数 学 物 理 方 法

第七章　分离变量法

第 3 节　非齐次方程与非齐次边界条件

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 5 月 24 日

§3 非齐次方程与非齐次边界条件

- 前两节介绍的**分离变量法**适用于**齐次方程**和**齐次边界条件**
- 但许多实际问题具有**非齐次方程**和**非齐次边界条件**，研究它们的求解是必要的
- 如果问题具有**齐次边界条件**，只有**方程**是**非齐次**的，那么可以用**改进**的**分离变量法**，即**本征函数展开法**来求解
- 但如果**边界条件**是**非齐次**的，则不管方程齐次与否，首先应该**将边界条件齐次化**

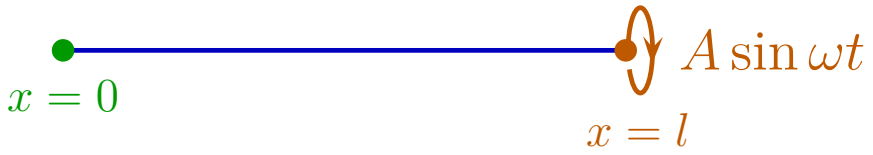
§3 非齐次方程与非齐次边界条件

- 前两节介绍的**分离变量法**适用于**齐次方程**和**齐次边界条件**
- 但许多实际问题具有**非齐次方程**和**非齐次边界条件**，研究它们的求解是必要的
- 如果问题具有**齐次边界条件**，只有**方程**是**非齐次**的，那么可以用**改进**的**分离变量法**，即**本征函数展开法**来求解
- 但如果**边界条件**是**非齐次**的，则不管方程齐次与否，首先应该**将边界条件齐次化**
- 如果原来是**非齐次方程**，边界条件齐次化后，方程一般仍然是**非齐次**的
- 即使**方程**原来是**齐次**的，边界条件齐次化后，通常也会变成**非齐次方程**
- 不管哪种情况，**边界条件齐次化**以后，都可以用**本征函数展开法**求解
- 至于**初始条件齐次与否**，则是**无关紧要**的

$$\text{非齐次边界条件} \xrightarrow{\text{齐次化}} \left.\begin{array}{r}\text{齐次边界条件}\\ \text{非齐次方程}\end{array}\right\} \text{本征函数展开法}$$

§3.1 非齐次边界条件的齐次化

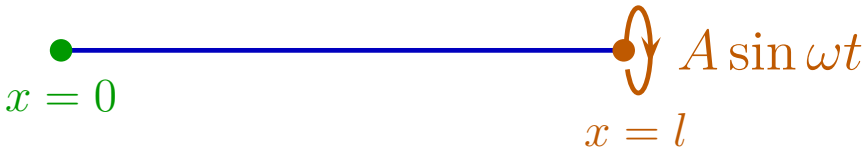
- 考虑弦振动问题，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端作振幅 A 很小的已知简谐振动 $A\sin\omega t$
- 弦的初始位移和初始速度均为零，且不受外力作用，求解弦的振动
- 定解问题为



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l, \quad t>0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = A\sin\omega t & (t\geq 0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

§3.1 非齐次边界条件的齐次化

- 考虑弦振动问题，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端作振幅 A 很小的已知简谐振动 $A\sin\omega t$
- 弦的初始位移和初始速度均为零，且不受外力作用，求解弦的振动
- 定解问题为



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l,\quad t>0) \\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=A\sin\omega t & (t\geq 0) \\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

- 将边界条件齐次化的思路是构造一个尽可能简单的函数 $u_0(x,t)$
- 它与 $u(x,t)$ 满足相同的边界条件，然后令 $u(x,t)=v(x,t)+u_0(x,t)$
- 其中 $v(x,t)$ 是新的未知函数，它显然满足齐次的边界条件
- 但 $v(x,t)$ 满足的方程和初始条件当然就会**不同**于 $u(x,t)$

边界条件齐次化

💜 对于本问题，可取 $u_0(x,t) = \dfrac{x}{l} A \sin \omega t$

🚌 它满足与 $u(x,t)$ **相同的边界条件**，$u_0|_{x=0} = 0$ 和 $u_0|_{x=l} = A \sin \omega t$，以及

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\omega A x}{l} \cos \omega t, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2 A x}{l} \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

$$u_0|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\omega A x}{l}$$

边界条件齐次化

- 对于本问题，可取 $u_0(x,t)=\dfrac{x}{l}A\sin\omega t$
- 它满足与 $u(x,t)$ **相同的边界条件**，$u_0|_{x=0}=0$ 和 $u_0|_{x=l}=A\sin\omega t$，以及

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\omega Ax}{l}\cos\omega t,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=-\frac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0$$

$$u_0|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\omega Ax}{l}$$

- 从而，**未知函数** $v(x,t)=u(x,t)-u_0(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)=\frac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t$$

$$v|_{x=0}=u|_{x=0}-u_0|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=u|_{x=l}-u_0|_{x=l}=0$$

$$v|_{t=0}=u|_{t=0}-u_0|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}-\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{\omega Ax}{l}$$

- 这样**边界条件**就**齐次化**了，但**方程**变成**非齐次**的
- 不过这不要紧，下面会介绍**非齐次方程问题**的解法

同时使边界条件和方程齐次化

- 如果能够在将**边界条件齐次化**的同时，保持**方程的齐次性**，那无疑是值得尝试的
- 对于上述问题，可取 $u_0(x,t) = A\,\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$
- 它满足与 $u(x,t)$ **相同**的**边界条件**，$u_0|_{x=0} = 0$ 和 $u_0|_{x=l} = A\sin\omega t$，以及

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\omega^2 A\,\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 A}{a^2}\,\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \quad u_0|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega A\,\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$$

- 从而，**未知函数** $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$v|_{x=0} = u|_{x=0} - u_0|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = u|_{x=l} - u_0|_{x=l} = 0$$

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - u_0|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = -\omega A\,\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$$

求解 $v(x,t)$

这样一来，$v(x,t)$ 的**定解问题**就同时具有**齐次方程**和**齐次边界条件**：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = -\omega A \dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

这是 **§1** 解过的**定解问题**的一种**特殊情况**，前面得到的**一般解**是

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

代入**初始条件**，有

$$v|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = -\omega A \frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$$

显然，$A_n = 0 \ (n \in \mathbb{N}^+)$

计算 B_n

由 1.5 小节中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = -\omega A \frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$ 的系数表达式得

$$B_n = \frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}\int_0^l \left[-\omega A \frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\right] \sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\omega A}{n\pi a \sin(\omega l/a)}\int_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\omega A}{n\pi a \sin(\omega l/a)}\int_0^l \left\{\cos\left[\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)x\right] - \cos\left[\left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)x\right]\right\}\mathrm{d}x$$ 积化和差

$$= \frac{\omega A}{n\pi a \sin(\omega l/a)}\left\{\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left[\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)x\right] - \left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left[\left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)x\right]\right\}\Bigg|_0^l$$

$$= \frac{\omega A}{n\pi a \sin(\omega l/a)}\left\{\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left(\frac{\omega l}{a}+n\pi\right) - \left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left(\frac{\omega l}{a}-n\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{(-)^n\omega A}{n\pi a \sin(\omega l/a)}\left[\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\frac{\omega l}{a} - \left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\frac{\omega l}{a}\right]$$ $\sin(x \pm n\pi) = (-)^n \sin x$ $(n \in \mathbb{N})$

$$= \frac{(-)^n\omega A}{n\pi a}\left(\frac{al}{\omega l + n\pi a} - \frac{al}{\omega l - n\pi a}\right) = \frac{(-)^n\omega A l}{n\pi}\left(\frac{\omega l - n\pi a}{\omega^2 l^2 - n^2\pi^2 a^2} - \frac{\omega l + n\pi a}{\omega^2 l^2 - n^2\pi^2 a^2}\right)$$

$$= \frac{(-)^n\omega A l}{n\pi}\frac{-2n\pi a}{\omega^2 l^2 - n^2\pi^2 a^2} = -\frac{2\omega A a}{l}\frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2}$$

解

最后求得原问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= A\,\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

解

- 最后求得原问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

- 容易看出，如果 $\omega = \dfrac{n\pi a}{l}$，即右端点的振动频率等于弦的某一个本征振动频率
- 就会发生共振，因为此时解的表达式中有两项的分母变成零，而 $u(x,t)$ 发散：

$$
\sin\frac{\omega l}{a} = \sin n\pi = 0, \quad \omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 = 0
$$

- 实际上，这时 $u_0(x,t) = A\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$ 的分母为零，是**不能使用**的
- 不过，用 $u_0(x,t) = \dfrac{x}{l}A\sin\omega t$ 就没有这个问题

解

- 最后求得原问题的解为

解的动画演示

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

- 容易看出，如果 $\omega = \dfrac{n\pi a}{l}$，即右端点的振动频率等于弦的某一个本征振动频率
- 就会发生共振，因为此时解的表达式中有两项的分母变成零，而 $u(x,t)$ 发散：

$$
\sin\frac{\omega l}{a} = \sin n\pi = 0, \quad \omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 = 0
$$

- 实际上，这时 $u_0(x,t) = A\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$ 的分母为零，是**不能使用**的
- 不过，用 $u_0(x,t) = \dfrac{x}{l}A\sin\omega t$ 就没有这个问题

讨论

- 给定一个具有**非齐次边界条件**的**一维波动或热传导方程**的定解问题
- ❓ 如何选择**函数** $u_0(x,t)$，使得在**将边界条件齐次化**的同时保持**齐次方程的齐次性**，或者将**非齐次方程**也**齐次化**呢?
- ⛔ 应该指出，这**通常**是**做不到**的
- 所以一般只能**将边界条件齐次化**，然后求解**非齐次方程**的定解问题

讨论

- 给定一个具有**非齐次边界条件**的**一维波动或热传导方程**的定解问题
- ❓ 如何选择**函数** $u_0(x,t)$，使得在**将边界条件齐次化**的同时保持**齐次方程的齐次性**，或者将**非齐次方程**也**齐次化**呢?
- ⛔ 应该指出，这**通常**是**做不到**的
- 所以一般只能**将边界条件齐次化**，然后求解**非齐次方程**的定解问题
- 另一方面，虽然在某些情况下可以找到**函数** $u_0(x,t)$ 满足以上要求，但如果它的形式**非常复杂**，那么 $v(x,t)$ 的定解问题就会具有**复杂**的**初始条件**
- 从而计算 $v(x,t)$ 就会有**很大的工作量**
- 这时不如找一个**简单**的**函数** $u_0(x,t)$，只求**将边界条件齐次化**

讨论

- 给定一个具有**非齐次边界条件**的**一维波动或热传导方程**的定解问题
- ❓ 如何选择**函数** $u_0(x,t)$，使得在**将边界条件齐次化**的同时保持**齐次方程的齐次性**，或者将**非齐次方程**也**齐次化**呢?
- ⛔ 应该指出，这**通常**是**做不到**的
- 所以一般只能**将边界条件齐次化**，然后求解**非齐次方程**的定解问题
- 另一方面，虽然在某些情况下可以找到**函数** $u_0(x,t)$ 满足以上要求，但如果它的形式**非常复杂**，那么 $v(x,t)$ 的定解问题就会具有**复杂**的**初始条件**
- 从而计算 $v(x,t)$ 就会有**很大的工作量**
- 这时不如找一个**简单**的**函数** $u_0(x,t)$，只求**将边界条件齐次化**
- 当然，这样的函数**不是唯一**的，**不同**的函数 $u_0(x,t)$ 将给出**形式不同的解**
- 但是，可以一般地证明**解的唯一性**，即**不同形式的解**实际上是**相同**的
- 因此，应该选择**尽可能简单**的**函数** $u_0(x,t)$

弦振动方程第一边值问题一般形式

再举一个例子，**弦振动方程第一边值问题**的**最一般形式**是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t) & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中 $f(x,t)$、$\mu(t)$、$\nu(t)$、$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 都是**已知函数**

为了**将边界条件齐次化**，取 $u_0(x,t) = \mu(t) + \dfrac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$，有

$$u_0|_{x=0} = \mu(t), \quad u_0|_{x=l} = \nu(t), \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \mu''(t) + \frac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)], \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

从而，**未知函数** $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) = f(x,t) - \mu''(t) - \frac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)]$$

$v(x,t)$ 的定解问题

于是，$v(x,t)$ 的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \mu''(t) - \dfrac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0) - \dfrac{x}{l}[\nu(0) - \mu(0)] & (0 \leq x \leq l) \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \mu'(0) - \dfrac{x}{l}[\nu'(0) - \mu'(0)] & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中**边界条件**已经**齐次化**

至于**方程**和**初始条件**则与原来**没有本质差异**，只是形式上复杂了一些

$v(x,t)$ 的定解问题

于是，$v(x,t)$ 的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \mu''(t) - \dfrac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0) - \dfrac{x}{l}[\nu(0) - \mu(0)] & (0 \leq x \leq l) \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \mu'(0) - \dfrac{x}{l}[\nu'(0) - \mu'(0)] & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中**边界条件**已经**齐次化**

至于**方程**和**初始条件**则与原来**没有本质差异**，只是形式上复杂了一些

当然，也可以选择 $u_0(x,t) = \mu(t) + \dfrac{x^2}{l^2}[\nu(t) - \mu(t)]$ 来将**边界条件齐次化**

但显然不如 $u_0(x,t) = \mu(t) + \dfrac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$ 来得简单

§3.2 非齐次方程的本征函数展开法

假设边界条件已经齐次化，则弦振动方程第一边值问题的一般形式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

这可以看作两端固定的弦的受迫振动问题，现在求解它

§3.2 非齐次方程的本征函数展开法

假设边界条件已经齐次化，则弦振动方程第一边值问题的一般形式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

这可以看作两端固定的弦的受迫振动问题，现在求解它

$u(x,t)$ 是 x 和 t 两个变量的函数，如果固定时刻 t，那么它就只是 x 的函数

这时它可以展开为某一完备的本征函数族的线性组合

比如利用前两节中出现的本征函数族 $\left\{\sin \dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\left\{\cos \dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$

当时刻 t 变化时，展开系数也就相应地不同，所以展开系数变成 t 的函数，即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{或} \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

本征函数族的选择

- 当然，还可以将 $u(x,t)$ 展开为**其它形式**
- 我们的思路是，通过选择**适当**的**函数族** $\{T_n(t)\}$，可以使**展开式**满足**定解问题**
- 如此，则**展开式** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$ 显然**不可取**
- 因为它**不满足边界条件** $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$

本征函数族的选择

- 当然，还可以将 $u(x,t)$ 展开为**其它形式**
- 我们的思路是，通过选择**适当**的**函数族** $\{T_n(t)\}$，可以使**展开式**满足**定解问题**
- 如此，则**展开式** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$ 显然**不可取**
- 因为它**不满足边界条件** $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$
- 但是，**满足边界条件**的展开式也可能还有**其它形式**
- **选读**的 **§3.3** 进一步讨论选择本征函数族的依据，现在我们只是指出，

> 应该用**相应齐次方程**的**定解问题**中所解出的**本征函数族**来展开**未知函数** $u(x,t)$

- 所以，如果**相应齐次方程**的**定解问题**不是熟悉的，就应该先对它进行求解
- 即令 $f(x,t)=0$ 进行求解，只需求解**本征函数族**，**不必求一般解及其系数**
- 获得**本征函数族**之后再作 $u(x,t)$ **的展开式**

各个已知函数的展开式

- 对于目前的问题，**展开式** $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 正好是恰当的选择
- 它已经**满足边界条件** $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$
- 现在应该将它代入**方程**和**初始条件**以确定**函数族** $\{T_n(t)\}$ 所应满足的条件
- 为此，把**各式右边的函数**作相应的**展开**：

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 这里**各个展开系数** $f_n(t)$、φ_n 和 ψ_n 都是**已知**的
- 它们原则上可以通过上面的积分从**已知函数** $f(x,t)$、$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 计算出来

代入展开式

将这些展开式和 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 一起代入

方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$ 和初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

根据本征函数的正交性，容易知道以上各式两边的展开系数应该分别相等

只要将以上各式两边同时乘以某个本征函数 $\sin\frac{k\pi x}{l}$，然后从 0 到 1 积分，就可以得到这个结论

常微分方程初值问题

要求展开系数分别相等，就得到一系列常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

解 相应齐次常微分方程 $\tilde{T}_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 \tilde{T}_n(t) = 0$ 的通解为

$$\tilde{T}_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}$$

利用常数变量法，设非齐次常微分方程 $T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 的解为

$$T_n(t) = A_n(t) \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n(t) \sin\frac{n\pi a t}{l}$$

求导，得

$$T_n'(t) = A_n'(t) \cos\frac{n\pi a t}{l} - \frac{n\pi a}{l} A_n(t) \sin\frac{n\pi a t}{l} + B_n'(t) \sin\frac{n\pi a t}{l} + \frac{n\pi a}{l} B_n(t) \cos\frac{n\pi a t}{l}$$

进一步求解

为避免 $T_n''(t)$ 中出现待定函数 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 的二阶导数，令

$$A_n'(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n'(t)\sin\frac{n\pi at}{l}=0$$

从而 $T_n'(t)=-\frac{n\pi a}{l}A_n(t)\sin\frac{n\pi at}{l}+\frac{n\pi a}{l}B_n(t)\cos\frac{n\pi at}{l}$，则

$$\begin{aligned}T_n''(t) &= \frac{n\pi a}{l}\left[-A_n'(t)\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n'(t)\cos\frac{n\pi at}{l}\right]\\ &\quad-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\left[A_n(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n(t)\sin\frac{n\pi at}{l}\right]\\ &= \frac{n\pi a}{l}\left[-A_n'(t)\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n'(t)\cos\frac{n\pi at}{l}\right]-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)\end{aligned}$$

故 $\frac{n\pi a}{l}\left[-A_n'(t)\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n'(t)\cos\frac{n\pi at}{l}\right]=T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t)$

求待定函数

- 于是得到关于**待定函数**的**导数** $A_n'(t)$ 和 $B_n'(t)$ 的代数方程组

$$\begin{cases} A_n'(t)\cos\dfrac{n\pi at}{l} + B_n'(t)\sin\dfrac{n\pi at}{l} = 0 \\ -A_n'(t)\sin\dfrac{n\pi at}{l} + B_n'(t)\cos\dfrac{n\pi at}{l} = \dfrac{l}{n\pi a}f_n(t) \end{cases}$$

- 求得 $A_n'(t) = -\dfrac{l}{n\pi a}f_n(t)\sin\dfrac{n\pi at}{l}$ 和 $B_n'(t) = \dfrac{l}{n\pi a}f_n(t)\cos\dfrac{n\pi at}{l}$，积分得

$$\begin{aligned} A_n(t) &= A_n(0) - \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a\tau}{l}\,\mathrm{d}\tau \\ B_n(t) &= B_n(0) + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{n\pi a\tau}{l}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

- 将以上两式代回解式 $T_n(t) = A_n(t)\cos\dfrac{n\pi at}{l} + B_n(t)\sin\dfrac{n\pi at}{l}$

初值问题的解

推出

$$
\begin{aligned}
T_n(t) &= A_n(0)\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n(0)\sin\frac{n\pi at}{l} \\
&\quad + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\left[\sin\frac{n\pi at}{l}\cos\frac{n\pi a\tau}{l} - \cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi a\tau}{l}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= A_n(0)\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n(0)\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

根据 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)g(t,t) + \int_0^t f(\tau)\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$，有

$$
T_n'(t) = -\frac{n\pi a}{l}A_n(0)\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{n\pi a}{l}B_n(0)\cos\frac{n\pi at}{l} + \int_0^t f_n(\tau)\cos\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau
$$

由初值条件得 $T_n(0) = A_n(0) = \varphi_n$ 和 $T_n'(0) = \dfrac{n\pi a}{l}B_n(0) = \psi_n$，解为

$$
T_n(t) = \varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau
$$

定解问题的解

将 $T_n(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$

代入 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$，就得到**定解问题的解**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}$$

如果 $f(x,t)=0$，则**所有** $f_n(t)=0$，解**退化**为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$$

这正是 **§1** 求解**齐次波动方程**时得到的**解**

虽然上面只讨论**波动方程**的**非齐次边界条件**的**齐次化**和**非齐次方程**的求解，但所用方法完全可用于处理**热传导方程**的类似定解问题；至于**稳定场方程**，**§4** 再作讨论

注

解式 $T_n(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$

主要用于显示一般结果，并与相应齐次方程的结果进行比较

在实际计算中，它并不方便，当 $f_n(t)$ 比较简单时，可以用一些特殊方法求解

对于一般的线性常微分方程，有以下结论

非齐次方程的通解 = 齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解

比如，若某一项 $f_n(t) = c$ 是常数，则方程 $T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 有一个特解 $\bar{T}_n(t) = c\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$，它满足 $\bar{T}_n''(t) = 0$ 和 $\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \bar{T}_n(t) = c$

故通解为 $T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + c\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$

其中任意常数 A_n 和 B_n 由初始条件 $T_n(0) = \varphi_n$ 和 $T_n'(0) = \psi_n$ 确定

其它例子

- 当某一项 $f_n(t) = ct$ 是**线性函数**时
- **方程** $T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 有一个**特解** $\hat{T}_n(t) = ct\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$
- 它满足 $\hat{T}_n''(t) = 0$ 和 $\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \hat{T}_n(t) = ct$，于是**通解**为

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l} + ct\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$$

其它例子

- 当某一项 $f_n(t) = c\,t$ 是**线性函数**时
- **方程** $T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 有一个**特解** $\hat{T}_n(t) = c\,t\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$
- 它满足 $\hat{T}_n''(t) = 0$ 和 $\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \hat{T}_n(t) = c\,t$，于是**通解**为

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l} + c\,t\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$$

- 若某一项 $f_n(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t$ 是**三角函数**，其中 $\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$（**相应本征频率**）
- 则可**假定特解**的形式为 $\tilde{T}_n(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$
- 将它和 $\tilde{T}_n''(t) = -\omega^2(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$ 代入**方程**，得

$$\begin{aligned}\tilde{T}_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tilde{T}_n(t) &= \left[\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 - \omega^2\right](C\cos\omega t + D\sin\omega t)\\ &= f_n(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t\end{aligned}$$

- 比较**三角函数**的**系数**，推出 $C = \frac{c}{(n\pi a/l)^2 - \omega^2}$ 和 $D = \frac{d}{(n\pi a/l)^2 - \omega^2}$

Laplace 变换法

从而得到 $f_n(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t$ 时的**通解**为

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{c\cos\omega t + d\sin\omega t}{(n\pi a/l)^2 - \omega^2}$$

这个解在 $\omega = \dfrac{n\pi a}{l}$ 处**发散**，意味着**共振**的发生，因而前面假定 $\omega \neq \dfrac{n\pi a}{l}$

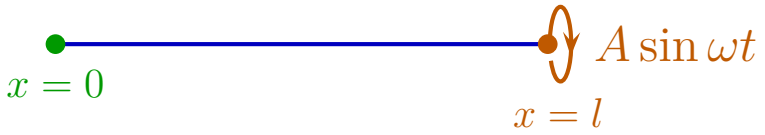
实际上，利用 **Laplace 变换法**可以简捷地求解**常微分方程初值问题**

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

Laplace 变换法也可用于求解**偏微分方程**的**定解问题**，但**本课程不作介绍**

前面讨论的弦振动问题

回到一开始讨论的**弦振动**问题



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l,\quad t>0) \\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=A\sin\omega t & (t\geq 0) \\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

前面在取 $u_0(x,t)=\dfrac{x}{l}A\sin\omega t$ 之后，$v(x,t)=u(x,t)-u_0(x,t)$ 满足**定解问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t & (0<x<l,\quad t>0) \\ v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0 & (t\geq 0) \\ v|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-\dfrac{\omega Ax}{l} & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

这是上述一般形式在 $f(x,t)=\dfrac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t$，$\varphi(x)=0$，$\psi(x)=-\dfrac{\omega Ax}{l}$ 时的**特例**

计算 $f_n(t)$

利用

$$\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = -\frac{l}{n\pi}\int_0^l x\,\mathrm{d}\cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{l}{n\pi}\left(x\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l - \int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{l}{n\pi}\left(l\cos n\pi - \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l\right) = -\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{(-)^n l^2}{n\pi}$$

得到 $$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2\omega^2 A}{l^2}\sin\omega t\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\omega^2 A}{l^2}\sin\omega t\left[-\frac{(-)^n l^2}{n\pi}\right] = -\frac{2(-)^n\omega^2 A}{n\pi}\sin\omega t$$

与 $f_n(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t$ 比较，有 $c = 0,\quad d = -\dfrac{2(-)^n\omega^2 A}{n\pi}$

故 $$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{c\cos\omega t + d\sin\omega t}{(n\pi a/l)^2 - \omega^2}$$

$$= A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{2\omega^2 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2}\sin\omega t$$

计算 $T_n(t)$

$\varphi(x)=0$ 意味着 $A_n=T_n(0)=\varphi_n=0$，而 $\psi(x)=-\dfrac{\omega A x}{l}$ 表明

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{2\omega A}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{2\omega A}{l^2}\frac{(-)^{n+1}l^2}{n\pi}=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}$$

$$B_n\frac{n\pi a}{l}+\frac{2\omega^3 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}=T_n'(0)=\psi_n=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{n\pi a}{l}B_n&=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}-\frac{2\omega^3 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}\left\{1-\frac{\omega^2}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\right\}\\&=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}\frac{-(n\pi a/l)^2}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}=-\frac{2\omega A n\pi a^2}{l^2}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\end{aligned}$$

因此 $B_n=-\dfrac{2\omega A a}{l}\dfrac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}$，从而

$$\begin{aligned}T_n(t)&=-\frac{2\omega A a}{l}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi a t}{l}+\frac{2\omega^2 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\omega t\\&=\frac{2\omega A a}{l}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t-\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\end{aligned}$$

定解问题的解

于是，$v(x,t)$ 的解为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \left(\frac{\omega l}{n\pi a} \sin \omega t - \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

最终，原定解问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= \frac{x}{l} A \sin \omega t + \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \left(\frac{\omega l}{n\pi a} \sin \omega t - \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

定解问题的解

于是，$v(x,t)$ 的解为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \left(\frac{\omega l}{n\pi a} \sin \omega t - \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

最终，原定解问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= \frac{x}{l} A \sin \omega t + \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \left(\frac{\omega l}{n\pi a} \sin \omega t - \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

前面取 $u_0(x,t) = A \dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)} \sin \omega t$ 时求得的解为

$$
\tilde{u}(x,t) = \frac{A}{\sin(\omega l/a)} \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}
$$

定解问题的解具有唯一性，虽然这两个解的形式不同，但实质是一样的

定解问题的解

于是，$v(x,t)$ 的解为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \left(\frac{\omega l}{n\pi a} \sin \omega t - \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

最终，原定解问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= \frac{x}{l} A \sin \omega t + \frac{2\omega A a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2} \left(\frac{\omega l}{n\pi a} \sin \omega t - \sin \frac{n\pi a t}{l} \right)} \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

当 $\omega \to \dfrac{n\pi a}{l}$ 时趋于 $\dfrac{(-)^n}{2n\pi a/l} \left(\dfrac{l}{n\pi a} \sin \dfrac{n\pi a t}{l} + t \cos \dfrac{n\pi a t}{l} \right)$

共振解的动画演示

比较两个解

为了从图像上比较两个解，定义

$$u_m(x,t) \equiv \frac{x}{l} A\sin\omega t + \frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t - \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\tilde{u}_m(x,t) \equiv \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

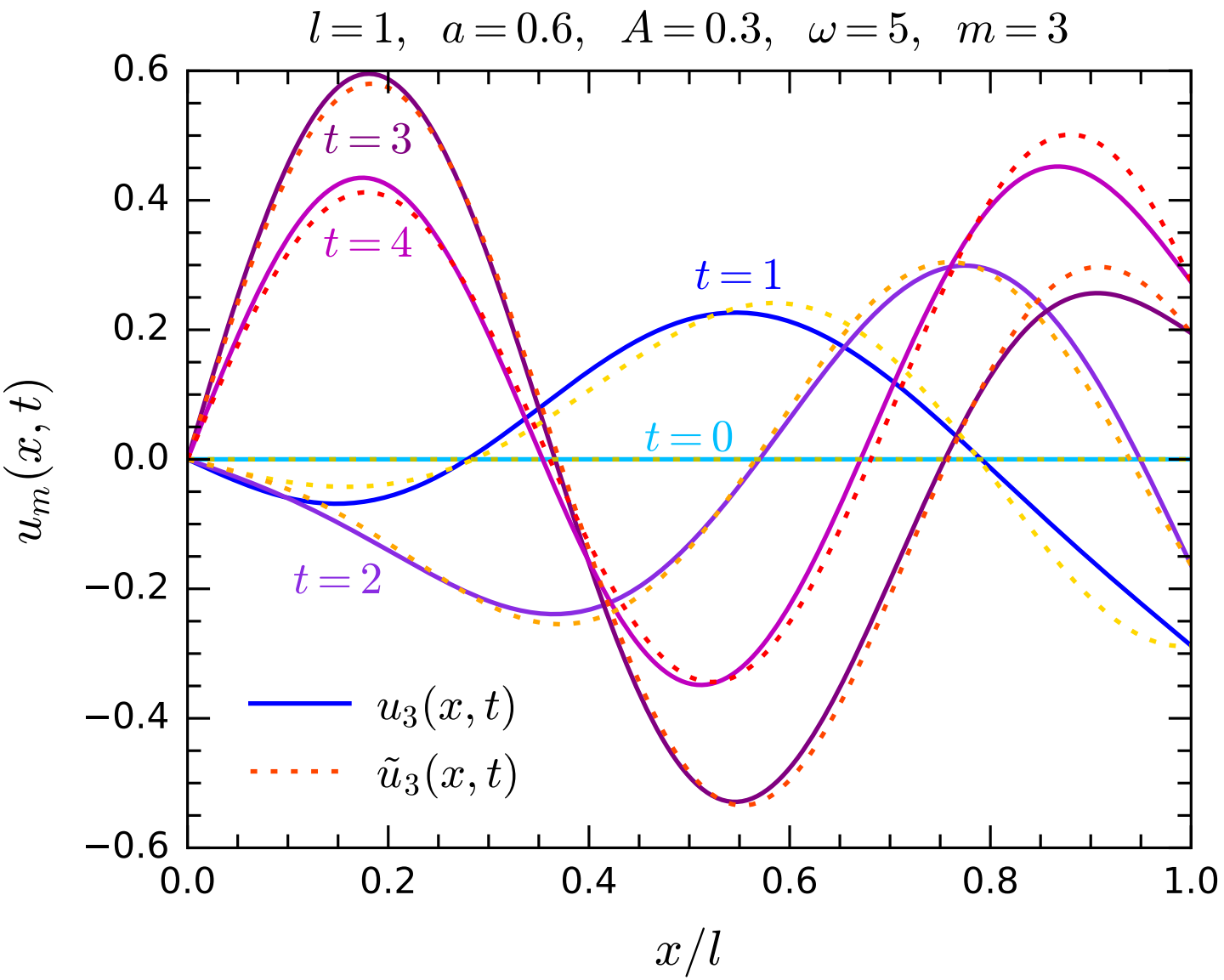
则两个解分别对应于

$$u(x,t) = \lim_{m\to\infty} u_m(x,t)$$

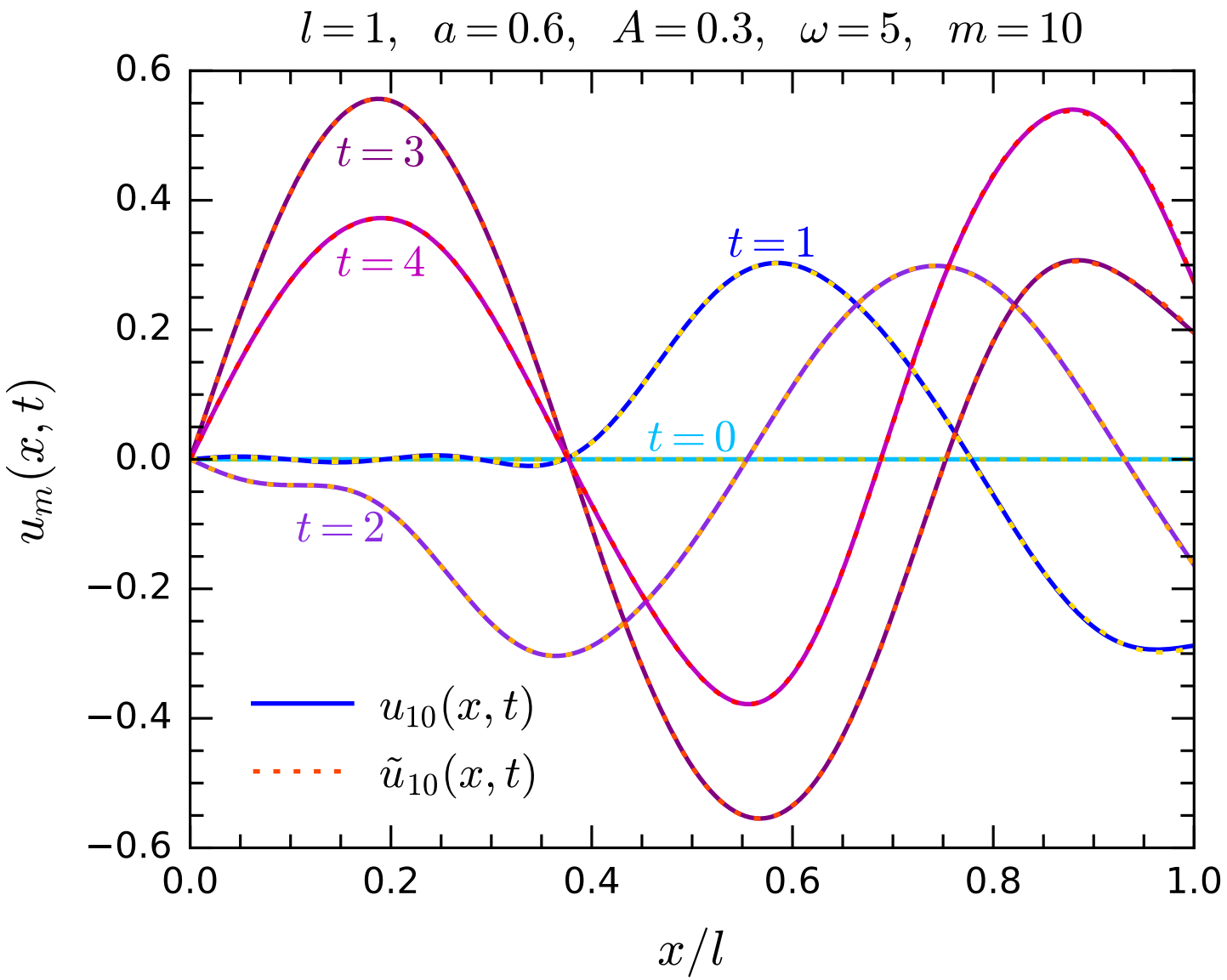
$$\tilde{u}(x,t) = \lim_{m\to\infty} \tilde{u}_m(x,t)$$

下面以 $m=3$、$m=10$ 和 $m=100$ 分别作图

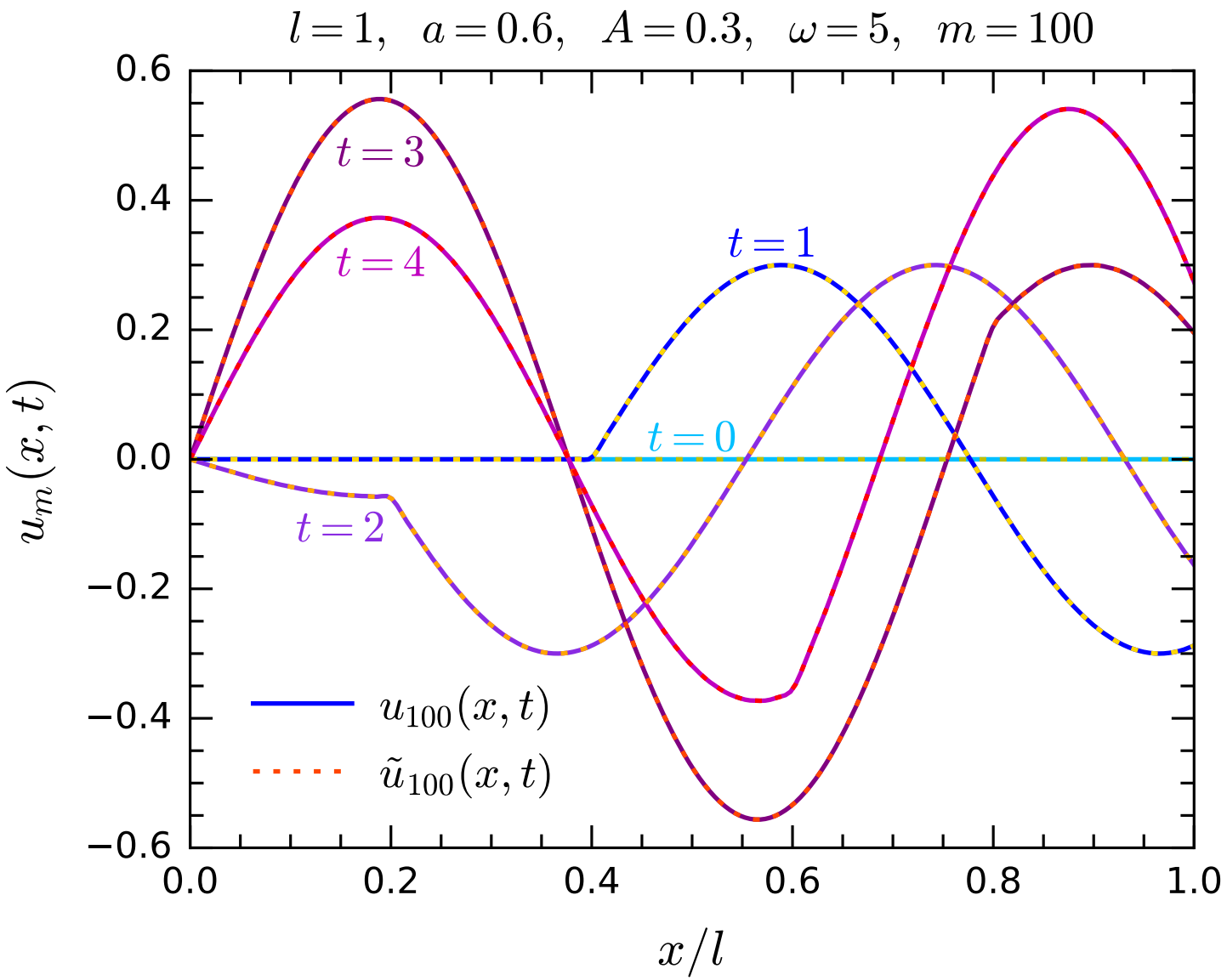
解的图像：$m=3$


$l=1,\quad a=0.6,\quad A=0.3,\quad \omega=5,\quad m=3$
$t=3$
$t=4$
$t=1$
$t=0$
$t=2$
$u_3(x,t)$
$\tilde{u}_3(x,t)$
$u_m(x,t)$
x/l
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

解的图像：$m = 10$


$l=1,\quad a=0.6,\quad A=0.3,\quad \omega=5,\quad m=10$
$t=3$
$t=4$
$t=1$
$t=0$
$t=2$
$u_{10}(x,t)$
$\tilde{u}_{10}(x,t)$
$u_m(x,t)$
x/l
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

解的图像：$m = 100$


$l=1,\quad a=0.6,\quad A=0.3,\quad \omega=5,\quad m=100$
$t=3$
$t=4$
$t=1$
$t=0$
$t=2$
$u_{100}(x,t)$
$\tilde{u}_{100}(x,t)$
$u_m(x,t)$
x/l
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

§3.4 边界条件齐次化的一般方法

- 一维波动方程或热传导方程定解问题边界条件的最一般形式是

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geq 0$，但 α 和 β 不同时为零，γ 和 δ 不同时为零
- 注意两式中的符号差异

§3.4 边界条件齐次化的一般方法

- 一维波动方程或热传导方程定解问题边界条件的最一般形式是

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geq 0$，但 α 和 β 不同时为零，γ 和 δ 不同时为零
- 注意两式中的符号差异
- 上述形式包括了第一、二、三类边界条件的各种情况
- 比如，在 $x=0$ 端，若 $\alpha=0$，则是第一类边界条件

  若 $\beta=0$，则是第二类边界条件

  若 $\alpha\beta\neq 0$，则是第三类边界条件

§3.4 边界条件齐次化的一般方法

- 一维波动方程或热传导方程定解问题边界条件的最一般形式是

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geq 0$，但 α 和 β 不同时为零，γ 和 δ 不同时为零
- 注意两式中的符号差异
- 上述形式包括了第一、二、三类边界条件的各种情况
- 比如，在 $x=0$ 端，若 $\alpha=0$，则是第一类边界条件

  若 $\beta=0$，则是第二类边界条件

  若 $\alpha\beta\neq 0$，则是第三类边界条件
- 前面指出，将边界条件齐次化的思路是构造一个尽可能简单的函数 $u_0(x,t)$
- 它与未知函数 $u(x,t)$ 满足相同的边界条件
- 然后令 $u(x,t)=v(x,t)+u_0(x,t)$，则新的未知函数 $v(x,t)$ 满足齐次的边界条件

构造 $u_0(x,t)$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 现在问题的关键是**构造** $u_0(x,t)$，它作为 t **的函数**，必定与 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 有关
- 由于**边界条件**只涉及 $x=0$ 和 $x=l$ 两个点，可以假设下列**对** x **为线性**的形式

$$u_0(x,t)=A(t)+xB(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$

构造 $u_0(x,t)$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 现在问题的关键是**构造** $u_0(x,t)$，它作为 t **的函数**，必定与 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 有关
- 由于**边界条件**只涉及 $x=0$ 和 $x=l$ 两个点，可以假设下列**对 x 为线性**的形式

$$u_0(x,t)=A(t)+xB(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$
- 如果**两端**都是**第二类**边界条件，则 $\beta=\delta=0$，符合**边界条件**的 $u_0(x,t)$ 必须满足

$$\left(\alpha\frac{\partial u_0}{\partial x}-\beta u_0\right)\bigg|_{x=0}=\alpha B(t)=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u_0}{\partial x}+\delta u_0\right)\bigg|_{x=l}=\gamma B(t)=\nu(t)$$

- 这两个式子只有当 $\dfrac{\mu(t)}{\alpha}=\dfrac{\nu(t)}{\gamma}=B(t)$ 时才能同时满足
- 因而**一般情况**下**不能使用** $u_0(x,t)=A(t)+xB(t)$

第一类边界条件

- 对于这种**两端**都是**第二类**边界条件的情况，可以假设下列**对 x 为二次**的形式

$$u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$
- 除了**这种情况**，都可以使用**线性形式** $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$，下面举几个例子

第一类边界条件

- 对于这种**两端**都是**第二类**边界条件的情况，可以假设下列**对 x 为二次**的形式

$$u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$
- 除了**这种情况**，都可以使用**线性形式** $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$，下面举几个例子

第一类边界条件： $u|_{x=0} = \mu(t)$， $u|_{x=l} = \nu(t)$

- 将 $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$ 代入**边界条件**，得

$$u_0|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad u_0|_{x=l} = A(t) + lB(t) = \nu(t)$$

- 故 $B(t) = \dfrac{1}{l}[\nu(t) - A(t)] = \dfrac{1}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$，于是

$$u_0(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$$

第二类和混合边界条件

- **第二类边界条件：** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t)$

- 将 $u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$ 代入**边界条件**，得

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=l} = A(t) + 2lB(t) = \nu(t)$$

- 故 $B(t) = \dfrac{1}{2l}[\nu(t) - A(t)] = \dfrac{1}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$，于是

$$u_0(x,t) = x\mu(t) + \frac{x^2}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$$

第二类和混合边界条件

- **第二类边界条件：** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t)$

将 $u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$ 代入**边界条件**，得

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=l} = A(t) + 2lB(t) = \nu(t)$$

故 $B(t) = \dfrac{1}{2l}[\nu(t) - A(t)] = \dfrac{1}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$，于是

$$u_0(x,t) = x\mu(t) + \frac{x^2}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$$

- **混合边界条件：** $u|_{x=0} = \mu(t), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t)$

将 $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$ 代入**边界条件**，得

$$u_0|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=l} = B(t) = \nu(t)$$

于是 $u_0(x,t) = \mu(t) + x\nu(t)$