q(t) \exp \left[\int_{x_0}^t P(s) ds \right] dt + C \right\} \exp \left[- \int_{x_0}^x P(t) dt \right]$$






 虽然上式中的积分不一定能积出初等函数，但至少有一个通用形式

 对于二阶线性常微分方程，并不存在类似的结果

 常系数方程和少数特殊类型的方程（比如 Euler 方程）可以用初等函数求解

 另一些方程可以用级数解法或积分解法求解

二阶线性常微分方程的解法

-  **级数解法**可以算是一种比较**系统**的方法
-  对于那些能够用**初等函数**求解的简单情况，**级数解法**通常也**有效**
-  **积分解法**是**积分变换**的推广，本课程不作介绍
-  应该指出，能够用**级数解法**或**积分解法**求解的方程是**非常有限**的
-  更多的时候人们只能采用**数值解法**

二阶线性常微分方程的解法




初等函数

级数解法








积分解法

数值解法

§1 常点邻域的级数解法

-  二阶线性齐次常微分方程的一般形式是 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$
-  对于物理和工程问题中导出的微分方程， x 通常是实数
-  $p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知函数， $y(x)$ 是未知函数，它们的函数值也都是实数

§1 常点邻域的级数解法

-  二阶线性齐次常微分方程的一般形式是 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$
-  对于物理和工程问题中导出的微分方程, x 通常是实数
-  $p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知函数, $y(x)$ 是未知函数, 它们的函数值也都是实数
-  为了应用复变函数理论来研究微分方程的解, 可以把 x 看作复数, 并仍记作 x
-  相应地, $p(x)$ 、 $q(x)$ 和 $y(x)$ 就成为复变函数, 它们在实轴上取相应的实函数值
-  可以对方程附加初始条件 $y(x_0) = c_0$ 和 $y'(x_0) = c_1$
-  如果不附加初始条件, 则通解中含有两个任意常数

§1 常点邻域的级数解法

二阶线性齐次常微分方程的一般形式是 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

对于物理和工程问题中导出的微分方程， x 通常是实数

$p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知函数， $y(x)$ 是未知函数，它们的函数值也都是实数

为了应用复变函数理论来研究微分方程的解，可以把 x 看作复数，并仍记作 x

相应地， $p(x)$ 、 $q(x)$ 和 $y(x)$ 就成为复变函数，它们在实轴上取相应的实函数值

可以对方程附加初始条件 $y(x_0) = c_0$ 和 $y'(x_0) = c_1$

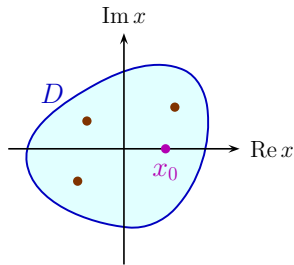
如果不附加初始条件，则通解中含有两个任意常数


方程的解的行为取决于系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的行为

假设在复平面的某个区域 D 内， $p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的

级数解法就是在 D 内某点 x_0 的邻域或去心邻域内

将 $y(x)$ 展开为幂级数，即 Taylor 级数、Laurent 级数或更一般的幂级数 (见后)



 $y(x)$ 级数展开式的形式取决于系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质

 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 解析, 则 x_0 称为方程的常点

 如果 x_0 是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的极点或本性奇点, 则 x_0 称为方程的奇点

常点邻域级数解法的理论基础

🌽 $y(x)$ 级数展开式的形式取决于系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质

🍏 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 解析，则 x_0 称为方程的常点

🍑 如果 x_0 是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的极点或本性奇点，则 x_0 称为方程的奇点

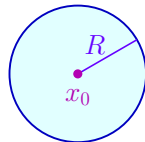
🍉 本节研究常点的级数解法，理论基础是以下定理

🟢 **定理** 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在圆 $|x - x_0| < R$ 内解析，则在该圆内满足方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 及初始条件 $y(x_0) = c_0$ 和 $y'(x_0) = c_1$ 的解是存在、唯一而且解析的

🥒 这个定理的大意是，如果系数是解析的，则方程的解也是解析的

🥥 这一结论非常直观，但证明起来却并不容易

🍇 这里不去深究定理的证明，而是把注意力集中在计算方法上




Taylor 级数解法

 即然 $p(x)$ 、 $q(x)$ 和 $y(x)$ 都在圆内解析，那么就可以展开为 Taylor 级数

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

 其中展开系数 p_k 、 q_k 是已知的，而 a_k 是未知的

 将这些展开式代入方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ ，得


$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} + \sum_{l=0}^{\infty} p_l(x-x_0)^l \sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} q_l(x-x_0)^l \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\{a_k\})(x-x_0)^i \end{aligned}$$


 最后一步合并同幂项，整理成一个幂级数，其所有系数 $f_i(\{a_k\})$ 必须为零


求解流程

 于是得到 a_k 间的一系列代数方程

$$f_i(\{a_k\}) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

 求解这些代数方程，就可以用 a_0 和 a_1 表出 a_2, a_3, \dots


 从而得到级数解 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$

 注意到

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots, \quad y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots$$


 初始条件意味着

$$a_0 = y(x_0) = c_0, \quad a_1 = y'(x_0) = c_1$$

 如果不给定初始条件，则级数解中含有两个任意常数 a_0 和 a_1 ，成为方程的通解


§2 Legendre 方程及其本征值问题

§2.1 Legendre 方程的级数解


 回顾上一章，在球坐标系中对 Helmholtz 方程分离变量时

 轴对称情况下得到 Legendre 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

 将 $P(x)$ 替换为 $y(x)$ ，把 Legendre 方程改写为

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

 无法找到这个方程的简单解法，因此只能考虑级数解


§2 Legendre 方程及其本征值问题

§2.1 Legendre 方程的级数解


 回顾上一章，在球坐标系中对 Helmholtz 方程分离变量时


 轴对称情况下得到 Legendre 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

 将 $P(x)$ 替换为 $y(x)$ ，把 Legendre 方程改写为

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

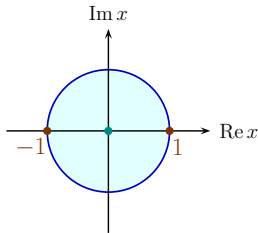
 无法找到这个方程的简单解法，因此只能考虑级数解

 与标准形式 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 比较可见

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

 显然， $x=0$ 是常点，而且 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在复平面上只有两个奇点 $x = \pm 1$

 因此， $p(x)$ 和 $q(x)$ 在圆 $|x| < 1$ 内解析



解的级数形式

 在圆 $|x| < 1$ 内, $p(x)$ 和 $q(x)$ 是解析的, 因而方程的解也是解析的, 故可设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

 求导, 有

$$xy'(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$$

 又有


$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

 第一步结果中 $k=0$ 和 $k=1$ 的项均为零, 第二步丢弃这两项

解的级数形式

 在圆 $|x| < 1$ 内, $p(x)$ 和 $q(x)$ 是解析的, 因而方程的解也是解析的, 故可设


$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

 求导, 有

$$xy'(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$$

 又有

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) a_{l+2} x^l = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \end{aligned}$$


 第一步结果中 $k=0$ 和 $k=1$ 的项均为零, 第二步丢弃这两项

 第三步作变量替换 $l = k - 2$ (即 $k = l + 2$), 第四步作变量替换 $k = l$

 第三、四步合起来相当于将 k 的求和下限减 2, 而各项中的 k 变成 $k+2$

 熟悉这个规律后可以直接从第二步结果作替换 $k \rightarrow k+2$ 得到第四步结果

递推关系

 此外, $x^2 y''(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$

 这样一来, y'' 、 $x^2 y''$ 、 xy' 和 y 的级数中通项表达式都包含因子 x^k

 将它们代入 Legendre 方程, 得

$$\begin{aligned}
 0 &= y'' - x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k] x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k] x^k
 \end{aligned}$$

递推关系

此外, $x^2 y''(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$

这样一来, y'' 、 $x^2 y''$ 、 xy' 和 y 的级数中通项表达式都包含因子 x^k

将它们代入 Legendre 方程, 得

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k] x^k \end{aligned}$$

比较两边, 有 $(k+2)(k+1)a_{k+2} - [k(k+1) - \lambda]a_k = 0$, 即得递推关系

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$$

由此递推关系, 所有 a_{2k} ($k \in \mathbb{N}^+$) 均可由 a_0 确定 [$a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{2k} \rightarrow \cdots$]

所有 a_{2k+1} ($k \in \mathbb{N}^+$) 均可由 a_1 确定 [$a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{2k+1} \rightarrow \cdots$]


两个线性独立的级数解

 于是, $y(x)$ 可表达为**通解**形式 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

 其中**两个线性独立的级数解**为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

 而 $c_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_0}$ 和 $c_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{a_1}$ 都只是 k 和 λ 的函数, 与 a_0 、 a_1 无关

两个线性独立的级数解

🦎 于是, $y(x)$ 可表达为**通解**形式 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

🦎 其中**两个线性独立的级数解**为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

🦎 而 $c_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_0}$ 和 $c_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{a_1}$ 都只是 k 和 λ 的函数, 与 a_0 、 a_1 无关

🦎 由于 $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} \right| = 1$,

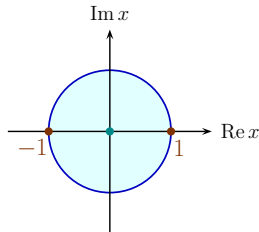
两个级数解的**收敛半径**都是 $R = 1/l = 1$, 如所期望

🦎 但可以证明 (参看第三章 §1.5 Gauss 判别法选读内容), $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x = \pm 1$ 两点均发散


🦎 这样的发散结果对于下面**确定本征值问题的解**非常重要


第三章 §3.2 收敛半径的 d'Alembert 公式


🚌 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l \in (0, \infty)$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ 的**收敛半径**为 $R = \frac{1}{l}$




§2.2 Legendre 方程的本征值问题


 根据上一章讨论, 物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$


 **一般情况下**, 上面得到的两个级数解均**不满足**这一条件


 所以, 唯一的出路是让它们**中断为多项式**


 由**递推关系** $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$ 可见, 只要 λ **取值恰当**, 中断为多项式是可能的, 这样同时也就**确定了本征值**

§2.2 Legendre 方程的本征值问题


 根据上一章讨论, 物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$


 **一般情况下**, 上面得到的两个级数解均**不满足**这一条件


 所以, 唯一的出路是让它们**中断为多项式**

 由**递推关系** $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$ 可见, 只要 λ **取值恰当**, 中断为多项式是


可能的, 这样同时也就**确定了本征值**


 若 $\lambda = 2n(2n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 $a_{2n+2} = \frac{2n(2n+1) - \lambda}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} = 0$


 故 $a_{2n+2} = a_{2n+4} = a_{2n+6} = \dots = 0$, 从而 $y_0(x)$ 中断为 $2n$ **次多项式**


 同时另一个解 $y_1(x)$ 仍为无穷级数, 不满足**边界条件**


§2.2 Legendre 方程的本征值问题


 根据上一章讨论, 物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$


 **一般情况下**, 上面得到的两个级数解均**不满足**这一条件


 所以, 唯一的出路是让它们**中断为多项式**


 由**递推关系** $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$ 可见, 只要 λ **取值恰当**, 中断为多项式是可能的, 这样同时也就**确定了本征值**


 若 $\lambda = 2n(2n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 $a_{2n+2} = \frac{2n(2n+1) - \lambda}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} = 0$

 故 $a_{2n+2} = a_{2n+4} = a_{2n+6} = \cdots = 0$, 从而 $y_0(x)$ 中断为 $2n$ **次多项式**


 同时另一个解 $y_1(x)$ 仍为无穷级数, 不满足**边界条件**

 若 $\lambda = (2n+1)(2n+2)$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 $a_{2n+3} = \frac{(2n+1)(2n+2) - \lambda}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n+1} = 0$

 故 $a_{2n+3} = a_{2n+5} = a_{2n+7} = \cdots = 0$, 从而 $y_1(x)$ 中断为 $2n+1$ **次多项式**

 同时另一个解 $y_0(x)$ 仍为无穷级数, 不满足**边界条件**

Legendre 多项式

 综合起来, 如果 $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$), 两个线性独立解中就有一个解中断为 l 次多项式, 它当然满足自然边界条件 $|y(\pm 1)| < \infty$

 同时另一个解仍为无穷级数, 不满足边界条件

Legendre 多项式

🦄 综合起来, 如果 $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$), 两个线性独立解中就有一个解中断为 l 次多项式, 它当然满足自然边界条件 $|y(\pm 1)| < \infty$

🍌 同时另一个解仍为无穷级数, 不满足边界条件

🦊 适当选取 a_0 (若 $l = 2n$) 或 a_1 (若 $l = 2n + 1$), 使多项式解的最高次幂系数为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

🐼 这样得到的解称为 l 次 Legendre 多项式, 记作 $P_l(x)$

🐼 下一章将会证明, 这样的定义满足 $P_l(1) = 1$, 从而使得相关公式比较简单

Legendre 多项式

🦁 综合起来, 如果 $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$), 两个线性独立解中就有一个解中断为 l 次多项式, 它当然满足自然边界条件 $|y(\pm 1)| < \infty$

🍌 同时另一个解仍为无穷级数, 不满足边界条件

🦉 适当选取 a_0 (若 $l = 2n$) 或 a_1 (若 $l = 2n + 1$), 使多项式解的最高次幂系数为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

🐼 这样得到的解称为 l 次 Legendre 多项式, 记作 $P_l(x)$

🐼 下一章将会证明, 这样的定义满足 $P_l(1) = 1$, 从而使得相关公式比较简单

🦢 将 $\lambda = l(l+1)$ 代入递推关系, 得 $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$

🦘 作变量替换 $k \rightarrow k-2$, 得 $a_k = \frac{(k-2)(k-1) - l(l+1)}{k(k-1)} a_{k-2}$, 分子可化为

$$(k-2)(k-1) - l(l+1) = (k-2)(k-1) + (k-2)l - (k-1)l - l^2$$

$$= [(k-2) - l][(k-1) + l] = (k-l-2)(k+l-1)$$

猜测一般系数

从而得到递推关系 $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ ，于是推出

$$\begin{aligned} a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \\ &= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!} \end{aligned}$$

猜测一般系数

从而得到递推关系 $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ ，于是推出

$$a_{l-2} = \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$$

$$= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l! (l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)! (l-2)!}$$

$$a_{l-4} = \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)} a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)! (l-2)!}$$

$$= \frac{1}{-2 \cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l (l-1)! (l-4)!} = \frac{(-)^2 (2l-4)!}{2^l 2(l-2)! (l-4)!}$$

猜测一般系数

从而得到递推关系 $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ ，于是推出

$$a_{l-2} = \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$$

$$= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}$$


$$a_{l-4} = \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)} a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}$$

$$= \frac{1}{-2 \cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l(l-1)!(l-4)!} = \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!}$$

$$a_{l-6} = \frac{(l-4)(l-5)}{(l-4-l-2)(l-4+l-1)} a_{l-4} = \frac{(l-4)(l-5)}{-6(2l-5)} \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!}$$

$$= \frac{1}{-3 \cdot 2(2l-5)} \frac{(-)^2 2(l-2)(2l-5)(2l-6)!}{2^l 2(l-2)!(l-6)!} = \frac{(-)^3(2l-6)!}{2^l 3 \cdot 2(l-3)!(l-6)!}$$

猜测一般系数

 从而得到递推关系 $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ ，于是推出


$$\begin{aligned} a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \\ &= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l! (l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)! (l-2)!} \quad (k=1) \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} a_{l-4} &= \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)} a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)! (l-2)!} \\ &= \frac{1}{-2 \cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l (l-1)! (l-4)!} = \frac{(-)^2 (2l-4)!}{2^l 2(l-2)! (l-4)!} \quad (k=2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{l-6} &= \frac{(l-4)(l-5)}{(l-4-l-2)(l-4+l-1)} a_{l-4} = \frac{(l-4)(l-5)}{-6(2l-5)} \frac{(-)^2 (2l-4)!}{2^l 2(l-2)! (l-4)!} \\ &= \frac{1}{-3 \cdot 2(2l-5)} \frac{(-)^2 2(l-2)(2l-5)(2l-6)!}{2^l 2(l-2)! (l-6)!} = \frac{(-)^3 (2l-6)!}{2^l 3 \cdot 2(l-3)! (l-6)!} \quad (k=3) \end{aligned}$$


 从以上结果寻找规律，猜测一般系数的形式为 $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!}$


证明一般系数


 接着用**数学归纳法证明一般系数** $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ (1)

 **证明** 由 $a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \frac{(-)^0 (2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$ 可知, (1) 式对 $k=0$ 成立

证明一般系数

 接着用**数学归纳法证明一般系数** $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ (1)


 **证明** 由 $a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \frac{(-)^0 (2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$ 可知, (1) 式对 $k=0$ 成立


 当 $l \geq 2n+2$ 时, 假设 (1) 式对 $k=n$ 成立, 则 $a_{l-2n} = \frac{(-)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}$


$$\begin{aligned} a_{l-2n-2} &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{(l-2n-l-2)(l-2n+l-1)} a_{l-2n} \\ &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} \\ &= \frac{1}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n 2(l-n)(2l-2n-1)(2l-2n-2)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n-2)!} \\ &= \frac{(-)^{n+1} (2l-2n-2)!}{2^l (n+1)!(l-n-1)!(l-2n-2)!} \end{aligned}$$

 可见, (1) 式对 $k=n+1$ 也成立

证明一般系数



 接着用**数学归纳法证明一般系数** $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ (1)

 **证明** 由 $a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \frac{(-)^0 (2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$ 可知, (1) 式对 $k=0$ 成立

 当 $l \geq 2n+2$ 时, 假设 (1) 式对 $k=n$ 成立, 则 $a_{l-2n} = \frac{(-)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}$

$$\begin{aligned} a_{l-2n-2} &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{(l-2n-l-2)(l-2n+l-1)} a_{l-2n} \\ &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} \\ &= \frac{1}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n 2(l-n)(2l-2n-1)(2l-2n-2)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n-2)!} \\ &= \frac{(-)^{n+1} (2l-2n-2)!}{2^l (n+1)!(l-n-1)!(l-2n-2)!} \end{aligned}$$

 可见, (1) 式对 $k=n+1$ 也成立

 于是, (1) 式对 $k=0, 1, 2, \dots, [l/2]$ 成立 

$$[l/2] \equiv \begin{cases} \frac{l}{2}, & l \text{ 是偶数} \\ \frac{l}{2} - \frac{1}{2}, & l \text{ 是奇数} \end{cases}$$

 $k = [l/2] \in \mathbb{N}$ 满足 $2k \leq l$

Legendre 多项式的显式

🐑 显然，一般系数 $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ 只对 $l-2k \geq 0$ 成立

🐎 因此 $k \leq l/2$ ，故 $k \in \mathbb{N}$ 的求和上限为 $[l/2]$ ，即 $\leq l/2$ 的最大整数

🐎 将代入一般系数代入 $P_l(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k = \sum_{k=0}^{[l/2]} a_{l-2k} x^{l-2k}$

🐷 就得到 Legendre 多项式的显式

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Legendre 多项式的显式

🐑 显然，一般系数 $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ 只对 $l-2k \geq 0$ 成立

🐎 因此 $k \leq l/2$ ，故 $k \in \mathbb{N}$ 的求和上限为 $[l/2]$ ，即 $\leq l/2$ 的最大整数

🐎 将代入一般系数代入 $P_l(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k = \sum_{k=0}^{[l/2]} a_{l-2k} x^{l-2k}$

🐷 就得到 Legendre 多项式的显式

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

🐎 综上，Legendre 方程 $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0$ 在自然边界条件 $|P(\pm 1)| < \infty$

下的本征值是 $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$)，相应的本征函数是 l 次 Legendre 多项式 $P_l(x)$

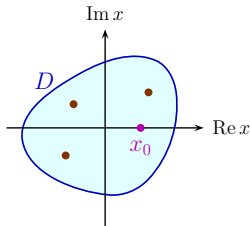
🐎 当 $\lambda = l(l+1)$ 时，另一个线性独立解 $Q_l(x)$ 是无穷级数，它在 $x = \pm 1$ 处具有 $\ln(1 \mp x)$ 的奇性

§3 正则奇点邻域的级数解法

🔫 如前所述, 对于二阶线性齐次常微分方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, 假设在复平面的某个区域 D 内, $p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的

🧸 那么, 如果 D 内某点 x_0 是 $p(x)$ 和(或) $q(x)$ 的奇点, 那就只能是极点或本性奇点

📝 x_0 不会是支点; 至于可去奇点则可当作常点, 相应的系数展开式是 Taylor 级数



§3 正则奇点邻域的级数解法

🔫 如前所述, 对于二阶线性齐次常微分方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, 假设在复平面的某个区域 D 内, $p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的

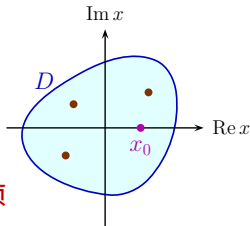
🧸 那么, 如果 D 内某点 x_0 是 $p(x)$ 和(或) $q(x)$ 的奇点, 那就只能是极点或本性奇点

📄 x_0 不会是支点; 至于可去奇点则可当作常点, 相应的系数展开式是 Taylor 级数

🟢 一般地, 有

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(x-x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k(x-x_0)^k,$$

$$0 < |x-x_0| < R$$



🦋 若 x_0 是极点, 则以上 Laurent 展开式中只有有限个负幂项


🎯 可以证明, 此时方程的两个线性独立解具有下列形式:

$$y_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x-x_0)^{k+s_1}, \quad y_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x-x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x-x_0)$$


奇点邻域的级数解


$$y_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, \quad y_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0)$$

 上式中 s_1 和 s_2 通常不是整数，最一般情况下可以是复数

 所以 x_0 一般来说是解的支点


 当 $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$ 时，可能有 $\beta \neq 0$ ，即第二解中可能出现对数函数；否则 $\beta = 0$

 将这样的解式代入方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

 将得到一系列递推关系，原则上由此可以确定 s_1 、 s_2 和系数 a_k 、 b_k 、 β 等

 但是，由于每个递推关系都涉及无穷多个系数，实际计算很困难，甚至不可能


正则解

 比较简单的一种情况是上面的解式中只有有限个 $k < 0$ 的项

 这时适当调整 s_1 和 s_2 ，使 k 从 0 开始求和，总可以将解式写成

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0), \quad b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0$$

 这样的解称为正则解

Fuchs 定理和正则奇点

🍊 方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 是否存在正则解，有一个还是两个正则解，取决于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质，与下面的 **Fuchs 定理** 有关

🍇 **Fuchs 定理** 方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 在 x_0 处有两个正则解的充要条件是 $(x - x_0)p(x)$ 和 $(x - x_0)^2q(x)$ 在 x_0 解析



Lazarus Fuchs
(1833–1902)

Fuchs 定理和正则奇点

🍊 方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 是否存在正则解，有一个还是两个正则解，取决于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质，与下面的 **Fuchs 定理** 有关

🍇 **Fuchs 定理** 方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 在 x_0 处有两个正则解的充要条件是 $(x - x_0)p(x)$ 和 $(x - x_0)^2q(x)$ 在 x_0 解析

📖 上述充要条件就是说， $p(x)$ 以 x_0 为不高于一阶的极点， $q(x)$ 以 x_0 为不高于二阶的极点

🔧 这样的奇点称为方程的正则奇点

🎉 **Fuchs 定理**也可以叙述为：方程在 x_0 处有两个正则解的充要条件是 x_0 为方程的正则奇点



Lazarus Fuchs
(1833–1902)

关于正则解的说明

$$\text{正则解} \begin{cases} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, & a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0), & b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0 \end{cases}$$

中 这里不研究 **Fuchs 定理** 的证明，只补充以下几点说明

- 1** s_1 和 s_2 称为**正则奇点**或**正则解**的**指标**， $\text{Re } s_1 \geq \text{Re } s_2$ ，即**第一解**对应于**指标实部较大者**，它总不包含对数函数

关于正则解的说明

$$\text{正则解} \begin{cases} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, & a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0), & b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0 \end{cases}$$

中 这里不研究 **Fuchs 定理** 的证明，只补充以下几点说明

- ① s_1 和 s_2 称为**正则奇点**或**正则解**的**指标**， $\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$ ，即**第一解**对应于**指标实部较大者**，它总不包含对数函数
- ② 若 $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \dots$ ，则 $\beta = 0$ ，即**第二解必定不包含对数函数**
- ③ 若 $s_1 = s_2$ ，则 $\beta \neq 0$ ，即**第二解必定包含对数函数**（否则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 相同）
- ④ 若 $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}^+$ ，则**第二解可能包含对数函数**，也**可能不包含对数函数**，即 β 是否为零不是确定的，需要通过具体求解得知


例 将**正则解**的形式和 $p(x)$ 、 $q(x)$ 的 **Laurent 展开式**代入**方程**，可得一系列**递推关系**，从而确定正则解中的**系数**和**指标**

§4 Bessel 方程

§4.1 Bessel 方程的级数解


 上一章在柱坐标下对 Laplace 方程分离变量时，遇到 Bessel 方程及其本征值问题

 对波动或热传导方程分离变量，也会遇到类似的问题

 Bessel 方程也没有简单的解法，所以只能考虑级数解

 数学上，Bessel 方程的一般形式为


$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$


 其中 ν 称为 Bessel 方程的阶，它可以是复数

§4 Bessel 方程

§4.1 Bessel 方程的级数解


 上一章在柱坐标下对 Laplace 方程分离变量时，遇到 Bessel 方程及其本征值问题

 对波动或热传导方程分离变量，也会遇到类似的问题


 Bessel 方程也没有简单的解法，所以只能考虑级数解

 数学上，Bessel 方程的一般形式为

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$


 其中 ν 称为 Bessel 方程的阶，它可以是复数

 若将 ν 换为 $-\nu$ ，方程不变，故可设 $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ 而不失一般性

 与标准形式 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 比较可见


$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$$

 显然， $x = 0$ 是方程的正则奇点，而且在复平面上没有其它奇点


 若 $\operatorname{Re} \nu < 0$ ，可令 $\nu' = -\nu$ ，将问题转化为 $\operatorname{Re} \nu' > 0$ 的情况来讨论


代入级数解

 在 $x = 0$ 的去心邻域内，可设级数解的形式为 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$, $a_0 \neq 0$

 这是正则解中第一解的形式，也是第二解在 $\beta = 0$ 时的形式


代入级数解

 在 $x = 0$ 的去心邻域内, 可设级数解的形式为 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$, $a_0 \neq 0$

 这是正则解中第一解的形式, 也是第二解在 $\beta = 0$ 时的形式


 对级数解求导, 有

$$x^2 y'' + xy' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1)a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)^2 a_k x^{k+s}$$

 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$ 两边乘以 x^2 , 推出

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+s)^2 - \nu^2] a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s+2} \\ &= (s^2 - \nu^2)a_0 x^s + [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+s)^2 - \nu^2] a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s+2} \end{aligned}$$

系数关系

 由 $k \rightarrow k+2$ 得
$$\sum_{k=2}^{\infty} [(k+s)^2 - \nu^2] a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+s+2)^2 - \nu^2] a_{k+2} x^{k+s+2}$$

 Bessel 方程化为


$$(s^2 - \nu^2)a_0 x^s + [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+s+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k\} x^{k+s+2} = 0$$

 左边各项系数必须为零，即

$$(s^2 - \nu^2)a_0 = 0, \quad [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0$$

$$[(k+s+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$$

系数关系

 由 $k \rightarrow k+2$ 得
$$\sum_{k=2}^{\infty} [(k+s)^2 - \nu^2] a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+s+2)^2 - \nu^2] a_{k+2} x^{k+s+2}$$


 Bessel 方程化为


$$(s^2 - \nu^2) a_0 x^s + [(s+1)^2 - \nu^2] a_1 x^{s+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+s+2)^2 - \nu^2] a_{k+2} + a_k\} x^{k+s+2} = 0$$


 左边各项系数必须为零，即


$$(s^2 - \nu^2) a_0 = 0, \quad [(s+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0$$

$$[(k+s+2)^2 - \nu^2] a_{k+2} + a_k = 0$$

 由于 $a_0 \neq 0$ ，有 $s^2 - \nu^2 = 0$ ，这是决定指标的方程

 因 $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ 且 $\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$ ，两个根为 $s_1 = \nu$ 和 $s_2 = -\nu$ ，故 $s_1 - s_2 = 2\nu$

 暂时假定 ν 不等于整数或半奇数，则 $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \dots$ ，按上一节的一般理论，两个正则解均不包含对数函数

 ν 为整数或半奇数的情况将在随后各小节讨论

第一解

♥ 首先讨论**第一解** $y_1(x)$ ，对应于 $s_1 = \nu$

🏈 $0 = [(s_1 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = [(\nu + 1)^2 - \nu^2]a_1$ 表明 $a_1 = 0$

🏀 由**系数关系** $[(k + s_1 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k + \nu + 2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_k}{(k + 2\nu + 2)(k + 2)}$$

第一解

♥ 首先讨论**第一解** $y_1(x)$ ，对应于 $s_1 = \nu$

🏈 $0 = [(s_1 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = [(\nu + 1)^2 - \nu^2]a_1$ 表明 $a_1 = 0$

🏀 由**系数关系** $[(k + s_1 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k + \nu + 2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_k}{(k + 2\nu + 2)(k + 2)}$$

🏃 由此**递推关系**和 $a_1 = 0$ 推出 $a_{2k+1} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$)，故

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s_1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu}$$

🏃 反复利用**递推关系**又可推出


$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2\nu + 2k) \cdot 2k} = (-)^2 \frac{a_{2k-4}}{(2\nu + 2k)(2\nu + 2k - 2) \cdot 2k(2k - 2)} = \dots$$


共 k 次递推 \rightarrow

$$= (-)^k \frac{a_0}{(2\nu + 2k)(2\nu + 2k - 2) \cdots (2\nu + 2) \cdot 2k(2k - 2) \cdots 2}$$

$$= (-)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1) \cdot k!}$$


Γ 函数


 利用 Γ 函数可以把因子 $(\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1)$ 表达成紧凑的形式

 Γ 函数定义为 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ ($\operatorname{Re} z > 0$)，满足


$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = - \int_0^{\infty} t^z de^{-t} = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Γ 函数

 利用 Γ 函数可以把因子 $(\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1)$ 表达成紧凑的形式

 Γ 函数定义为 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ ($\operatorname{Re} z > 0$)，满足


$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = - \int_0^{\infty} t^z de^{-t} = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$


 解析开拓到 $\operatorname{Re} z < 0$ ，可证明 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 仍成立，对 $-n < \operatorname{Re} z < 0$ 有

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)z} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$


 从而， $z = 0, -1, -2, \dots$ 是 Γ 函数的单极点，有 $\lim_{z \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0$ ($m \in \mathbb{N}$)

Γ 函数

 利用 Γ 函数可以把因子 $(\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1)$ 表达成紧凑的形式


 Γ 函数定义为 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ ($\operatorname{Re} z > 0$), 满足


$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = - \int_0^{\infty} t^z de^{-t} = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

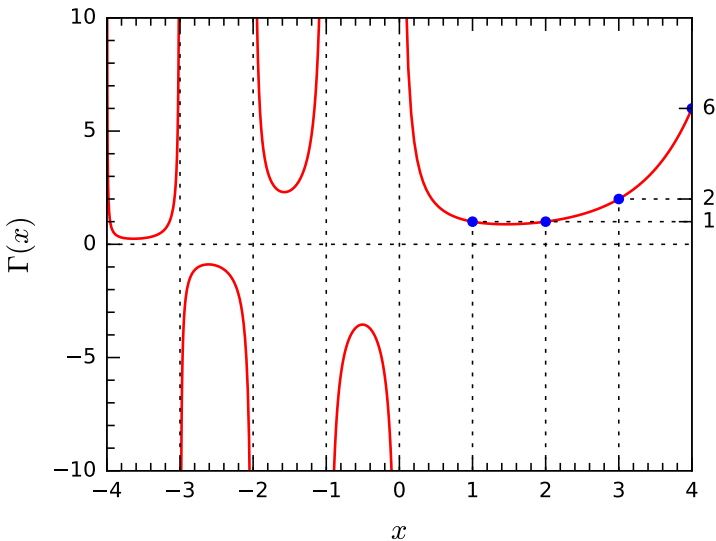
 解析开拓到 $\operatorname{Re} z < 0$, 可证明 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 仍成立, 对 $-n < \operatorname{Re} z < 0$ 有

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)z} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$


 从而, $z = 0, -1, -2, \cdots$ 是 Γ 函数的单极点, 有 $\lim_{z \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0$ ($m \in \mathbb{N}$)

 由 $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$, \cdots


 得 $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$), 可见 Γ 函数是阶乘在复变函数中的推广

实轴上的 Γ 函数图像

Bessel 函数


 反复利用 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ，推出

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+k+1) &= (\nu+k)\Gamma(\nu+k) = (\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1) = \cdots \\ &= (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$


 故 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$ ，从而

$$a_{2k} = (-)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) \cdot k!} = (-)^k \frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}$$


Bessel 函数


 反复利用 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ，推出

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+k+1) &= (\nu+k)\Gamma(\nu+k) = (\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1) = \cdots \\ &= (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$


 故 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$ ，从而

$$a_{2k} = (-)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) \cdot k!} = (-)^k \frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

 **第一解**化为 $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)} x^{2k+\nu}$

 取 $a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$ ，这样得到的**第一解**称为 ν 阶 **Bessel 函数**，具体形式为

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

 应该强调的是，**第一解** $y_1(x) = J_\nu(x)$ 对于任意 $\nu \in \mathbb{C}$ 都是适用的

第二解

♥ 其次讨论**第二解** $y_2(x)$ ，对应于 $s_2 = -\nu$

🌊 此时 x^{s_2+1} **项系数**为 $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = [(-\nu + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$

🏄 已经假定 ν **不等于整数或半奇数**，有 $\nu \neq \frac{1}{2}$ ，故 $a_1 = 0$ 仍成立

🚣 **重复第一解推导过程**，将其中 ν 换为 $-\nu$ ，取 $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1)}$ ，即得**第二解**

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x)$$

第二解

♥ 其次讨论**第二解** $y_2(x)$ ，对应于 $s_2 = -\nu$

🌊 此时 x^{s_2+1} 项系数为 $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = [(-\nu + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$

🏄 已经假定 ν 不等于整数或半奇数，有 $\nu \neq \frac{1}{2}$ ，故 $a_1 = 0$ 仍成立

🏊 重复**第一解**推导过程，将其中 ν 换为 $-\nu$ ，取 $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1)}$ ，即得**第二解**

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x)$$

🚢 只要 ν 不为整数， $J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$ 的定义就是**恰当的**

👯 此时， $J_{-\nu}(x)$ 与 $J_{\nu}(x)$ 是**线性独立的**

🧐 总结起来，当 ν 不等于整数或半奇数时，**Bessel 方程**的**两个线性独立解**为

$$y(x) = \{J_{\nu}(x), J_{-\nu}(x)\}$$

Bessel 函数的性质

🚲 当 ν 不等于整数或半奇数时

🚲 显然 $x = 0$ 是 Bessel 函数 $J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k \pm \nu}$ 的支点

🚲 将 $J_{\pm\nu}(x)$ 中的 $(x/2)^{\pm\nu}$ 因子提出来, 剩下的因子是幂级数

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Bessel 函数的性质

🚲 当 ν 不等于整数或半奇数时

🚲 显然 $x = 0$ 是 Bessel 函数 $J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k \pm \nu}$ 的支点

🚲 将 $J_{\pm\nu}(x)$ 中的 $(x/2)^{\pm\nu}$ 因子提出来, 剩下的因子是幂级数

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

🚲 按照递推关系 $a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2\nu+2)(k+2)}$, 有

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{(k+2\nu+2)(k+2)} \right| = 0$$

🚲 根据 d'Alembert 计算公式, 该幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{l} = \infty$

🚲 因此, $J_{\pm\nu}(x)$ 在沿 $x = 0$ 至 $x = \infty$ 适当割破的 x 平面上是单值解析的

§4.2 半奇数阶 Bessel 方程



本小节考虑半奇数阶 Bessel 方程，即 $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ($l \in \mathbb{N}^+$)



此时 $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$



根据上一节的一般理论，第二解可能会包含对数函数



不过，下面的具体求解过程表明，第二解实际上不包含对数函数

§4.2 半奇数阶 Bessel 方程



本小节考虑**半奇数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ($l \in \mathbb{N}^+$)



此时 $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$



根据上一节的一般理论，**第二解可能会包含对数函数**



不过，下面的具体求解过程表明，**第二解实际上不包含对数函数**



当 $\nu = 1/2$ 时，**第一解**当然就是 $y_1(x) = J_{1/2}(x)$



第二解对应于 $s_2 = -\nu = -1/2$ ，此时 x^{s_2+1} 项的系数为

$$0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1 = 0 \cdot a_1$$



由此可见， a_1 可以**任取**，那么**取** $a_1 = 0$ 显然是最方便的



这样就可以像上一小节一样求得**第二解**为 $y_2(x) = J_{-1/2}(x)$

§4.2 半奇数阶 Bessel 方程



本小节考虑**半奇数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ($l \in \mathbb{N}^+$)



此时 $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$



根据上一节的一般理论，**第二解可能会包含对数函数**



不过，下面的具体求解过程表明，**第二解实际上不包含对数函数**



当 $\nu = 1/2$ 时，**第一解**当然就是 $y_1(x) = J_{1/2}(x)$



第二解对应于 $s_2 = -\nu = -1/2$ ，此时 x^{s_2+1} 项的系数为

$$0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1 = 0 \cdot a_1$$



由此可见， a_1 可以**任取**，那么**取** $a_1 = 0$ 显然是最方便的



这样就可以像上一小节一样求得**第二解**为 $y_2(x) = J_{-1/2}(x)$



如果**不取** $a_1 = 0$ ，则求得的解将包含两个任意常数 a_0 和 a_1





且包含 a_1 的部分与 $J_{1/2}(x)$ 成正比，即得到**通解** $y(x) = a_0 J_{-1/2}(x) + a_1 J_{1/2}(x)$




由此可见，**取** $a_1 = 0$ 而得**第二解**是**恰当的**

$\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

 当 $l \geq 2$ 时, $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, **第一解**仍然是 $y_1(x) = J_\nu(x)$


 对于**第二解**, $s_2 = -\nu$, $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$, 且


$$(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2 = (k - \nu + 2)^2 - \nu^2 = (k + 2)(k - 2\nu + 2) = (k + 2)(k - 2l + 3)$$

 由**系数关系** $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**


$$(k + 2)(k - 2l + 3)a_{k+2} = -a_k$$

$\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

 当 $l \geq 2$ 时, $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, **第一解**仍然是 $y_1(x) = J_\nu(x)$


 对于**第二解**, $s_2 = -\nu$, $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$, 且


$$(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2 = (k - \nu + 2)^2 - \nu^2 = (k + 2)(k - 2\nu + 2) = (k + 2)(k - 2l + 3)$$

 由**系数关系** $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$(k + 2)(k - 2l + 3)a_{k+2} = -a_k$$


 从 $a_1 = 0$ 开始**递推**, 得 $a_3 = a_5 = \dots = a_{2l-3} = 0$


 然后遇到 $k = 2l - 3$, 则 $(k + 2)(k - 2l + 3) = 0$

 **递推关系**化为 $0 \cdot a_{2l-1} = -a_{2l-3} = 0$, 从而 a_{2l-1} 可以**任取**

 如前取 $a_{2l-1} = 0$, 则**所有** $a_{2k+1} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), 求得**第二解**为 $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$

$\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

 当 $l \geq 2$ 时, $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, **第一解** 仍然是 $y_1(x) = J_\nu(x)$


 对于**第二解**, $s_2 = -\nu$, $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$, 且


$$(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2 = (k - \nu + 2)^2 - \nu^2 = (k + 2)(k - 2\nu + 2) = (k + 2)(k - 2l + 3)$$

 由**系数关系** $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$(k + 2)(k - 2l + 3)a_{k+2} = -a_k$$

 从 $a_1 = 0$ 开始**递推**, 得 $a_3 = a_5 = \dots = a_{2l-3} = 0$

 然后遇到 $k = 2l - 3$, 则 $(k + 2)(k - 2l + 3) = 0$

 **递推关系** 化为 $0 \cdot a_{2l-1} = -a_{2l-3} = 0$, 从而 a_{2l-1} 可以**任取**


 如前取 $a_{2l-1} = 0$, 则**所有** $a_{2k+1} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), 求得**第二解**为 $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$


 总结起来, 当 ν 为半奇数时, **Bessel 方程**的**两个线性独立解**仍然是

$$y(x) = \{J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\}$$

§4.3 整数阶 Bessel 方程


 本小节考虑**整数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，此时 $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$


 当 $m = 0$ 时，有 $s_1 = s_2 = 0$ ，只能求得一个形如 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的解

 它是**第一解** $y_1(x) = J_0(x)$ ，根据上一节的一般理论，**第二解必定包含对数函数**


§4.3 整数阶 Bessel 方程


 本小节考虑**整数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，此时 $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$

 当 $m = 0$ 时，有 $s_1 = s_2 = 0$ ，只能求得一个形如 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的解

 它是**第一解** $y_1(x) = J_0(x)$ ，根据上一节的一般理论，**第二解必定包含对数函数**

 当 $m \in \mathbb{N}^+$ 时，**第一解**为 $y_1(x) = J_m(x)$


 对于**第二解**， $s_2 = -m$ ， $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2m + 1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$


 由**系数关系** $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$-a_k = [(k - m + 2)^2 - m^2]a_{k+2} = (k + 2)(k - 2m + 2)a_{k+2}$$


§4.3 整数阶 Bessel 方程

 本小节考虑**整数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，此时 $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$

 当 $m = 0$ 时，有 $s_1 = s_2 = 0$ ，只能求得一个形如 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的解


 它是**第一解** $y_1(x) = J_0(x)$ ，根据上一节的一般理论，**第二解必定包含对数函数**


 当 $m \in \mathbb{N}^+$ 时，**第一解**为 $y_1(x) = J_m(x)$


 对于**第二解**， $s_2 = -m$ ， $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2m + 1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$

 由**系数关系** $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$-a_k = [(k - m + 2)^2 - m^2]a_{k+2} = (k + 2)(k - 2m + 2)a_{k+2}$$

 从 $a_1 = 0$ 开始**递推**得到**所有** $a_{2k+1} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$)

 从 $a_0 \neq 0$ 开始**递推**得到**正比于** a_0 的 $a_2, a_4, \dots, a_{2m-2}$ ，然后遇到 $k = 2m - 2$ ，则 $(k + 2)(k - 2m + 2) = 0$ ，**递推关系**化为 $0 \cdot a_{2m} = -a_{2m-2} \propto a_0 \neq 0$ ，**矛盾**

 于是，**第二解不可能具有** $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的形式，因而**必定包含对数函数**

m 阶 Neumann 函数

👶 对于 $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，设第二解的形式为 $y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-m} + \beta J_m(x) \ln x$ ，代入

Bessel 方程 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ 求解，过程见讲义 §4.5 或 §4.6 选读内容

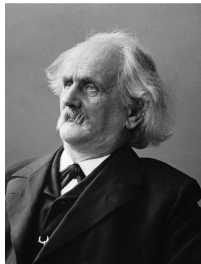
🍼 适当选取其中可以任取的两个常数，最终求得第二解 $y_2(x) = N_m(x)$

👦 它称为 m 阶 Neumann 函数，具体形式为

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} [\psi(k+m+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

🥛 当 $m = 0$ 时，规定去掉第二项有限和

🔍 这里出现的 ψ 函数定义为 $\psi(x) \equiv \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$



Carl Neumann
(1832–1925)

🎈 由 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 可推出 $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$

🍦 此外, $\psi(1) = -\gamma$, 其中 **Euler 常数**为

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577\,215\,664\,901 \cdots$$

👩 在不同的书上, **Neumann 函数**的形式可能略有不同, 但实质上是一样的

整数阶 Bessel 方程的解

🎈 由 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 可推出 $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$

🍷 此外, $\psi(1) = -\gamma$, 其中 Euler 常数为

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577\ 215\ 664\ 901 \dots$$

👩 在不同的书上, Neumann 函数的形式可能略有不同, 但实质上是一样的

📖 总结起来, 当 $\nu = m$ 为整数时, Bessel 方程的两个线性独立解是


$$y(x) = \{J_m(x), N_m(x)\}$$

👦 物理上最常遇到的就是这种情况


🌾 由于 Neumann 函数包含对数函数 $\ln \frac{x}{2}$, 第二解 $N_m(x)$ 在 $x=0$ 处有奇性

🥕 所以, 如果求解区域包括 $x=0$ 点, 就应该舍弃第二解 $N_m(x)$

§4.4 Neumann 函数的一般定义


 对于一般的 $\nu \in \mathbb{C}$ ，可以将 ν 阶 Neumann 函数定义为

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$


 当 $\nu \neq m \in \mathbb{N}$ 时，它显然与 $J_\nu(x)$ 线性独立

 故此时 Bessel 方程的两个线性独立解亦可取为 $y(x) = \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$


§4.4 Neumann 函数的一般定义

 对于一般的 $\nu \in \mathbb{C}$ ，可以将 ν 阶 Neumann 函数定义为


$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$


 当 $\nu \neq m \in \mathbb{N}$ 时，它显然与 $J_\nu(x)$ 线性独立

 故此时 Bessel 方程的两个线性独立解亦可取为 $y(x) = \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$

 当 $\nu \rightarrow 0$ 时，定义式成为 $\frac{0}{0}$ 型


 当 $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}^+$ 时，令 $J_{-m}(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow m} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$

 $k \leq m-1$ 时， $k-m+1 \leq 0$ ，由 $\frac{1}{\Gamma(-n)} \rightarrow 0$ ($n \in \mathbb{N}$) 得 $\frac{1}{\Gamma(k-m+1)} \rightarrow 0$

 故 $k \leq m-1$ 各项对求和没有贡献，利用 $\Gamma(k-m+1) = (k-m)!$ ($k \geq m$)，得

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$


$\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}^+$ 的情况

 作替换 $k \rightarrow k + m$, 推出

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{k+m}}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+m)-m} \\ &= (-)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = J_m(x) \cos m\pi \end{aligned}$$

 最后一步用到 $\cos m\pi = (-)^m$ 和

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(m+k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

 可见, 当 $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}^+$ 时, $N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$ 也成为 $\frac{0}{0}$ 型

任意 ν 阶 Bessel 方程的解

🌟 当 $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}$ 时, 应用 L'Hospital 法则求出上述 $\frac{0}{0}$ 型极限, 得到

$$\lim_{\nu \rightarrow m} N_\nu(x) = N_m(x)$$

🍷 相关证明见讲义 §4.7 选读内容

🍺 可见, ν 阶 Neumann 函数确实是整数阶 Neumann 函数的推广



Guillaume de L'Hospital
(1661–1704)

任意 ν 阶 Bessel 方程的解

🌟 当 $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}$ 时, 应用 **L'Hospital 法则** 求出上述 $\frac{0}{0}$ 型极限, 得到

$$\lim_{\nu \rightarrow m} N_\nu(x) = N_m(x)$$

🍷 相关证明见讲义 §4.7 选读内容

🍷 可见, ν 阶 Neumann 函数确实是整数阶 Neumann 函数的推广

📌 总结起来, 对于任意 $\nu \in \mathbb{C}$ 时, Bessel 方程的两个线性独立解总可以取为

$$y(x) = \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$$

🍷 当 ν 为半奇数 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ 时, $\cos \nu\pi = 0$, 有

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} = -\frac{J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

🍷 即 $N_\nu(x)$ 与 $J_{-\nu}(x)$ 只相差一个常数因子



Guillaume de L'Hospital
(1661–1704)