数学物理方法

第九章　正交曲线坐标系中的分离变量

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 6 月 19 日

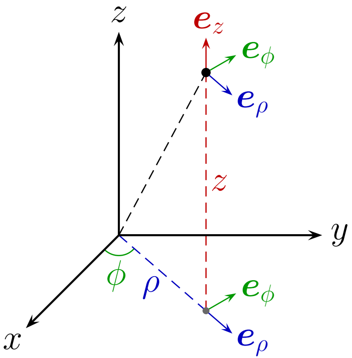
第九章　正交曲线坐标系中的分离变量

- 本章开始把分离变量法推广到比较实际的三维问题
- 前已指出，分离变量时，应该根据边界的形状采用适当的坐标系
- 本章的目的就是研究如何在球坐标系和柱坐标系中对各类方程分离变量
- 前面提到的波动方程、输运方程和稳定场方程都包含 Laplace 算符
- 因此需要研究 Laplace 算符在曲线坐标系，尤其是球坐标系和柱坐标系中的形式

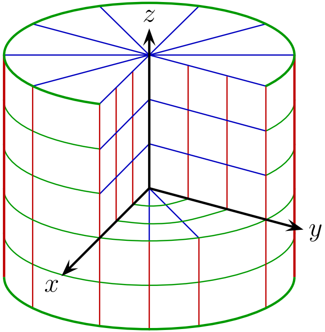
§1 正交曲线坐标系中的微分算符

§1.1 正交曲线坐标系

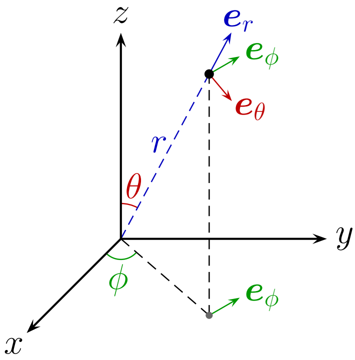
- 直角坐标系 (x, y, z)、柱坐标系 (ρ, ϕ, z)、球坐标系 (r, θ, ϕ) 都是正交曲线坐标系
- 它们的三族坐标线处处相互正交



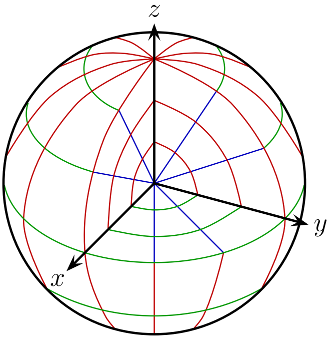
柱坐标系 (ρ, ϕ, z)



柱坐标系的坐标线

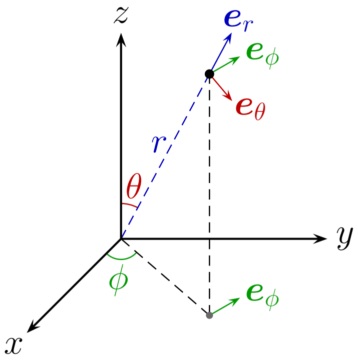


球坐标系 (r, θ, ϕ)

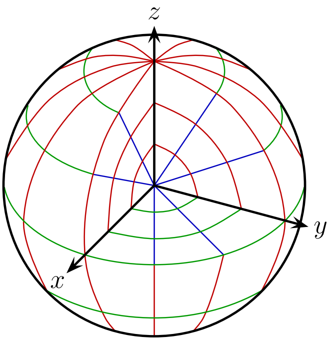


球坐标系的坐标线

一般曲线坐标系



球坐标系 (r, θ, ϕ)



球坐标系的坐标线

现在，考虑一般曲线坐标系，记其坐标为 (q_1, q_2, q_3)，它们与直角坐标 (x, y, z) 之间的变换关系为 $x = x(q_1, q_2, q_3)$，$y = y(q_1, q_2, q_3)$，$z = z(q_1, q_2, q_3)$

反之，(q_1, q_2, q_3) 也可以表达为 (x, y, z) 的函数

坐标系的奇点

- 一般来说，我们要求 **Jacobi 行列式**

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial q_1 & \partial x/\partial q_2 & \partial x/\partial q_3 \\ \partial y/\partial q_1 & \partial y/\partial q_2 & \partial y/\partial q_3 \\ \partial z/\partial q_1 & \partial z/\partial q_2 & \partial z/\partial q_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

- 在 $J = 0$ 处，给定 (x, y, z) 可能**无法唯一确定** (q_1, q_2, q_3)
- $J = 0$ 对应的点就是**坐标系**的**奇点**

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

$$\mathrm{d}^3 x = |J|\, \mathrm{d}^3 q$$

坐标系的奇点

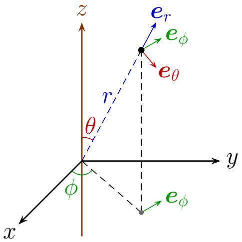
- 一般来说，我们要求 **Jacobi 行列式**

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial q_1 & \partial x/\partial q_2 & \partial x/\partial q_3\\ \partial y/\partial q_1 & \partial y/\partial q_2 & \partial y/\partial q_3\\ \partial z/\partial q_1 & \partial z/\partial q_2 & \partial z/\partial q_3\end{vmatrix}\neq 0$$

Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804–1851)

- 在 $J=0$ 处，给定 (x,y,z) 可能**无法唯一确定** (q_1,q_2,q_3)
- $J=0$ 对应的点就是**坐标系**的**奇点**
- 对于**球坐标系**，$J=r^2\sin\theta$ 在 $r=0$ 或 $\theta=0,\pi$ 处**为零**
- 此时给定 (x,y,z)，**无法唯一确定** (r,θ,ϕ)
- 在 $\theta=0,\pi$ 处，ϕ **没有定义**
- 在 $r=0$ 处，θ **和** ϕ **没有定义**
- 所以**整个** z **轴**都是**球坐标系**的**奇点**

$$\mathrm{d}^3x=|J|\,\mathrm{d}^3q$$



- 不过，这些点构成的**集合测度**（可以粗略地理解为**体积**）**为零**，这一般是**允许**的

相邻两点之间的距离

将 $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ 写成简洁的矢量形式

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$$

这样可以减少书写上的麻烦，使有关结果显得更清晰

如果一时看不清楚式子的含义，可以写出详细的分量形式加以对照

❓ 现在的问题是，什么样的曲线坐标系才算是正交的?

相邻两点之间的距离

将 $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ 写成**简洁的矢量形式**

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$$

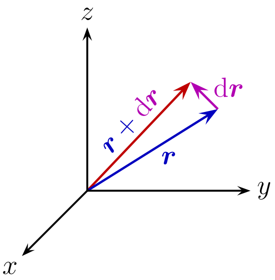
这样可以减少书写上的麻烦，使有关结果显得更清晰

如果一时看不清楚式子的含义，可以写出**详细的分量形式**加以对照

现在的问题是，什么样的**曲线坐标系**才算是**正交**的?

在**直角坐标系**中，相邻两点 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 之间的距离记作 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，则

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$



在**曲线坐标系**中，代入 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i$，得

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_j$$

如果写出详细的分量形式，则上式包含了 **18 项**

正交曲线坐标系的定义

现在给出正交曲线坐标系的定义：如果

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j,$$

则曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 称为正交的，有

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \,\mathrm{d}q_i \,\mathrm{d}q_j \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)^2 (\mathrm{d}q_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (h_i \,\mathrm{d}q_i)^2\end{aligned}$$

其中 $h_i \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|$ 称为度规系数

这样的 $(\mathrm{d}s)^2$ 与直角坐标系中的形式 $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$ 相似，只是 $\mathrm{d}q_i$ 前面多了度规系数 h_i

所以，正交的关键就是 $(\mathrm{d}s)^2$ 表达式中不包含像 $\mathrm{d}q_1 \,\mathrm{d}q_2$ 这样的交叉项

正交曲线坐标系的定义

现在给出正交曲线坐标系的定义：如果

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j,$$

则曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 称为正交的，有

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \,\mathrm{d}q_i \,\mathrm{d}q_j \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)^2 (\mathrm{d}q_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (h_i \,\mathrm{d}q_i)^2\end{aligned}$$

其中 $h_i \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|$ 称为度规系数

定义度规 $g_{ij} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}$，则

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} \,\mathrm{d}q_i \,\mathrm{d}q_j$$

对于正交曲线坐标系，有

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

这样的 $(\mathrm{d}s)^2$ 与直角坐标系中的形式 $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$ 相似，只是 $\mathrm{d}q_i$ 前面多了度规系数 h_i

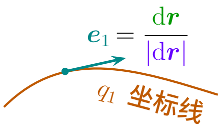
所以，正交的关键就是 $(\mathrm{d}s)^2$ 表达式中不包含像 $\mathrm{d}q_1 \,\mathrm{d}q_2$ 这样的交叉项

正交曲线坐标系中的单位矢量

- 接下来推导**正交曲线坐标系** (q_1, q_2, q_3) 的**基底**，即**单位矢量** $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

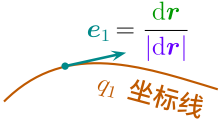
- $\boldsymbol{e}_1$ **的方向**就是 q_1 **坐标线**的**切线方向**，沿着 q_1 **坐标线**，有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$

- 相应地，$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right| \mathrm{d}q_1 = h_1\,\mathrm{d}q_1$ ，故 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$



正交曲线坐标系中的单位矢量

- 接下来推导**正交曲线坐标系** (q_1, q_2, q_3) 的**基底**，即**单位矢量** $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$
- $\boldsymbol{e}_1$ **的方向**就是 q_1 **坐标线**的**切线方向**，沿着 q_1 **坐标线**，有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} \mathrm{d}q_1$
- 相应地，$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right| \mathrm{d}q_1 = h_1 \, \mathrm{d}q_1$，故 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$
- 对 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 有类似的结果，总结起来，就是



$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

- 当 $i \neq j$ 时，有 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \dfrac{1}{h_i h_j}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = 0$，可见**三族坐标线**确实是**处处正交**的
- 此外，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \dfrac{1}{h_i^2}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)^2 = \dfrac{h_i^2}{h_i^2} = 1$，归纳得到**正交归一关系**

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

柱坐标系

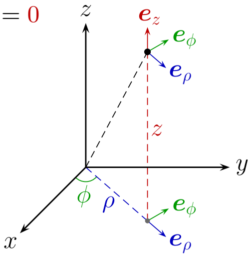
💜 **例 1** 在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中，$\boldsymbol{r} = \rho\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \rho\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$ ，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \rho\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{e}_z$$

🪑 从而验证**正交性**：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\cos\phi + \rho\sin\phi\cos\phi = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0$$



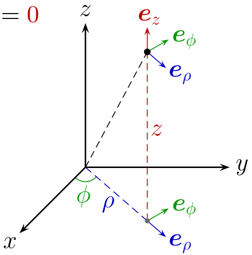
柱坐标系

💜 **例 1** 在**柱坐标系** (ρ, ϕ, z) 中，$\boldsymbol{r} = \rho\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \rho\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \rho\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{e}_z$$

🪑 从而验证**正交性**：$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\cos\phi + \rho\sin\phi\cos\phi = 0$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0$$



🚪 此外，$h_\rho^2 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$

$$h_\phi^2 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|^2 = (-\rho\sin\phi)^2 + (\rho\cos\phi)^2 = \rho^2$$

🪟 故**度规系数** $h_\rho = 1$，$h_\phi = \rho$，$h_z = |\partial \boldsymbol{r}/\partial z| = 1$，**单位矢量**为

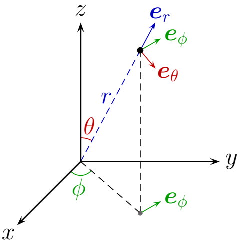
$$\boldsymbol{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z$$

🪞 $h_\phi = \rho$ 表明，**沿 ϕ 坐标线**的**微分弧长**不是 $\mathrm{d}\phi$，而是 $h_\phi\,\mathrm{d}\phi = \rho\,\mathrm{d}\phi$

球坐标系

例 2 在球坐标系 (r,θ,ϕ) 中，$\boldsymbol{r}=r\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+r\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y+r\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=r(\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z)$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}=r\sin\theta\,(-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y)$$



正交性

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=r[\sin\theta\cos\theta\,(\cos^2\phi+\sin^2\phi)-\sin\theta\cos\theta]=0$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}=r\sin^2\theta[-\sin\phi\cos\phi+\sin\phi\cos\phi]=0$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}=r^2\sin\theta\cos\theta\,(-\sin\phi\cos\phi+\sin\phi\cos\phi)=0$$

$$h_r^2=|\partial\boldsymbol{r}/\partial r|^2=\sin^2\theta\,(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta=1$$
$$h_\theta^2=|\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta|^2=r^2[\cos^2\theta\,(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+(-\sin\theta)^2]=r^2$$
$$h_\phi^2=|\partial\boldsymbol{r}/\partial\phi|^2=r^2\sin^2\theta\,[(-\sin\phi)^2+\cos^2\phi]=r^2\sin^2\theta$$

度规系数 $h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\phi=r\sin\theta$

单位矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r&=\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x\\&\quad+\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y\\&\quad+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z\\\boldsymbol{e}_\theta&=\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x\\&\quad+\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y\\&\quad-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z\\\boldsymbol{e}_\phi&=-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

§1.2 正交曲线坐标系中的微分算符

- 微分算符主要有梯度、散度、旋度和 Laplace 算符（梯度和散度的结合）
- 首先考虑标量函数 $u(\boldsymbol{r})$ 的梯度 $\nabla u(\boldsymbol{r})$，它作为矢量可以展开为 $\nabla u = \sum_{i=1}^{3} f_i\, \boldsymbol{e}_i$
- 注意，f_i 是 $\boldsymbol{r}$ 的函数；而 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向随着 $\boldsymbol{r}$ 变化，这一点与直角坐标系不同
- 由正交归一关系推出 $\boldsymbol{e}_i \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{3} f_j\, \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3} f_j \delta_{ij} = f_i$

§1.2 正交曲线坐标系中的微分算符

- 微分算符主要有梯度、散度、旋度和 Laplace 算符 (梯度和散度的结合)
- 首先考虑标量函数 $u(\boldsymbol{r})$ 的梯度 $\nabla u(\boldsymbol{r})$，它作为矢量可以展开为 $\nabla u=\sum_{i=1}^{3} f_i\,\boldsymbol{e}_i$
- 注意，f_i 是 $\boldsymbol{r}$ 的函数；而 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向随着 $\boldsymbol{r}$ 变化，这一点与直角坐标系不同
- 由正交归一关系推出 $\boldsymbol{e}_i\cdot\nabla u=\sum_{j=1}^{3} f_j\,\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{3} f_j\delta_{ij}=f_i$
- 另一方面，$u(\boldsymbol{r})$ 沿 q_i 坐标线的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial s_i}=\boldsymbol{e}_i\cdot\nabla u$，从而得到

$$f_i=\boldsymbol{e}_i\cdot\nabla u=\frac{\partial u}{\partial s_i}=\lim_{\Delta s_i\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s_i}=\lim_{\Delta q_i\to 0}\frac{\Delta u}{h_i\Delta q_i}=\frac{1}{h_i}\frac{\partial u}{\partial q_i}$$

- 于是，梯度表达为 $\nabla u=\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial u}{\partial q_i}\boldsymbol{e}_i=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3$

梯度的形式

正交曲线坐标系中的梯度 $\nabla u = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3$

相比于直角坐标系中的梯度 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$，出现了度规系数

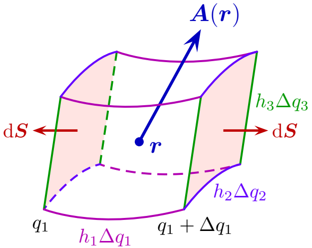
在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中，$h_\rho = h_z = 1$，$h_\phi = \rho$，故

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中，$h_r = 1$，$h_\theta = r$，$h_\phi = r\sin\theta$，故

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

散度



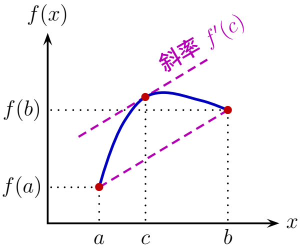
- 其次考虑**矢量场** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 在 $\boldsymbol{r}$ **点**处的**散度**

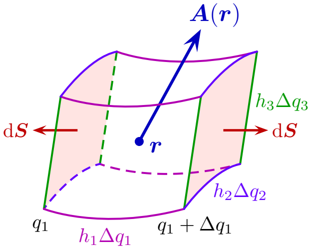
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\equiv\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\partial(\Delta V)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- ΔV 是包含 $\boldsymbol{r}$ 点的**区域**
- $\partial(\Delta V)$ 是 ΔV 的**边界面**，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是其**定向面积元**
- 取 ΔV 为由坐标面 q_1、$q_1+\Delta q_1$、q_2、$q_2+\Delta q_2$、q_3、$q_3+\Delta q_3$ 所围成的**六面体**
- 计算**矢量场** $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$ 在**边界面** $\partial(\Delta V)$ 上的**通量**，得

$$\oint_{\partial(\Delta V)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=[(A_1h_2h_3)_{q_1+\Delta q_1}-(A_1h_2h_3)_{q_1}]\Delta q_2\Delta q_3+\cdots$$

散度





取 ΔV 为由坐标面 q_1、$q_1+\Delta q_1$、q_2、$q_2+\Delta q_2$、q_3、$q_3+\Delta q_3$ 所围成的**六面体**

计算**矢量场** $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$ 在**边界面** $\partial(\Delta V)$ 上的**通量**，得

$$\oint_{\partial(\Delta V)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=[(A_1h_2h_3)_{q_1+\Delta q_1}-(A_1h_2h_3)_{q_1}]\Delta q_2\Delta q_3+\cdots$$
$$=\left.\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial q_1}\right|_{\boldsymbol{r}_1}\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3+\cdots$$

在第二步中，$\boldsymbol{r}_1$ 是 ΔV 内一点，这里用到**微分中值定理**：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 上可导，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

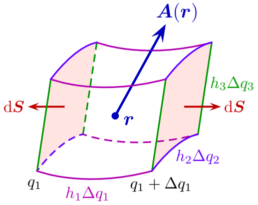
散度的形式

以上表达式只显明写出 q_1 处和 $q_1+\Delta q_1$ 处**两个面**的贡献

补上**其它四个面**的贡献，**通量**表达为

$$\oint_{\partial(\Delta V)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial q_1}\bigg|_{\boldsymbol{r}_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial q_2}\bigg|_{\boldsymbol{r}_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial q_3}\bigg|_{\boldsymbol{r}_3}\right]\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3$$

当 $\Delta V = h_1h_2h_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3 \to 0$ 时，**六面体** ΔV 中的点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 \to \boldsymbol{r}$



于是，$\boldsymbol{r}$ **点**处的**散度**为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\partial(\Delta V)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial q_1}\bigg|_{\boldsymbol{r}_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial q_2}\bigg|_{\boldsymbol{r}_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial q_3}\bigg|_{\boldsymbol{r}_3}\right]$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$$

Laplace 算符的形式

- **Laplace 算符**对 $u(\boldsymbol{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$，令 $\boldsymbol{A} = \nabla u$，则 $A_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial u}{\partial q_i}$
- 代入到 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_3 h_1) + \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2)\right]$，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

Laplace 算符的形式

- Laplace 算符对 $u(\boldsymbol{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u)$，令 $\boldsymbol{A} = \nabla u$，则 $A_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial u}{\partial q_i}$
- 代入到 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1) + \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

- 在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
- 在柱坐标系 (ρ,ϕ,z) 中，$h_\rho = h_z = 1$，$h_\phi = \rho$，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

Laplace 算符的形式

- Laplace 算符对 $u(\boldsymbol{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u)$，令 $\boldsymbol{A} = \nabla u$，则 $A_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial u}{\partial q_i}$
- 代入到 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1) + \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

- 在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
- 在柱坐标系 (ρ,ϕ,z) 中，$h_\rho = h_z = 1$，$h_\phi = \rho$，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Laplace 算符的形式

- Laplace 算符对 $u(\boldsymbol{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u)$，令 $\boldsymbol{A} = \nabla u$，则 $A_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial u}{\partial q_i}$
- 代入到 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1) + \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

- 在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
- 在柱坐标系 (ρ,ϕ,z) 中，$h_\rho = h_z = 1$，$h_\phi = \rho$，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- 在球坐标系 (r,θ,ϕ) 中，$h_r = 1$，$h_\theta = r$，$h_\phi = r\sin\theta$，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\right]$$

Laplace 算符的形式

- **Laplace 算符**对 $u(\boldsymbol{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u)$，令 $\boldsymbol{A} = \nabla u$，则 $A_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial u}{\partial q_i}$

- 代入到 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1) + \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

- 在**直角坐标系**中，**度规系数均为** 1，故 $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

- 在**柱坐标系** (ρ,ϕ,z) 中，$h_\rho = h_z = 1$，$h_\phi = \rho$，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- 在**球坐标系** (r,θ,ϕ) 中，$h_r = 1$，$h_\theta = r$，$h_\phi = r\sin\theta$，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

§2 球坐标系中的分离变量

§2.1 Helmholtz 方程

在三维空间中，前面介绍过的数理方程包括波动方程、输运方程和稳定场方程

首先看齐次的波动方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$$

分离变量，令 $u(\boldsymbol{r},t) = v(\boldsymbol{r})T(t)$，代入得 $v(\boldsymbol{r})T''(t) - a^2 T(t)\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) = 0$

即 $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{\nabla^2 v}{v(\boldsymbol{r})} \equiv -k^2$，其中 k^2 是常数，将它记作 k^2 是物理上的习惯

从而得到 Helmholtz 方程
$$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

和 $T(t)$ 满足的方程
$$T'' + k^2 a^2 T = 0$$

§2 球坐标系中的分离变量

§2.1 Helmholtz 方程

在三维空间中，前面介绍过的数理方程包括波动方程、输运方程和稳定场方程

首先看齐次的波动方程 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$$

分离变量，令 $u(\boldsymbol{r},t) = v(\boldsymbol{r})T(t)$，代入得 $v(\boldsymbol{r})T''(t) - a^2 T(t)\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) = 0$

即 $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{\nabla^2 v}{v(\boldsymbol{r})} \equiv -k^2$，其中 k^2 是常数，将它记作 k^2 是物理上的习惯

从而得到 Helmholtz 方程 $$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

和 $T(t)$ 满足的方程 $$T'' + k^2 a^2 T = 0$$

给 Helmholtz 方程加上适当的边界条件可以构成本征值问题，从而求解出本征值 k^2 和本征函数，合理的边界条件通常导致 $k^2 \geq 0$

从物理上说，如果 $k^2 < 0$，则 k 为虚数，$T'' - |k|^2 a^2 T = 0$，解为 $T(t) = \mathrm{e}^{\pm|k|at}$

这显然不是波动，**不符合**问题的物理背景，由此可推测 $k^2 \geq 0$

齐次的输运方程和稳定场方程

- 其次看**齐次**的**输运方程** $$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = 0$$
- 分离变量，令 $u(\boldsymbol{r},t) = v(\boldsymbol{r})T(t)$，代入得到 **Helmholtz 方程** $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ 和
$$T' + k^2 a^2 T = 0$$
- 对于 **Helmholtz 方程**，**适当**的**边界条件**同样导致 $k^2 \geq 0$
- 从物理上说，如果 $k^2 < 0$，则 $T' - |k|^2 a^2 T = 0$

解为 $T(t) = \mathrm{e}^{|k|^2 a^2 t}$，它**随时间不断增大**
- 这显然**不是**合理的输运行为，由此可推测 $k^2 \geq 0$

齐次的输运方程和稳定场方程

- 其次看齐次的输运方程 $$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = 0$$
- 分离变量，令 $u(\boldsymbol{r}, t) = v(\boldsymbol{r})T(t)$，代入得到 **Helmholtz 方程** $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ 和
$$T' + k^2 a^2 T = 0$$
- 对于 **Helmholtz 方程**，**适当**的**边界条件**同样导致 $k^2 \geq 0$
- 从物理上说，如果 $k^2 < 0$，则 $T' - |k|^2 a^2 T = 0$

解为 $T(t) = \mathrm{e}^{|k|^2 a^2 t}$，它**随时间不断增大**
- 这显然**不是**合理的输运行为，由此可推测 $k^2 \geq 0$
- 再次看齐次的**稳定场方程**，即 **Laplace 方程** $\nabla^2 u = 0$
- 这可以当作 $k = 0$ 时 **Helmholtz 方程**的特殊情况
- 综上所述，三类方程的齐次形式都可以归结为 **Helmholtz 方程**
- 下面以 **Helmholtz 方程**为代表研究**球坐标系**和**柱坐标系**中的**分离变量**

Hermann von Helmholtz
(1821–1894)

§2.2 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量

在**球坐标系**中，将**未知函数**写作 u，**Helmholtz 方程** $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ 的形式是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

令 $u(\boldsymbol{r})=R(r)Y(\theta,\phi)$，代入上式，有

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+k^2RY=0$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2R\right]=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]$$

上式**左边与 θ、ϕ 无关**，**右边与 r 无关**

两边相等，则与 r、θ、ϕ 均无关，即为**常数**

§2.2 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量

在**球坐标系**中，将**未知函数**写作 u，**Helmholtz 方程** $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ 的形式是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + k^2 u = 0$$

令 $u(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$，代入上式，有

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + k^2 RY = 0$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + k^2 r^2 R\right] = -\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] \equiv \lambda$$

上式**左边与** θ、ϕ **无关**，**右边与** r **无关**

两边相等，则与 r、θ、ϕ 均无关，即为**常数**，记作 λ

于是得到**角向方程** $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0$

和**径向方程** $r^2 R'' + 2rR' + (k^2 r^2 - \lambda)R = 0$

求解顺序

- 求解的顺序如下，先由角向边界条件与角向方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y=0$$

- 构成本征值问题，求解 $Y(\theta,\phi)$ 并确定本征值 λ
- 然后，将 λ 代入径向方程

$$r^2R''+2rR'+(k^2r^2-\lambda)R=0$$

- 此时需要分别讨论 **Helmholtz 方程** $(k\neq 0)$ 和 **Laplace 方程** $(k=0)$ 的情况
- 如果 $k\neq 0$，则由径向边界条件和径向方程构成本征值问题，求解 $R(r)$ 并确定本征值 k；此时径向方程是球 **Bessel 方程**，需要用级数法求解
- 如果 $k=0$，则不需要由本征值问题确定 k 的值，且径向方程简化为 **Euler 方程**，很容易求解 $R(r)$

角向方程

- **角向方程** $\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y=0$ 是**偏微分方程**
- 进一步分离变量，令 $Y(\theta,\phi)=H(\theta)\Phi(\phi)$，代入得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{H}{\sin^2\theta}\Phi''+\lambda H\Phi=0$$

- 两边同乘以 $\sin^2\theta$，同除以 $H\Phi$，移项，推出

$$\frac{1}{H}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta\,H\right]=-\frac{\Phi''}{\Phi}$$

- 上式**左边与 ϕ 无关**，**右边与 θ 无关**
- 两边相等，则与 θ、ϕ 均无关，即为**常数**

角向方程

角向方程 $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y=0$ 是偏微分方程

进一步分离变量，令 $Y(\theta,\phi)=H(\theta)\Phi(\phi)$，代入得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{H}{\sin^2\theta}\Phi''+\lambda H\Phi=0$$

两边同乘以 $\sin^2\theta$，同除以 $H\Phi$，移项，推出

$$\frac{1}{H}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta\,H\right]=-\frac{\Phi''}{\Phi}\equiv\mu$$

上式左边与 ϕ 无关，右边与 θ 无关

两边相等，则与 θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 μ，于是得到两个方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)H=0$$

$$\Phi''+\mu\Phi=0$$

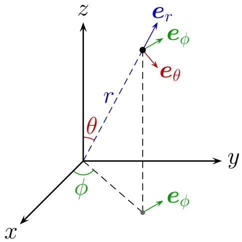
关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

- 现在考虑角向方程的边界条件和相应的本征值问题
- 由于 $(r,\theta,\phi+2\pi)$ 与 (r,θ,ϕ) 表示同一几何点，而物理量在一个几何点的取值应该是确定的，不应该依赖于该点的数学描述，所以应有 $u(r,\theta,\phi+2\pi)=u(r,\theta,\phi)$
- 对于分离变量形式的解，得

$$R(r)H(\theta)\Phi(\phi+2\pi)=R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

- 但 $R(r)H(\theta)$ 不恒为零，得到自然的周期性边界条件

$$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$$



关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

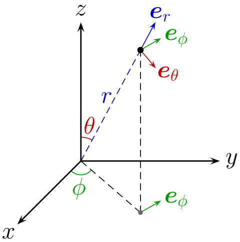
- 现在考虑角向方程的边界条件和相应的本征值问题
- 由于 $(r,\theta,\phi+2\pi)$ 与 (r,θ,ϕ) 表示同一几何点，而物理量在一个几何点的取值应该是确定的，不应该依赖于该点的数学描述，所以应有 $u(r,\theta,\phi+2\pi)=u(r,\theta,\phi)$
- 对于分离变量形式的解，得

$$R(r)H(\theta)\Phi(\phi+2\pi)=R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

- 但 $R(r)H(\theta)$ 不恒为零，得到自然的周期性边界条件

$$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$$

- 它与方程 $\Phi''+\mu\Phi=0$ 构成本征值问题



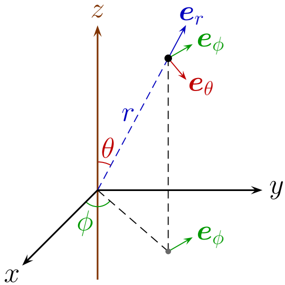
- 在第七章 §5.1 中已经求解了这一本征值问题，得到的本征值和本征函数为

$$\mu=m^2,\quad \Phi(\phi)=\{e^{im\phi},e^{-im\phi}\},\quad m\in\mathbb{N}$$

- 在球坐标系，习惯上将本征函数写成以上指数形式
- 在柱坐标系或平面极坐标系，习惯写成等价的三角形式 $\Phi(\phi)=\{\cos m\phi,\sin m\phi\}$

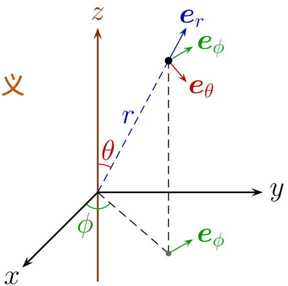
θ 方向的自然边界条件

- 接下来考虑 θ 方向的边界条件
- 现在 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)\Phi(\phi) = H(\theta)\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\phi}$
- 注意到整个 z 轴 $(\theta = 0, \pi)$ 都是球坐标系的奇点



θ 方向的自然边界条件

- 接下来考虑 θ 方向的边界条件
- 现在 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)\Phi(\phi) = H(\theta)\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\phi}$
- 注意到整个 z 轴 $(\theta = 0, \pi)$ 都是球坐标系的奇点
- 如果 $m \neq 0$，应该要求 $H(0) = H(\pi) = 0$
- 否则当 $\theta = 0, \pi$ 时，ϕ 没有定义导致 $Y(\theta,\phi)$ 也没有定义
- 如果 $m = 0$，则 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)$，没有类似的问题
- 但 $H(0)$ 和 $H(\pi)$ 应该有限，即 $|H(0)|, |H(\pi)| < \infty$
- 原则上，物理量处处都应该有限
- 不过，微分方程的解在坐标系奇点很容易出现奇性
- 所以对物理量在这些地方的有限性需要特别强调
- 上述两个边界条件也属于自然边界条件



连带 Legendre 方程

将本征值 $\mu = m^2$ 代回关于 $H(\theta)$ 的微分方程，得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)H=0$$

令 $x=\cos\theta$，$H(\theta)=P(x)$，由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 推出

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)H=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P$$

连带 Legendre 方程

将本征值 $\mu = m^2$ 代回关于 $H(\theta)$ 的微分方程，得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)H=0$$

令 $x=\cos\theta$，$H(\theta)=P(x)$，由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 推出

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)H=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P$$

利用 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-x^2$，得到本征值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P=0\\ P(\pm1)=0\ (m\neq0)\ \text{或}\ |P(\pm1)|<\infty\ (m=0)\end{cases}$$

这里关于 $P(x)$ 的微分方程称为连带 Legendre 方程

自然边界条件来自 $H(0)=H(\pi)=0\ (m\neq0)$ 或 $|H(0)|,|H(\pi)|<\infty\ (m=0)$

Legendre 方程

- 对于**轴对称问题**，取**对称轴**为**球坐标系**的**极轴**
- 则**解** $u(r,\theta,\phi)$ **与** ϕ **无关**，具有**绕** z **轴的旋转对称性**
- 此时只需考虑 $m=0$（即 $\mathrm{e}^{\pm im\phi}=1$），**本征值问题简化**为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda P=0 \\ |P(\pm 1)|<\infty \end{cases}$$

- 即使问题**没有**轴对称性，这也是**上述本征值问题**在 $m=0$ 时的**特殊情况**
- 总之，这是**最重要**的一种情况

Legendre 方程

- 对于**轴对称问题**，取**对称轴**为**球坐标系**的**极轴**
- 则**解** $u(r,\theta,\phi)$ **与** ϕ **无关**，具有**绕** z **轴的旋转对称性**
- 此时只需考虑 $m=0$（即 $\mathrm{e}^{\pm im\phi}=1$），**本征值问题简化**为

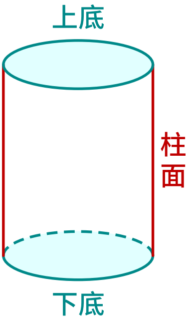
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda P=0 \\ |P(\pm 1)|<\infty \end{cases}$$

Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

- 即使问题**没有**轴对称性，这也是**上述本征值问题**在 $m=0$ 时的**特殊情况**
- 总之，这是**最重要**的一种情况
- 这里 $P(x)$ 的微分方程称为 **Legendre 方程**，在**第十章 §2** 中将用**级数法**求解它
- 至于**连带 Legendre 方程**，则可以通过**适当的变换**将它与 **Legendre 方程**联系起来，求解过程将在**第十一章 §2.1** 中介绍

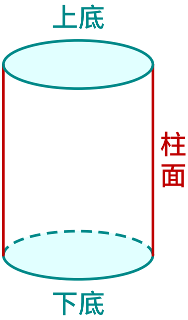
§3 柱坐标系中的分离变量

- 在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中对 Helmholtz 方程分离变量，求解区域涉及许多不同情况
- ρ 的取值范围可以是有界或半无界，z 的取值范围可以是有界、无界或半无界
- 对于确定的区域，边界条件的情况还可以不同
- 比如，对于有限的圆柱区域，齐次边界条件可以出现在柱面，也可以出现在上下底



§3 柱坐标系中的分离变量

- 在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中对 Helmholtz 方程分离变量，求解区域涉及许多不同情况
- ρ 的取值范围可以是有界或半无界，z 的取值范围可以是有界、无界或半无界
- 对于确定的区域，边界条件的情况还可以不同
- 比如，对于有限的圆柱区域，齐次边界条件可以出现在柱面，也可以出现在上下底



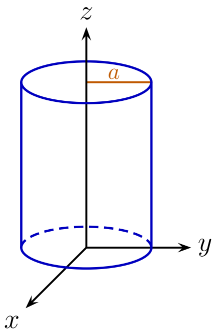
- 在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中，角向坐标的取值范围通常都固定为 $0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \phi \leq 2\pi$
- 而边界条件就是前面讨论的自然边界条件
- 所以柱坐标系的情况比球坐标系要**复杂**
- 在柱坐标系中求解数理方程的定解问题，最好是对每个具体问题都从分离变量开始做，这样不容易出错

圆柱内 Laplace 方程定解问题

本节以圆柱内的 Laplace 方程定解问题为例进行分离变量

假定在 $\rho = a$ 处有齐次边界条件，z 的取值范围可以是有界的，即 $0 \le z \le h$，也可以是半无界的，即 $0 \le z < +\infty$，暂时不作明确限制，具体写出来是

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a) \\ \left(\alpha\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \beta u\right)\Bigg|_{\rho=a} = 0 \quad (\alpha \ge 0,\ \ \beta \ge 0,\ \ \alpha,\beta\ \text{不全为}\ 0) \end{cases}$$

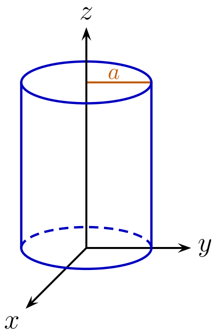


圆柱内 Laplace 方程定解问题

本节以**圆柱内**的 **Laplace 方程**定解问题为例进行**分离变量**

假定在 $\rho = a$ 处有**齐次边界条件**，z **的取值范围**可以是**有界**的，即 $0 \le z \le h$，也可以是**半无界**的，即 $0 \le z < +\infty$，暂时不作明确限制，具体写出来是

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a) \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u\right)\right|_{\rho=a} = 0 \quad (\alpha \ge 0,\ \ \beta \ge 0,\ \ \alpha, \beta \text{ 不全为 } 0) \end{cases}$$



由于 z 的取值范围并未具体指明，所以**定解条件不完整**

不过，这对**分离变量**没有影响

令 $u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$，代入 **Laplace 方程**，得

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \frac{RZ}{\rho^2}\Phi'' + R\Phi Z'' = 0$$

分离变量

- 两边同乘以 ρ^2，再除以 $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$，移项，得

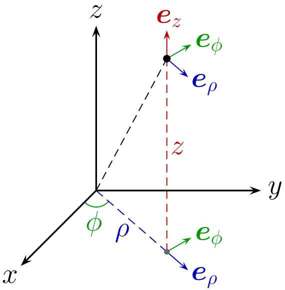
$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}$$

- 上式**左边与 ϕ 无关**，**右边与 ρ、z 无关**
- 两边相等，则与 ρ、ϕ、z 均无关，即为**常数**

分离变量

两边同乘以 ρ^2，再除以 $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$，移项，得

$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}\equiv\mu$$



上式**左边与 ϕ 无关**，**右边与 ρ、z 无关**

两边相等，则与 ρ、ϕ、z 均无关，即为**常数**，记作 μ

于是得到**方程**
$$\frac{1}{R\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)-\frac{\mu}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}$$

和**角向方程**
$$\Phi''+\mu\Phi=0$$

先考虑**角向方程**的**边界条件**和**本征值问题**

由于 $(\rho,\phi+2\pi,z)$ 与 (ρ,ϕ,z) 表示**同一几何点**，与上节讨论类似，有

$$u(\rho,\phi+2\pi,z)=u(\rho,\phi,z),\quad R(\rho)\Phi(\phi+2\pi)Z(z)=R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

但 $R(\rho)Z(z)$ 不恒为零，故得**自然**的**周期性边界条件** $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$

常微分方程

🏇 这里将本征值问题 $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$ 的本征值和本征函数写作

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

🏍 将 $\mu = m^2$ 代入另一个方程，得

$$\frac{1}{R\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z}$$

🏎 上式左边与 z 无关，右边与 ρ 无关

🏁 两边相等，则与 ρ、z 均无关，即为常数

常微分方程

🏇 这里将本征值问题 $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$ 的本征值和本征函数写作

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

🏍 将 $\mu = m^2$ 代入另一个方程，得

$$\frac{1}{R\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda$$

🏎 上式左边与 z 无关，右边与 ρ 无关

🏁 两边相等，则与 ρ、z 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$，于是得到两个方程

$$Z'' - \lambda Z = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

ρ 方向的边界条件

- 分离变量后，$\rho = a$ 处的边界条件变成

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u\right)\bigg|_{\rho=a} = [\alpha R'(a) + \beta R(a)]\Phi(\phi)Z(z) = 0$$

- 即

$$\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$$

- 现在，解的形式为 $u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\{\cos m\phi, \sin m\phi\}Z(z)$
- 对于柱坐标系，$\rho = 0$ 处 ϕ 没有定义，应该有自然边界条件

$$R(0) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |R(0)| < \infty \ (m = 0)$$

- 这两个边界条件与方程 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0$ 构成本征值问题
- 它属于第十章 §5 讨论的 Sturm-Liouville 本征值问题，那里将证明本征值 $\lambda \geq 0$

Bessel 方程

💙 **如果** $\lambda > 0$，令 $x = \sqrt{\lambda}\rho$，$R(\rho) = y(x)$

🩱 利用 $\rho = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，将 $R(\rho)$ **的微分方程**化为

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = \frac{\sqrt{\lambda}}{x}\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \lambda\frac{m^2}{x^2}\right)y$$

$$= \lambda\left[\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y\right]$$

Bessel 方程

如果 $\lambda > 0$，令 $x = \sqrt{\lambda}\rho$，$R(\rho) = y(x)$

利用 $\rho = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，将 $R(\rho)$ **的微分方程**化为

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = \frac{\sqrt{\lambda}}{x}\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \lambda\frac{m^2}{x^2}\right)y$$

$$= \lambda\left[\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y\right]$$

即得
$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

或写作
$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

这是 m **阶 Bessel 方程**的标准形式

第十章 §4 将用**级数法**求解 **Bessel 方程**

Friedrich Bessel
(1784–1846)

$\lambda > 0$ 时 $Z(z)$ 的解

本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \\ \alpha R'(a)+\beta R(a)=0 \\ R(0)=0\ (m\neq 0) \quad \text{或} \quad |R(0)|<\infty\ (m=0) \end{cases}$$

的具体求解将在**第十二章 §2** 讨论

确定**本征值** λ 之后，将它代入**方程** $Z''-\lambda Z=0$，求得解为

$$Z(z)=\left\{\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z},\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}z}\right\}$$

对于 z **有界** $(0\leq z\leq h)$ 的情况，解取 $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z}$ 和 $\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}z}$ 的**线性组合**

对于 z **半无界** $(0\leq z<+\infty)$ 的情况，解只能取 $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z}$

$\lambda = 0$ 的情况

💚 如果 $\lambda = 0$，$R(\rho)$ 的微分方程化为

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2}R = R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{m^2}{\rho^2}R = \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R)$$

🚁 即得 **Euler 方程** $\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$

🪂 已经在**第七章 §5.1** 求解过这个方程，得到的解是

$$R(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (\text{当 } m \neq 0 \text{ 时}) \qquad \text{或} \qquad R(\rho) = \{1, \ln\rho\} \quad (\text{当 } m = 0 \text{ 时})$$

1️⃣ **当 $m \neq 0$ 时**，只有 $R(\rho) = \rho^m$ 满足**自然边界条件** $R(0) = 0$

🏹 $\rho = a$ **处边界条件** $0 = \alpha R'(a) + \beta R(a) = m\alpha a^{m-1} + \beta a^m = a^{m-1}(m\alpha + \beta a)$ 意味着 $m\alpha + \beta a = 0$

🥌 由于 $m > 0$、$a > 0$，而 α **和** β **均非负且不同时为零**，**这个边界条件不能满足**

🥏 **此时 $\lambda = 0$ 不是本征值**

$\lambda = 0$ 为本征值的情况

2 当 $m = 0$ 时，只有 $R(\rho) = 1$ 满足自然边界条件 $|R(0)| < \infty$

- $\rho = a$ 处边界条件 $\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$ 化为 $\beta = 0$
- 如果 $\rho = a$ 处的边界条件是第二类齐次边界条件 $R'(a) = 0$，就可以满足

$\lambda = 0$ 为本征值的情况

2️⃣ **当** $m = 0$ **时**，只有 $R(\rho) = 1$ 满足**自然边界条件** $|R(0)| < \infty$

⚾ $\rho = a$ **处边界条件** $\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$ 化为 $\beta = 0$

🥎 如果 $\rho = a$ **处**的边界条件是**第二类齐次边界条件** $R'(a) = 0$，就**可以满足**

🔀 综上，仅当 $\rho = a$ **处**为**第二类齐次边界条件**且 $m = 0$ 时，$\lambda = 0$ 才是一个**本征值**

🎳 对应于 $\lambda = 0$，$Z(z)$ **的微分方程** $Z'' - \lambda Z = 0$ 化为 $Z'' = 0$，解为

$$Z(z) = \{1, z\}$$

🏓 对于 z **有界** $(0 \le z \le h)$ 的情况，解取 1 和 z 的**线性组合**

🏸 对于 z **半无界** $(0 \le z < +\infty)$ 的情况，解只能取 1

一般解

- 各变量的常微分方程都解出以后，可以写出 $u(\rho, \phi, z)$ 的**一般解**
- 一般解中的**任意常数**由 z **方向的边界条件**决定
- 对于 z **有界** $(0 \le z \le h)$ 的情况，**下底** $z = 0$ 和**上底** $z = h$ 处各有一个已知的边界条件，它们共同确定一般解中的任意常数
- 对于 z **半无界** $(0 \le z \le +\infty)$ 的情况，**下底** $z = 0$ 处有一个已知的边界条件，它确定了一般解中的任意常数

一般解

- 各变量的常微分方程都解出以后，可以写出 $u(\rho, \phi, z)$ 的**一般解**
- 一般解中的**任意常数**由 z **方向的边界条件**决定
- 对于 z **有界** $(0 \leq z \leq h)$ 的情况，**下底** $z = 0$ 和**上底** $z = h$ 处各有一个已知的边界条件，它们共同确定一般解中的任意常数
- 对于 z **半无界** $(0 \leq z \leq +\infty)$ 的情况，**下底** $z = 0$ 处有一个已知的边界条件，它确定了一般解中的任意常数
- 以上讨论表明，需要解决的**关键问题**是求解**分离变量**过程中出现的**常微分方程**及其**本征值问题**
- 有些常微分方程是**熟悉**的，其解为**初等函数**
- 另一些则**没有现成的解**，需要加以研究
- **级数法**是一种常用的解法，将在**下一章**仔细讨论