

# 数学物理方法

## 第七章 分离变量法

### 第 4 节和第 5 节

余钊焕

中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>




更新日期：2024 年 2 月 9 日

## §4 矩形区域上的稳定场方程

 前面几节研究了一维波动或热传导方程定解问题的求解，它们都涉及两个自变量


 平面上的稳定场方程定解问题也涉及两个自变量，因此与上述问题相似

 但稳定场方程的定解问题只有边界条件，没有初始条件，其解法有一些不同之处

 本节求解矩形区域上的两个稳定场问题，以加深对

分离变量法的了解

 矩形区域是平面上最简单的区域

 下面先讨论矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

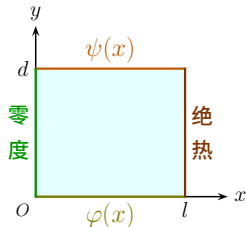


Pierre-Simon Laplace  
(1749–1827)

# 矩形区域上 Laplace 方程的定解问题

考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布  $u(x, y)$  的问题

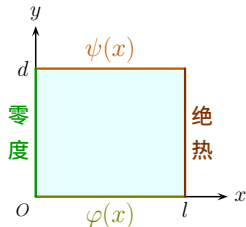
矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知

那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到

# 矩形区域上 Laplace 方程的定解问题

考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布  $u(x, y)$  的问题

矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知

那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到


现在尝试寻找  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  形式的特解，将它代入 Laplace 方程，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)$$

故  $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ ，左边与  $y$  无关，右边与  $x$  无关，必为常数，记作  $-\lambda$




# 本征值问题


 由此得到两个方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

  $x = 0$  和  $x = l$  处的边界条件给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$


 从而得到本征值问题 
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

# 本征值问题

 由此得到两个方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

  $x = 0$  和  $x = l$  处的边界条件给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

 从而得到本征值问题 
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

**1** 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

 其中  $C, D$  是任意常数, 有  $C = X(0) = 0$

 从而  $X'(l) = \mu D \cosh \mu l = 0$ , 但  $\cosh \mu l \geq 1$  且  $\mu > 0$ , 故  $D = 0$

 于是得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ , 因而  $\lambda < 0$  不是本征值

# 本征值问题

由此得到两个方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

$x = 0$  和  $x = l$  处的边界条件给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题 
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中  $C, D$  是任意常数, 有  $C = X(0) = 0$

从而  $X'(l) = \mu D \cosh \mu l = 0$ , 但  $\cosh \mu l \geq 1$  且  $\mu > 0$ , 故  $D = 0$

于是得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ , 因而  $\lambda < 0$  不是本征值

2 如果  $\lambda = 0$ , 则解为  $X(x) = Cx + D$ , 其中  $C, D$  是任意常数

有  $D = X(0) = 0$ ,  $C = X'(l) = 0$ , 得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ ,  $\lambda = 0$  不是本征值

# 本征值和本征函数

3 如果  $\lambda > 0$ ，令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

🍰 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$ ，从而  $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

🍦 为了得到非平庸解，必须使  $\cos \mu l = 0$ ，如此则  $D$  可任意

# 本征值和本征函数

3 如果  $\lambda > 0$ ，令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

🍰 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$ ，从而  $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

🍦 为了得到非平庸解，必须使  $\cos \mu l = 0$ ，如此则  $D$  可任意

🍽️ 因此  $\cos \mu l = 0$  是决定本征值的方程，它的解为  $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

🍷 从而  $\mu_n l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  是余弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

🍰 其中已取  $D = 1$

# 本征值和本征函数

3 如果  $\lambda > 0$ ，令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

🍰 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$ ，从而  $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

🍰 为了得到非平庸解，必须使  $\cos \mu l = 0$ ，如此则  $D$  可任意

🍰 因此  $\cos \mu l = 0$  是决定本征值的方程，它的解为  $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

🍰 从而  $\mu_n l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  是余弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

🍰 其中已取  $D = 1$

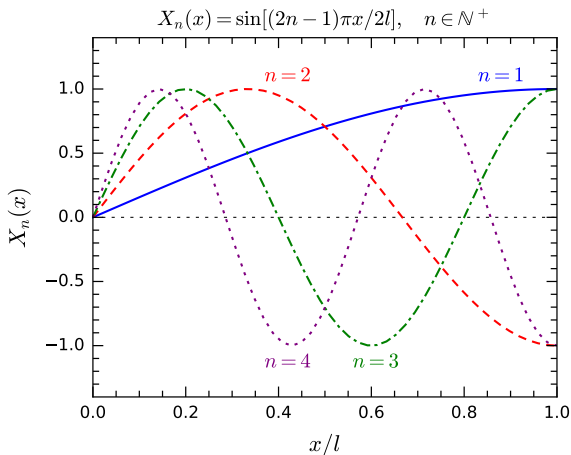
🔍 注 如果将上面的  $\mu_n$  写成  $\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$ ，则应该取  $n \in \mathbb{N}$

🔍 求出本征函数后，最好验证它是否确实满足边界条件，避免计算错误或抄写错误


🔍 比如，这里如果将本征函数误写成  $\cos \mu_n x$ ，则通过上述验证可以立即发现错误


## 本征函数图像

$$\lambda_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$



求解  $Y(y)$ 

 这里本征函数族  $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$  在区间  $[0, l]$  上的正交完备性由 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论 (第十章 §5) 得到保证

 正交性也可以直接验证, 利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$



求解  $Y(y)$ 

📦 这里本征函数族  $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$  在区间  $[0, l]$  上的正交完备性由 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论 (第十章 §5) 得到保证

🍪 正交性也可以直接验证, 利用积化和差公式容易证明


$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$


🍄 将本征值  $\lambda_n = \mu_n^2$  代入  $Y(y)$  满足的方程, 得  $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$

🍞 它的两个线性独立解可以取为  $\{\exp(\mu_n y), \exp(-\mu_n y)\}$


🍌 因  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ ,  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ , 也可取为  $\{\cosh \mu_n y, \sinh \mu_n y\}$


求解  $Y(y)$ 


 这里**本征函数族**  $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$  在**区间**  $[0, l]$  上的**正交完备性**由 **Strum-Liouville 本征值问题的一般结论** (第十章 §5) 得到保证


 **正交性**也可以直接验证, 利用**积化和差公式**容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$


 将**本征值**  $\lambda_n = \mu_n^2$  代入  $Y(y)$  满足的方程, 得  $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$

 它的两个线性独立解可以取为  $\{\exp(\mu_n y), \exp(-\mu_n y)\}$

 因  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ ,  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ , 也可取为  $\{\cosh \mu_n y, \sinh \mu_n y\}$

 由**双曲函数减法公式**得  $\sinh[\mu_n(d-y)] = \sinh \mu_n d \cosh \mu_n y - \cosh \mu_n d \sinh \mu_n y$

 为了下面计算方便, 将**两个线性独立解**等价地取为  $\{\sinh[\mu_n(d-y)], \sinh \mu_n y\}$

 从而将方程  $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$  的**通解**写作

$$Y_n(y) = A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad A_n \text{ 和 } B_n \text{ 是任意常数}$$

# 定解问题的解

 于是, 满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sinh[\mu_n(d - y)] + B_n \sinh \mu_n y\} \sin \mu_n x$$

 将上式代入  $y$  方向的两个边界条件, 得

$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \psi(x)$$


# 定解问题的解


 于是, 满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sinh[\mu_n(d - y)] + B_n \sinh \mu_n y\} \sin \mu_n x$$


 将上式代入  $y$  方向的两个边界条件, 得


$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \psi(x)$$

 由于本征函数族的正交完备性, 适当的系数  $A_n$  和  $B_n$  可使以上两式成立

 利用  $\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}$ , 推出

$$A_n = \frac{2}{l \sinh \mu_n d} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_n x dx, \quad B_n = \frac{2}{l \sinh \mu_n d} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_n x dx$$

 给定  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的形式, 可以求得系数  $A_n$  和  $B_n$

 将它们代回一般解, 就得到定解问题的解


# 讨论

- 🍌 在上述**稳定场方程**定解问题中，**一部分边界条件** (齐次) 用于构成**本征值问题**
- 🍌 **另一部分边界条件** (齐次或非齐次) 用于确定**一般解**中的**系数**
- 🍌 这是与**波动**或**热传导**问题的不同之处，后两者用**初始条件**确定**系数**
- 🍌 所以，就 **Laplace 方程**而言，**不必**要求**所有**的边界条件都是**齐次**的
- 🍌 否则就只有**平庸解**了


# 矩形区域上 Poisson 方程的定解问题


 下面再考虑全部边界条件都非齐次的 Poisson 方程定解问题


$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = \mu(y), \quad u|_{x=l} = \nu(y) & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

 **方法一** 对于这一定解问题，可令

$$u(x, y) = v(x, y) + u_0(x, y)$$

 并取  $u_0(x, y) = \mu(y) + \frac{x}{l}[\nu(y) - \mu(y)]$

 从而  $v(x, y)$  在  $x=0$  和  $x=l$  处满足齐次的边界条件

 虽然方程仍是非齐次的，但可以用本征函数展开法求解



Siméon Denis Poisson  
(1781–1840)

## 分为两个定解问题

♥ **方法二** 由于**稳定场方程**的所有**定解条件**都是**边界条件**，更简单的方法是令  $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ ，将上述定解问题化为**两个问题**来求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u_2|_{x=0} = \mu(y), \quad u_2|_{x=l} = \nu(y) & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=d} = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$




$u_1(x, y)$  的定解问题可以用**本征函数展开法**求解




$u_2(x, y)$  的定解问题可以直接用**分离变量法**求出一**般解**，再用**边界条件**确定**系数**

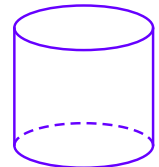
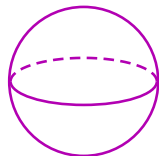
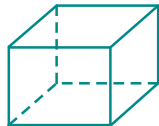
## §5 平面极坐标系中的稳定场方程

 **分离变量法**是一种比较具有**普遍性**的方法，可用于求解**多个自变量**的**偏微分方程**定解问题，如**二维**、**三维空间**中各类方程的定解问题

 **分离变量法能否成功**，主要取决于**边界的形状**


 在**三维空间**，比较容易处理的是**长方体**、**球形**和**圆柱**区域

 它们的**边界**分别是**直角坐标系**、**球坐标系**、**柱坐标系**的**坐标面**







## §5 平面极坐标系中的稳定场方程

 **分离变量法**是一种比较具有**普遍性**的方法，可用于求解**多个自变量**的偏微分方程定解问题，如**二维**、**三维空间**中各类方程的定解问题

 **分离变量法能否成功**，主要取决于**边界的形状**

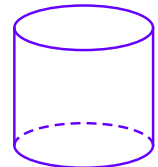
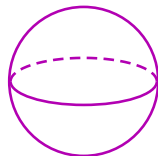
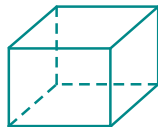
 在**三维空间**，比较容易处理的是**长方体**、**球形**和**圆柱**区域

 它们的**边界**分别是**直角坐标系**、**球坐标系**、**柱坐标系**的**坐标面**


 根据边界的形状，在求解时应该采用**相应的曲线坐标系**

 比如，对**球形区域**上的定解问题，就应该采用**球坐标系**


 如果采用**直角坐标系**，则**无法**对边界条件分离变量




## §5 平面极坐标系中的稳定场方程


 **分离变量法**是一种比较具有**普遍性**的方法，可用于求解**多个自变量**的**偏微分方程**定解问题，如**二维**、**三维空间**中各类方程的定解问题

 **分离变量法能否成功**，主要取决于**边界的形状**


 在**三维空间**，比较容易处理的是**长方体**、**球形**和**圆柱**区域


 它们的**边界**分别是**直角坐标系**、**球坐标系**、**柱坐标系**的**坐标面**


 根据边界的形状，在求解时应该采用**相应的曲线坐标系**

 比如，对**球形区域**上的定解问题，就应该采用**球坐标系**

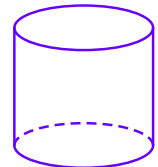
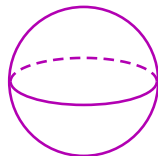
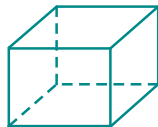
 如果采用**直角坐标系**，则**无法**对边界条件分离变量

 **分离变量**成功之后，需要求解**常微分方程**及其**本征值问题**

 前面几节遇到的常微分方程的解都是**初等函数**，较容易处理

 然而，在更多问题中，出现的微分方程不是我们所熟悉的，其解**并不是初等函数**

 即使是**弦振动**问题，如果弦的**线密度不是常数**，那么**本征值问题**就**困难**得多



# 平面极坐标系



对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂



如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究



所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解



后面将对一些特殊函数作系统的介绍

# 平面极坐标系



对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂



如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究



所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解



后面将对一些特殊函数作系统的介绍



对于**平面区域**上的问题，如果边界涉及**圆弧**，比如**圆内**、**圆外**或**扇形区域**上的定解问题，那么显然应该采用**平面极坐标系**



在**平面极坐标系**中求解**波动**或**热传导**方程，也会涉及**特殊函数**



但**稳定场方程**的求解则只需用到**初等函数**



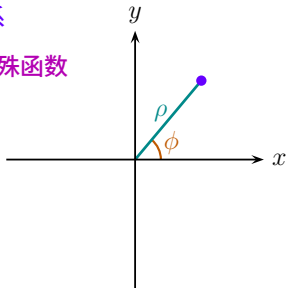
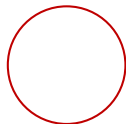
这可能是**曲线坐标系**中**最简单**的问题了



这一问题涉及**两个自变量**  $\rho$  和  $\phi$ ，与前面几节类似



但边界条件完全不同，方程的形式也有新的特点



## §5.1 一般解



在平面极坐标系中，Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$



其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  通过坐标变换  $x = \rho \cos \phi$  和  $y = \rho \sin \phi$  得到



这种方法思路简单，但计算较为繁琐，在第九章中将会介绍其它方法

## §5.1 一般解



在平面极坐标系中, Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$



其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  通过坐标变换  $x = \rho \cos \phi$  和  $y = \rho \sin \phi$  得到



这种方法思路简单, 但计算较为繁琐, 在第九章中将会介绍其它方法



这里暂时不给定定解条件, 先求 Laplace 方程的一般解



接下来的求解假定  $\phi$  的取值不受限制, 因此下面得到的一般解不适用于扇形区域



现在尝试寻找形式为  $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  的特解, 将它代入 Laplace 方程, 有

$$0 = \nabla^2 u = R''(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)\Phi''(\phi)$$



整理得  $\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} \equiv \lambda$ , 其中  $\lambda$  是常数

# 自然的周期性边界条件

🌹 从而得到两个方程  $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$  和  $\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0$

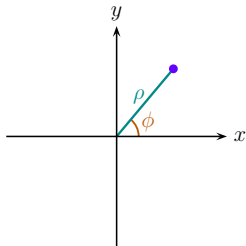
🌻 在直角坐标系中，坐标与几何点是一一对应的，但曲线坐标系却往往不是这样

🌸 在平面极坐标系中，坐标  $(\rho, \phi)$  与  $(\rho, \phi + 2\pi)$  代表同一个几何点

🌼 一个物理量在一个确定的几何点应该具有确定的取值

🌺 这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$



# 自然的周期性边界条件

🌹 从而得到两个方程  $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$  和  $\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0$

🌻 在直角坐标系中，坐标与几何点是一一对应的，但曲线坐标系却往往不是这样

🌸 在平面极坐标系中，坐标  $(\rho, \phi)$  与  $(\rho, \phi + 2\pi)$  代表同一个几何点

🌺 一个物理量在一个确定的几何点应该具有确定的取值

🌷 这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$

🌾 将  $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  代入，得  $R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\phi)$

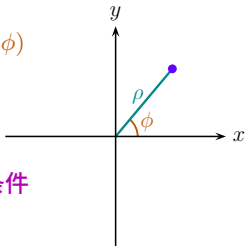
🌽 但  $R(\rho)$  不恒为零，故

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

🥥 这是由物理量的单值性和曲线坐标的特性导出的一个边界条件

🥔 它是一种自然边界条件，自然边界条件还有其它形式

🥜 同时，它也是一种周期性边界条件





# 求解本征值问题

🌴 现在求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题 
$$\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$$

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$

🥥 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数, 代入周期性边界条件, 得

$$Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi} + De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi} = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$$

👉  $C(e^{2\pi\mu} - 1)e^{\mu\phi} + D(e^{-2\pi\mu} - 1)e^{-\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= \mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm\mu\phi})'' &= \mu^2e^{\pm\mu\phi} \end{aligned}$$

🍈 上式必须对所有  $\phi$  值成立, 故  $C(e^{2\pi\mu} - 1) = 0$ , 且  $D(e^{-2\pi\mu} - 1) = 0$

🍉 但  $\mu > 0$ , 有  $e^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$ , 从而  $C = D = 0$

🍌 于是得到平庸解  $\Phi(\phi) \equiv 0$ , 因而  $\lambda < 0$  不是本征值

# 求解本征值问题

🌴 现在求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题 
$$\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$$

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$

🥥 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数, 代入周期性边界条件, 得

$$Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi} + De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi} = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$$

👉  $C(e^{2\pi\mu} - 1)e^{\mu\phi} + D(e^{-2\pi\mu} - 1)e^{-\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= \mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm\mu\phi})'' &= \mu^2e^{\pm\mu\phi} \end{aligned}$$

🍈 上式必须对所有  $\phi$  值成立, 故  $C(e^{2\pi\mu} - 1) = 0$ , 且  $D(e^{-2\pi\mu} - 1) = 0$

🍉 但  $\mu > 0$ , 有  $e^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$ , 从而  $C = D = 0$

🍌 于是得到平庸解  $\Phi(\phi) \equiv 0$ , 因而  $\lambda < 0$  不是本征值

2 如果  $\lambda = 0$ , 则解为  $\Phi(x) = C + D\phi$ , 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数

🍊 代入周期性边界条件, 得  $C + D(\phi + 2\pi) = C + D\phi$ , 即  $2\pi D = 0$

🍊 故  $D = 0$ , 而  $C$  可任意, 求得本征值  $\lambda_0 = 0$ , 本征函数  $\Phi_0(\phi) = 1$

🍋 注意这个解不能遗漏, 否则本征函数族将是不完备的


## 继续求解本征值问题

 继续求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题 
$$\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$$


**3** 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$


 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数, 代入周期性边界条件, 得

$$Ce^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + De^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

  $C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm i\mu\phi})'' &= -\mu^2e^{\pm i\mu\phi} \end{aligned}$$

 上式必须对所有  $\phi$  值成立, 故  $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$ , 且  $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$

 后面一式两边乘以  $-e^{2i\pi\mu}$ , 得  $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

## 继续求解本征值问题

🌳 继续求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题 
$$\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$$

3 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$

🍏 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数, 代入周期性边界条件, 得

$$Ce^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + De^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

👉  $C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$

🍎 上式必须对所有  $\phi$  值成立, 故  $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$ , 且  $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$

🍏 后面一式两边乘以  $-e^{2i\pi\mu}$ , 得  $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

🍌 如果  $e^{2i\pi\mu} - 1 \neq 0$ , 则  $C = D = 0$ , 只得到平庸解

🍑 为得到非平庸解, 须要求  $e^{2i\pi\mu} = 1$ , 而  $C$ 、 $D$  均可任意


🍓 因此  $e^{2i\pi\mu} = 1$  是决定本征值的方程, 它的解为  $\mu = m$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

🍇 得到本征值  $\lambda_m = m^2$  和本征函数  $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ , 其中  $m \in \mathbb{N}^+$


$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm i\mu\phi})'' &= -\mu^2e^{\pm i\mu\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos m\phi &= \frac{e^{im\phi} + e^{-im\phi}}{2} \\ \sin m\phi &= \frac{e^{im\phi} - e^{-im\phi}}{2i} \end{aligned}$$

# 简并

 现在，本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) 对应于两个独立的本征函数  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$

 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

 独立本征函数的个数称为简并度，这里简并度为 2

# 简并

🌲 现在，本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) 对应于两个独立的本征函数  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$

🍇 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

🍒 独立本征函数的个数称为简并度，这里简并度为 2

🔄 注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时，也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数，结果是一样的

➡ 但容易发现，在目前的周期性边界条件下，用指数形式更加方便

# 简并

🌲 现在，本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) 对应于两个独立的本征函数  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$

🍇 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

🍒 独立本征函数的个数称为简并度，这里简并度为 2

🔄 注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时，也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数，结果是一样的

➡ 但容易发现，在目前的周期性边界条件下，用指数形式更加方便

🥕 如果对  $\lambda_m = m^2$  和  $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$  取  $m = 0$ ，会得到  $\lambda_0 = 0$  和  $\Phi_0(\phi) = \{1, 0\}$ ，忽略平庸解  $\Phi(\phi) \equiv 0$ ，则与第 2 种情况结果相同

🌶️ 因此，可以把所有的本征值和本征函数统一写成

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

🥒 但是应该注意，在上面的求解中， $m = 0$  和  $m \neq 0$  两种情况需要分开讨论

🍆 而且  $m = 0$  时简并度为 1， $m \neq 0$  时简并度为 2

🍌 这组本征函数族正是标准 Fourier 展开的基，在区间  $[0, 2\pi]$  上是正交完备的

求解  $R(\rho)$ 

🌱 将本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) 代入  $R(\rho)$  的常微分方程, 得

$$\rho^2 R_m''(\rho) + \rho R_m'(\rho) - m^2 R_m(\rho) = 0$$

🍃 这是高等数学课上学过的 Euler 方程, 特点是每一项中自变量的幂次与未知函数导数的阶相同

🥦 它虽然不是常系数的微分方程, 但很容易求解

🧄 令  $\rho = e^t$ , 则  $t = \ln \rho$ ,  $\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\rho}$ , 有  $\rho \frac{dR_m}{d\rho} = \rho \frac{dt}{d\rho} \frac{dR_m}{dt} = \frac{dR_m}{dt}$ , 故

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m}{d^2 \rho} + \rho \frac{dR_m}{d\rho} = \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR_m}{d\rho} \right) = \rho \frac{dt}{d\rho} \frac{d}{dt} \frac{dR_m}{dt} = \frac{d^2 R_m}{dt^2}$$

🍎 从而将  $R_m$  的方程化为常系数微分方程  $\frac{d^2 R_m}{dt^2} - m^2 R_m = 0$ , 它的解是


$$R_m = \{e^{mt}, e^{-mt}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0 = \{1, t\} \quad (m = 0)$$




Leonhard Euler  
(1707–1783)




# 一般解

 根据  $\rho = e^t$  将解中的自变量变换回  $\rho$ , 得

$$R_m(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0(\rho) = \{1, \ln \rho\} \quad (m = 0)$$

 再结合

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

 推出 Laplace 方程  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$  的一般解为

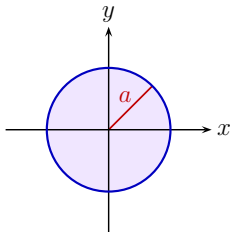
$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) = & A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) \end{aligned}$$

 其中系数  $A_m$  和  $B_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) 是常数, 可以通过边界条件确定

## §5.2 用边界条件确定系数


 考虑圆内的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$




 其中  $a$  是圆的半径

 物理量应该取有限值，而一般解中的  $\ln \rho$  和  $\rho^{-m}$  在  $\rho = 0$  处有奇性，应该舍弃

 故  $B_0 = 0$ ,  $C_m = D_m = 0$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

 从而一般解简化为


$$u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{a} \right)^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$


 这里为了下面计算方便，用  $\left( \frac{\rho}{a} \right)^m$  代替原来的  $\rho^m$

# 圆内问题的解

 将解式代入边界条件  $u|_{\rho=a} = F(\phi)$ ，得


$$u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) = F(\phi)$$

 由于本征函数族的完备性，只要适当选取系数，上式总可以得到满足


 本征函数族具有正交性，体现为

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos n\phi \, d\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin n\phi \, d\phi = \pi \delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

 由此得到

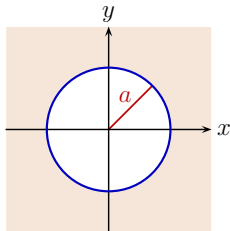
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \, d\phi, \quad A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi \, d\phi, \quad B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi \, d\phi$$

 给定  $F(\phi)$  的具体形式，计算上述积分，再将系数代回去，就得到圆内问题的解

# 圆外问题

类似地，考虑圆外的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$



由于一般解中的  $\ln \rho$  和  $\rho^m$  在  $\rho \rightarrow \infty$  处有奇性

应该舍弃相应的项，故  $B_0 = 0$ ,  $A_m = B_m = 0$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )


从而一般解简化为  $u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$

由边界条件得  $u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) = G(\phi)$ ，定出系数为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) d\phi, \quad C_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad D_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) \sin m\phi d\phi$$

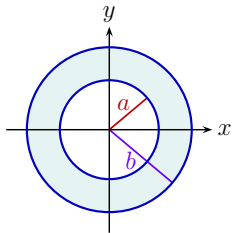
# 其它情况

 如果所考虑的问题是**有界的**，且**不包含原点**

 比如**环域**  $a < \rho < b$  上的定解问题，则**一般解**


$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

中的**各项均必须保留**



# 其它情况


 如果所考虑的问题是**有界的**，且**不包含原点**

 比如**环域**  $a < \rho < b$  上的定解问题，则**一般解**

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

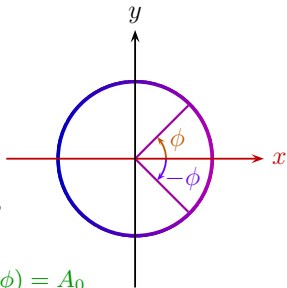
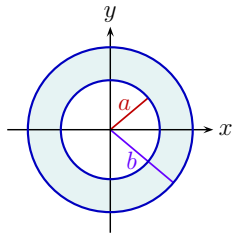
中的**各项均必须保留**

 不过，如果问题的**边界条件对  $x$  轴具有反射对称性**

 则可以推知  $u(\rho, -\phi) = u(\rho, \phi)$ ，一般解**简化为**

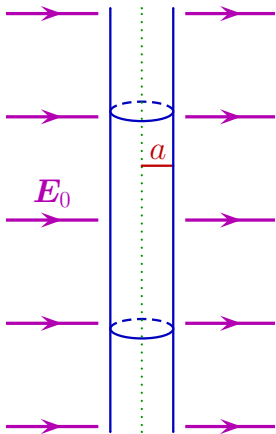
$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

 在**全平面**上满足 **Laplace 方程**的解则只能是**常数**， $u(\rho, \phi) = A_0$




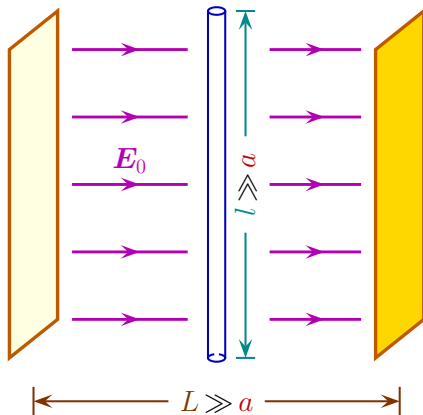
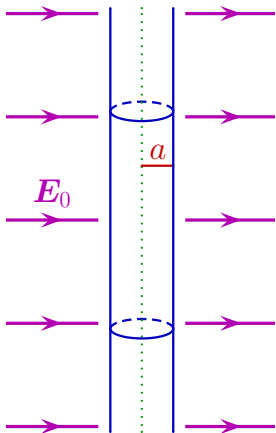
## §5.3 均匀电场中的导体圆柱

考虑一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$



## §5.3 均匀电场中的导体圆柱


 考虑一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$

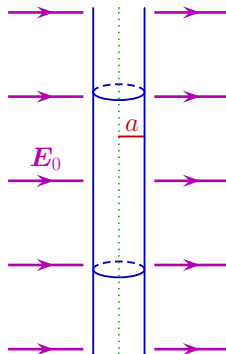





# 分析


 考虑一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$

 这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力



# 分析


 考虑一个**无限长圆柱导体**，半径为  $a$ ，**不带电**，置于**均匀外电场**  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于**柱轴**，求空间各处的**电势分布**  $u$

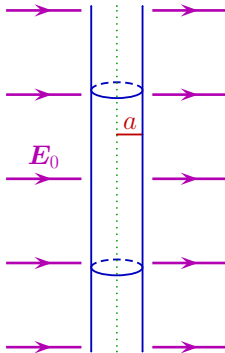
 这是一道**综合应用题**，通过求解，同学们可以逐步培养从**物理到数学**、再由**数学到物理**的分析解决问题的能力

## 1 第一步 物理分析


 当**静电场**中的**导体**达到**静电平衡**时，导体变成**等势体**


 故**柱内**和**柱面电势**为**常数**，可取为**零**，即  $u = 0$  ( $\rho \leq a$ )

 **注** 由于存在**无限长圆柱**，选**无穷远**为电势零点一般是不合适的，其实本题中**不同方向**的**无穷远点**具有**不同的电势**



# 分析


 考虑一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$

 这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

## 1 第一步 物理分析

 当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体


 故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即  $u = 0$  ( $\rho \leq a$ )

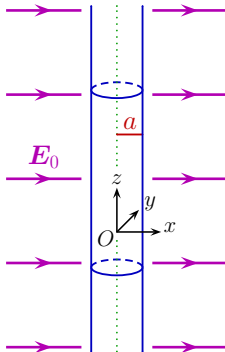
 注 由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是不合适的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

## 2 第二步 建立坐标系


 取柱轴为  $z$  轴，任取柱轴上一点为原点  $O$ ，又取电场  $E_0$  的方向为  $x$  轴方向

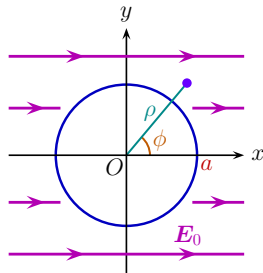
 由于所有条件不随  $z$  变化，任何垂直于  $z$  轴平面上的电势分布都是相同的

 不妨选  $Oxy$  平面为代表来研究，故本题是二维稳定场问题



# 定解问题


 鉴于边界的形状，只能采用极坐标系  $(\rho, \phi)$




# 定解问题

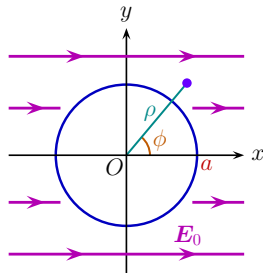
 鉴于**边界**的**形状**，只能采用**极坐标系**  $(\rho, \phi)$

**3** **第三步** 建立定解问题

 **柱外没有电荷**，电势  $u(\rho, \phi)$  满足 **Laplace 方程**

 本题有两个边界，即**柱面** (**圆周**) 和**无穷远处**

 **柱面**的电势已取为**零**



# 定解问题

🚂 鉴于**边界**的**形状**，只能采用**极坐标系**  $(\rho, \phi)$

## 3 第三步 建立定解问题

🚂 **柱外没有电荷**，电势  $u(\rho, \phi)$  满足 **Laplace 方程**

🚂 本题有两个边界，即**柱面** (**圆周**) 和**无穷远处**

🚂 **柱面**的电势已取为**零**

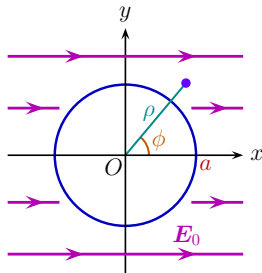
🚂 至于**无穷远处**， $\rho \gg a$ ， $a \rightarrow 0$ ，而**原均匀电场**应

基本不受影响，有  $E_0 e_x = \mathbf{E}_0 = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial x} e_x$ ，故**电势**为

$$u = -\int E_0 dx = u_0 - E_0 x = u_0 - E_0 \rho \cos \phi$$

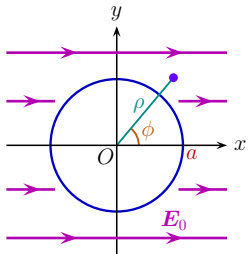
🚂 因为**电势零点**已经取在**柱面**上，所以**常数**  $u_0$  不能任取，需要通过求解来确定

🚂 于是列出**定解问题**

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, & u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$


# 求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$



## 4 第四步 求解定解问题

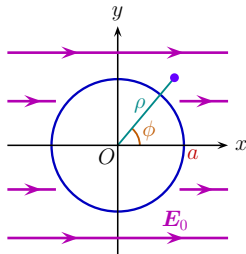
 Laplace 方程和边界条件都在  $\phi \rightarrow -\phi$  变换下不变

 因此本题具有对  $x$  轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

# 求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$



## 4 第四步 求解定解问题


 Laplace 方程和边界条件都在  $\phi \rightarrow -\phi$  变换下不变

 因此本题具有对  $x$  轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

 代入无穷远处的边界条件，得

$$u|_{\rho \rightarrow \infty} = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \rho^m \cos m\phi \stackrel{\text{已知}}{=} A_1 \rho \cos \phi = u_0 - E_0 \rho \cos \phi$$

 比较两边，推出  $A_0 = u_0$ ,  $B_0 = 0$ ,  $A_1 = -E_0$ ,  $A_m = 0 (m > 1)$



# 定解问题的解

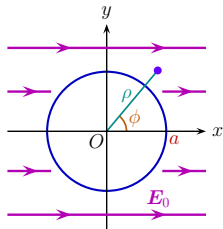
从而得到  $u(\rho, \phi) = u_0 - E_0 \rho \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-m} \cos m\phi$

再代入柱面的边界条件，有  $\supset \frac{C_1}{a} \cos \phi$

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m} \cos m\phi = 0$$

比较两边，推出  $u_0 = 0$ ,  $C_1 = E_0 a^2$ ,  $C_m = 0 (m > 1)$

最终得到定解问题的解为  $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$



# 定解问题的解

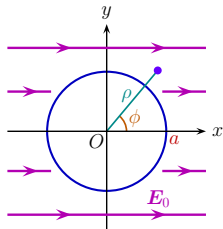
从而得到  $u(\rho, \phi) = u_0 - E_0 \rho \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-m} \cos m\phi$

再代入柱面的边界条件，有  $\supset \frac{C_1}{a} \cos \phi$

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m} \cos m\phi = 0$$

比较两边，推出  $u_0 = 0$ ,  $C_1 = E_0 a^2$ ,  $C_m = 0 (m > 1)$

最终得到定解问题的解为  $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$



## 5 第五步 结果分析


解式中第一项是原均匀电场的电势，第二项是由柱面上的感应面电荷产生的

本题的求解区域是圆外  $\rho > a$ ，即无穷远点的邻域，但电势的求解结果中第一项在  $\rho \rightarrow \infty$  处有奇性，因为均匀电场是由无穷远处的源产生的


求解区域存在电荷，因而前面得出的圆外的解不包含  $\rho^m$  和  $\ln \rho$  项的结论不成立

不过，无穷远处的源只通过边界条件影响结果，不作为非齐次项出现在方程中

# 感应面电荷

 根据解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos \phi + \frac{E_0a^2}{\rho} \cos \phi$ ， $\rho$  方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0 \cos \phi + \frac{E_0a^2}{\rho^2} \cos \phi$$

 它在柱面附近的值为  $E_\rho|_{\rho=a} = 2E_0 \cos \phi$

 可见，在  $\phi = 0, \pi$  两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

# 感应面电荷

🚚 根据解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$ ,  $\rho$  方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0 \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2} \cos \phi$$

🚚 它在柱面附近的值为  $E_\rho|_{\rho=a} = 2E_0 \cos \phi$

🚚 可见, 在  $\phi = 0, \pi$  两处, 电场大小是原均匀电场的两倍, 所以这两处容易被击穿

👤 根据电磁学, 记  $\epsilon_0$  为真空介电常数, 柱面上感应电荷的面密度为

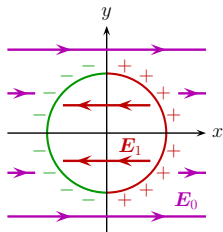
$$\sigma(\phi) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\rho=a} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \epsilon_0 E_\rho|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$$

🚀 显然, 柱面上  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  部分带正电,  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

部分带负电

👤 感应电荷引起的电场  $E_1$  在柱内抵消外电场  $E_0$ , 从而

达到静电平衡



# 电偶极矩

正如所期望的，柱面上**每单位长度的总带电量为零**：

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma(\phi) a d\phi = 2a\epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

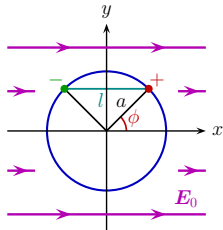
方位角  $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$  处  $d\phi$  角度内的元电荷  $dq = \sigma(\phi) a d\phi$  与方位角  $\pi - \phi$  处的相应元电荷形成元电偶极子

两个元电荷的距离为  $l = 2a \cos \phi$ ，元电偶极子的偶极矩为

$$dp = l dq = 2a \cos \phi \cdot 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi a d\phi = 4a^2 \epsilon_0 E_0 \cos^2 \phi d\phi$$

从而，感应面电荷引起的沿  $x$  轴正向的总电偶极矩为

$$\begin{aligned} p &= \int dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a^2 \epsilon_0 E_0 \cos^2 \phi d\phi = 2a^2 \epsilon_0 E_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2\phi + 1) d\phi \\ &= 2a^2 \epsilon_0 E_0 \left( \frac{1}{2} \sin 2\phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = 2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \end{aligned}$$



# 理想电偶极子

⚓ 若  $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$  时  $ql$  保持固定，则称电偶极子  $p = ql$  是理想电偶极子

🚢 根据电磁学，一个二维理想电偶极子  $p$  产生的电势为  $u_{\text{dipole}} = \frac{p \cdot \rho}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$

🚢 将以上沿  $x$  轴正向的总电偶极矩代入，得

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{p \cdot \rho}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ &= \frac{2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi \end{aligned}$$

🚢 这与解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi$  中的第二项相同

🚢 因此，感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子

# 理想电偶极子

⚓ 若  $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$  时  $ql$  保持固定，则称电偶极子  $p = ql$  是理想电偶极子

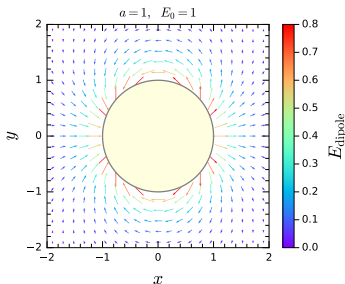
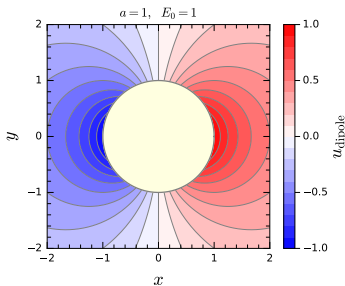
🚢 根据电磁学，一个二维理想电偶极子  $p$  产生的电势为  $u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$

🚢 将以上沿  $x$  轴正向的总电偶极矩代入，得

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ &= \frac{2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi \end{aligned}$$

🚢 这与解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi$  中的第二项相同

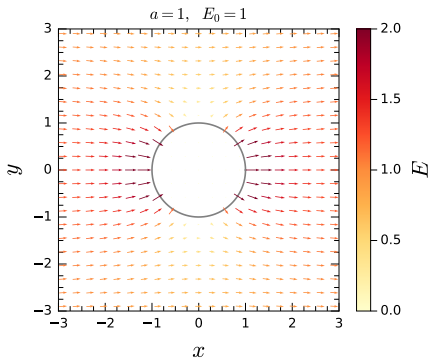
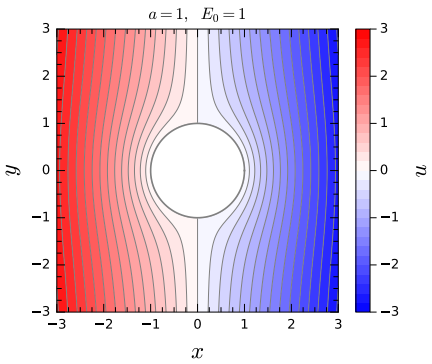
🚢 因此，感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子



# 电势分布和电场分布的图像

$$u = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi = -E_0 x + \frac{E_0 a^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = E_0 - \frac{E_0 a^2}{x^2 + y^2} + \frac{2E_0 a^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2E_0 a^2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$



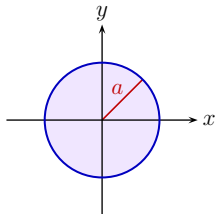


## §5.4 Poisson 方程的处理

 本小节介绍 **Poisson 方程** (非齐次稳定场方程) 的处理方法

 考虑**圆内**的 **Poisson 方程** 定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = f(\rho, \phi) & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$

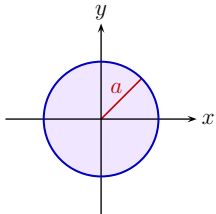



## §5.4 Poisson 方程的处理


 本小节介绍 **Poisson 方程 (非齐次稳定场方程)** 的处理方法


 考虑**圆内**的 **Poisson 方程**定解问题


$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = f(\rho, \phi) & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



 **方法一** 如果  $f(\rho, \phi)$  的形式比较**简单**, 则可以通过观察和试探寻找一个**简单函数**  $u_0(\rho, \phi)$ , 使得  $\nabla^2 u_0 = f(\rho, \phi)$ , 然后令  $u(\rho, \phi) = v(\rho, \phi) + u_0(\rho, \phi)$

 从而  $v(\rho, \phi)$  满足定解问题 
$$\begin{cases} \nabla^2 v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ v|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$

 其中  $G(\phi) = u|_{\rho=a} - u_0|_{\rho=a} = F(\phi) - u_0(a, \phi)$

  $u_0(\rho, \phi)$  **不是唯一的**, 因为  $u_0(\rho, \phi)$  加上任一**调和函数** (即 **Laplace 方程**的解, 如  $\rho^m \cos m\phi$  或  $\rho^m \sin m\phi$ ) 之后**仍然满足要求**, 应该通过选择**使  $G(\phi)$  尽可能简单**

## 方法二

♥ 方法二 如果  $f(\rho, \phi)$  的形式比较复杂，则难以找到  $u_0(\rho, \phi)$

🏭 这时应该使用**本征函数展开法**，将**未知函数**  $u(\rho, \phi)$  展开为

$$u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$$

🏢 其中  $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 、 $B_m(\rho)$  是**未知函数**

🏠 这个展开式满足**周期性边界条件**  $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$

# 方法二

♥ **方法二** 如果  $f(\rho, \phi)$  的形式比较**复杂**，则难以找到  $u_0(\rho, \phi)$

🏭 这时应该使用**本征函数展开法**，将**未知函数**  $u(\rho, \phi)$  展开为

$$u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$$

🏢 其中  $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 、 $B_m(\rho)$  是**未知函数**

🏫 这个展开式满足**周期性边界条件**  $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$

🏠 将**非齐次项**和**边界条件**也作类似展开：

$$f(\rho, \phi) = a_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(\rho) \cos m\phi + b_m(\rho) \sin m\phi]$$


$$F(\phi) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\phi + \beta_m \sin m\phi)$$

**已知函数：**

$$a_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) d\phi, \quad a_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \cos m\phi d\phi, \quad b_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \sin m\phi d\phi$$

$$\text{已知常数：} \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi d\phi$$


# 常微分方程

 将这些展开式代入定解问题，用撇号代表对  $\rho$  求导，利用

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{1}{\rho} (\rho A_0')' + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( A_m'' + \frac{1}{\rho} A_m' - \frac{m^2}{\rho^2} A_m \right) \cos m\phi + \left( B_m'' + \frac{1}{\rho} B_m' - \frac{m^2}{\rho^2} B_m \right) \sin m\phi \right] \end{aligned}$$

 推出未知函数  $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$  和  $B_m(\rho)$  满足的常微分方程和边界条件：

$$\begin{aligned} (\rho A_0')' &= \rho a_0, & \rho^2 A_m'' + \rho A_m' - m^2 A_m &= \rho^2 a_m, & \rho^2 B_m'' + \rho B_m' - m^2 B_m &= \rho^2 b_m \\ A_0(a) &= \alpha_0, & A_m(a) &= \alpha_m, & B_m(a) &= \beta_m \end{aligned}$$

 这些常微分方程不难求解， $A_0(\rho)$  的方程可以直接积分

  $A_m(\rho)$  和  $B_m(\rho)$  的方程相应的齐次方程为 Euler 方程，容易求出通解，对应于非齐次项的特解可以用常数变易法求出

 但是，对于每个未知函数，边界条件只有一个，不足以确定通解中的两个任意常数

# 自然边界条件

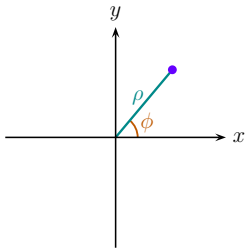
🏛️ 实际上, 还存在**另一组边界条件**

🏰 在**平面极坐标系**中,  $\rho = 0$  处  $\phi$  **没有定义**, 故  $\rho = 0$  是坐标系的**奇点**

📄 **展开式**  $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$  本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

🏠 否则  $u(\rho, \phi)$  在  $\rho = 0$  处**没有定义**, 这是一组**自然边界条件**



# 自然边界条件

🏛️ 实际上, 还存在另一组边界条件

🕌 在平面极坐标系中,  $\rho = 0$  处  $\phi$  没有定义, 故  $\rho = 0$  是坐标系的奇点

🔞 展开式  $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$  本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

🏛️ 否则  $u(\rho, \phi)$  在  $\rho = 0$  处没有定义, 这是一组自然边界条件

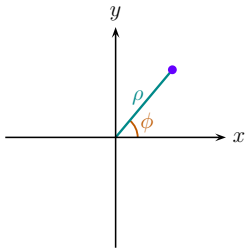
🏛️ 对展开式第一项  $A_0(\rho)$  没有类似要求, 但它必须有限

🕌 即满足自然边界条件

$$|A_0(0)| < \infty$$


🏛️ 注意, 上式并不意味着  $A_0(\rho)$  在  $\rho \neq 0$  处可以不必有限


🕌 只不过偏微分方程的解在坐标系奇点  $\rho = 0$  处很容易出现奇性, 需要对其有限性特别加以强调



求解  $A_0(\rho)$ 

 下面求解  $A_0(\rho)$  的常微分方程边值问题 
$$\begin{cases} (\rho A_0')' = \rho a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$$

 方程  $(\rho A_0')' = \rho a_0(\rho)$  对  $\rho$  积分, 得  $\rho A_0' = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + C$


 其中  $C$  为常数, 从而  $A_0' = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + \frac{C}{\rho}$ , 再次对  $\rho$  积分, 得


$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + C \ln \rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$



求解  $A_0(\rho)$ 


 下面求解  $A_0(\rho)$  的常微分方程边值问题 
$$\begin{cases} (\rho A_0')' = \rho a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$$


 方程  $(\rho A_0')' = \rho a_0(\rho)$  对  $\rho$  积分, 得  $\rho A_0' = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + C$

 其中  $C$  为常数, 从而  $A_0' = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + \frac{C}{\rho}$ , 再次对  $\rho$  积分, 得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + C \ln \rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

 由于  $\ln \rho$  在  $\rho = 0$  处发散, 自然边界条件  $|A_0(0)| < \infty$  意味着  $C = 0$

 代入  $\rho = a$  处的边界条件, 得  $\alpha_0 = A_0(a) = \int_0^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + D$

 故  $D = \alpha_0 - \int_0^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2$ , 代回去, 得到问题的解为

$$A_0(\rho) = \alpha_0 - \int_\rho^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2$$