数 学 物 理 方 法

第七章　分离变量法

第 1 节和第 2 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 5 月 16 日

第七章　分离变量法

- 本章开始研究偏微分方程的求解
- 对于常微分方程，求解思路通常是先求出其通解，其中含有若干个任意常数
- 任意常数的个数与常微分方程的阶数相同
- 然后用附加条件（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数

第七章 分离变量法

- 本章开始研究偏微分方程的求解
- 对于常微分方程，求解思路通常是先求出其通解，其中含有若干个任意常数
- 任意常数的个数与常微分方程的阶数相同
- 然后用附加条件（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数
- 对于偏微分方程，如果能求出通解，则里面含有任意函数，原则上由定解条件确定
- 但是，这通常是**做不到**的
- 除了极少数简单情况，人们并不知道怎样求出偏微分方程的通解
- 即使能求出通解，如果定解条件比较复杂，要想确定其中的任意函数也非常困难

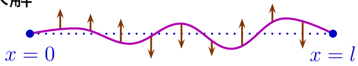
第七章　分离变量法

- 本章开始研究偏微分方程的求解
- 对于常微分方程，求解思路通常是先求出其通解，其中含有若干个任意常数
- 任意常数的个数与常微分方程的阶数相同
- 然后用附加条件（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数
- 对于偏微分方程，如果能求出通解，则里面含有任意函数，原则上由定解条件确定
- 但是，这通常是**做不到**的
- 除了极少数简单情况，人们并不知道怎样求出偏微分方程的通解
- 即使能求出通解，如果定解条件比较复杂，要想确定其中的任意函数也非常困难
- 因此，对于偏微分方程，只能根据方程和定解条件的各种具体情况分别加以研究
- 本章介绍的分离变量法是一种比较有效的方法
- 它的基本思路是设法将偏微分方程问题转化为若干个常微分方程问题来求解

§1 一维波动方程

§1.1 分离变量

- 本节以第一边值问题为例研究一维波动方程的求解
- 考虑两端固定的弦在初始激励下的自由振动



- 即给定初始位移和初始速度，求以后各时刻的位移 $u(x,t)$，定解问题为

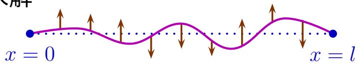
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l, \quad t>0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

- 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知函数，分别给出弦上各点的初始位移和初始速度

§1 一维波动方程

§1.1 分离变量

- 本节以**第一边值问题**为例研究**一维波动方程**的求解
- 考虑**两端固定**的**弦**在**初始激励**下的**自由振动**



- 即给定**初始位移**和**初始速度**，求以后各时刻的**位移** $u(x,t)$，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l, \quad t>0) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (t\geq 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

- 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是**已知**函数，分别给出**弦上各点**的**初始位移**和**初始速度**
- 现在尝试寻找 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 形式的**特解**，将它代入**一维波动方程**，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t)$$

- 其中 $'$ **号**表示对各自的自变量**求导**

常微分方程和初始条件

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$，左边与 t 无关，右边与 x 无关
- 两边相等，应与 x 和 t 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- 初始条件给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

常微分方程和初始条件

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$，左边与 t 无关，右边与 x 无关
- 两边相等，应与 x 和 t 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- 初始条件给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

- 然而，这两个初始条件是**不可能**成立的
- 它们表明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均与 $X(x)$ 成正比，从而两者成正比
- 但实际问题中初始位移和初始速度是可以相当任意的，一般**不可能**成正比
- $X'' + \lambda X = 0$ 的解是三角函数 $(\lambda > 0)$、指数函数 $(\lambda < 0)$ 或线性函数 $(\lambda = 0)$
- 与 $X(x)$ 成正比的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也必须是这些函数形式，这一般也是**不可能**的

边界条件

- 因此，我们暂时**不要求** $u(x,t) = X(x)T(t)$ **满足初始条件**
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

- 注意到 $T(t)$ **不能恒为零**，否则 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 是**平庸解** $u(x,t) \equiv 0$
- 故必须要求

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

边界条件

因此，我们暂时不要求 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 满足初始条件

$x=0$ 和 $x=l$ 处的边界条件给出

$$u|_{x=0}=X(0)T(t)=0, \quad u|_{x=l}=X(l)T(t)=0$$

注意到 $T(t)$ **不能恒为零**，否则 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 是**平庸解** $u(x,t)\equiv 0$

故必须要求

$$X(0)=0, \quad X(l)=0$$

如果 $T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$、$X''(x)+\lambda X(x)=0$ 和**以上边界条件**同时得到满足

那么形如 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 的**解**能够同时满足**一维波动方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

和**边界条件** $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$

至于**初始条件**，我们稍后再作考虑

§1.2 本征值问题

- 现在考虑方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$，它是常系数二阶线性齐次常微分方程
- 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数
- 在高等数学课中常用初始条件 $X(0)=c_0$ 和 $X'(0)=c_1$ 来确定这两个任意常数
- 但现在的附加条件是边界条件 $X(0)=X(l)=0$

§1.2 本征值问题

- 现在考虑方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$，它是常系数二阶线性齐次常微分方程
- 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数
- 在高等数学课中常用初始条件 $X(0)=c_0$ 和 $X'(0)=c_1$ 来确定这两个任意常数
- 但现在的附加条件是边界条件 $X(0)=X(l)=0$
- 在这样的条件下，非平庸解并**不一定**存在，除非系数 λ 取某些特定值
- 实际上，系数 λ 是在分离变量时引入的
- 我们只知道 λ 是常数，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定

§1.2 本征值问题

- 现在考虑方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$，它是常系数二阶线性齐次常微分方程
- 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数
- 在高等数学课中常用初始条件 $X(0)=c_0$ 和 $X'(0)=c_1$ 来确定这两个任意常数
- 但现在的附加条件是边界条件 $X(0)=X(l)=0$
- 在这样的条件下，非平庸解并**不一定**存在，除非系数 λ 取某些特定值
- 实际上，系数 λ 是在分离变量时引入的
- 我们只知道 λ 是常数，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定
- 也就是说，可以选择适当的 λ 值，使得方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 具有满足边界条件 $X(0)=X(l)=0$ 的非平庸解
- 这样的方程和边界条件构成了一个典型的本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, \quad X(l)=0 \end{cases}$
- 它的特点是常微分方程中含有一个未定参数 λ，并附有边界条件

求解本征值问题

本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$

- 使问题存在非平庸解的 λ 值称为本征值，相应的非平庸解称为本征函数
- 在第十章 §5 将总结这类本征值问题的一般提法并阐述其一般结论
- 这里直接对它进行求解

求解本征值问题

本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$

- 使问题存在**非平庸解**的 λ **值**称为**本征值**，相应的非平庸解称为**本征函数**
- 在**第十章 §5** 将总结这类**本征值问题**的**一般提法**并阐述其**一般结论**
- 这里直接对它进行求解

1. 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2\ (\mu > 0)$

- 则方程的解为 $X(x) = C\cosh\mu x + D\sinh\mu x$，其中 C、D 是**任意常数**
- 代入**边界条件**，利用 $\cosh 0 = 1$ 和 $\sinh 0 = 0$
- 得 $C = X(0) = 0$，$X(l) = D\sinh\mu l = 0$
- 由于 $\mu l > 0$，有 $\sinh\mu l \neq 0$，故 $D = 0$
- 于是 $X(x) \equiv 0$，这是**平庸解**，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

$$\begin{aligned} X''(x) &= \mu^2 X(x) \\ (\cosh\mu x)' &= \mu\sinh\mu x \\ (\sinh\mu x)' &= \mu\cosh\mu x \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的情况

本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$

2️⃣ 如果 $\lambda = 0$，则方程的解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

代入**边界条件**，$D = X(0) = 0$，$X(l) = Cl = 0$，故 $C = 0$

从而 $X(x) \equiv 0$，这是**平庸解**，因而 $\lambda = 0$ **不是**本征值

$\lambda=0$ 和 $\lambda>0$ 的情况

本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, \quad X(l)=0 \end{cases}$

2 如果 $\lambda=0$，则方程的解为 $X(x)=Cx+D$，其中 C、D 是**任意常数**

代入**边界条件**，$D=X(0)=0$，$X(l)=Cl=0$，故 $C=0$

从而 $X(x)\equiv 0$，这是**平庸解**，因而 $\lambda=0$ **不是**本征值

3 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\mu^2\ (\mu>0)$

则方程的解为 $X(x)=C\cos\mu x+D\sin\mu x$

其中 C、D 是**任意常数**

代入**边界条件**，利用 $\cos 0=1$ 和 $\sin 0=0$

得 $C=X(0)=0$，$X(l)=D\sin\mu l=0$

为了得到**非平庸解**，必须使 $\sin\mu l=0$，如此则 D 可取**任意值**

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu^2 X(x) \\ (\cos\mu x)' &= -\mu\sin\mu x \\ (\sin\mu x)' &= \mu\cos\mu x \end{aligned}$$

本征值和本征函数

- 因此，$\sin \mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 是**正弦函数**的**正零点**
- 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中已取 $D = 1$

本征值和本征函数

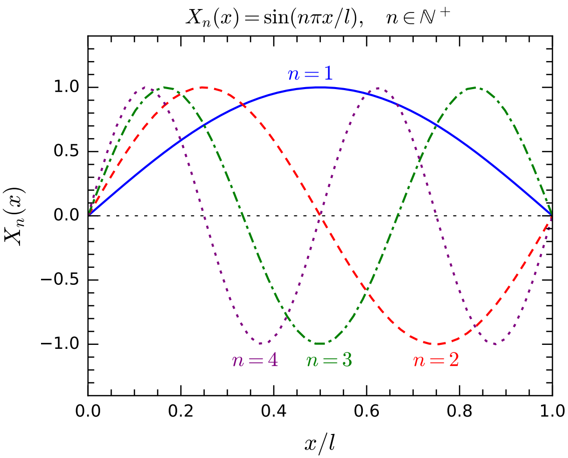
- 因此，$\sin \mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l} \ (n \in \mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 是**正弦函数**的**正零点**
- 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中已取 $D = 1$
- 这是因为我们还要将**本征值** λ_n 代回方程 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 以求解 $T(t)$
- 求出来的**解** $T_n(t)$ 会包含两个**任意常数**
- 我们关心的是 $u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$，而不是 $X_n(x)$ 或 $T_n(t)$ 本身
- 因此可以将**常数** D 并入 $T_n(t)$ 的**任意常数**之中，在此处直接取 $D = 1$

本征函数的图像

本征值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, **本征函数** $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}^+$



§1.3 本征函数族的正交完备性

- 在继续求解之前，先介绍**本征函数族** $\left\{X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个重要性质
- 首先，**该本征函数族**在**区间** $[0, l]$ 上是**正交**的
- 这指的是两个**不同本征函数** $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 的**内积** $(X_m(x), X_n(x))$ 为**零**，即

$$(X_m(x), X_n(x)) \equiv \int_0^l X_m(x) X_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\, \mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n$$

- 其中第一步是**内积**的**定义**

> **三维空间**中**矢量** $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z$ 的**内积**定义为
>
> $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
>
> - **矢量** $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **正交**意味着 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$
> - **矢量** $\boldsymbol{A}$ 与自身的**内积**为 $|\boldsymbol{A}|^2 \equiv \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \geqslant 0$ 称为它的**模方**

§1.3 本征函数族的正交完备性

- 在继续求解之前，先介绍**本征函数族** $\left\{X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个重要性质
- 首先，**该本征函数族**在**区间** $[0,l]$ 上是**正交**的
- 这指的是两个**不同本征函数** $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 的**内积** $(X_m(x),X_n(x))$ 为**零**，即

$$(X_m(x),X_n(x))\equiv\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\qquad m\neq n$$

- 其中第一步是**内积**的**定义**

利用**积化和差公式**，有

$$\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}-\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\bigg|_0^l-\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\bigg|_0^l\right]=0$$

本征函数的模方

本征函数 $X_n(x)$ 与自身的**内积**称为它的**模方** $\|X_n(x)\|^2$，有

$$\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l\right) = \frac{l}{2}$$

本征函数的模方

本征函数 $X_n(x)$ 与自身的内积称为它的模方 $\|X_n(x)\|^2$，有

$$\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l\right) = \frac{l}{2}$$

将上式与 $(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 0\ (m\neq n)$ 合起来写作

$$(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn},$$

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}^+$$

Leopold Kronecker
(1823–1891)

其中 Kronecker δ 符号定义为 $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

本征函数族的完备性

🔧 其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0,l]$ 上是完备的

🪓 这指的是，对于区间 $[0,l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

🪛 解析性质良好通常指具有分段连续、连续或可微等解析性质

本征函数族的完备性

- 其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0,l]$ 上是完备的
- 这指的是，对于区间 $[0,l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

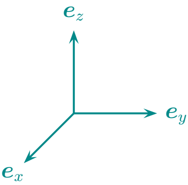
- 解析性质良好通常指具有分段连续、连续或可微等解析性质
- 将上式的求和指标 n 改写为 k，两边乘以 $\sin(n\pi x/l)$，对 x 从 0 到 l 积分，得

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{l}{2}\delta_{kn}=a_n\frac{l}{2}$$

- 其中级数应当一致收敛，才能逐项积分，对此不作深究
- 于是，展开系数表达为 $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$

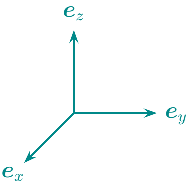
说明

- 在**本征函数族** $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备**了
- 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 构成三维空间的一组**基底**
- 三维空间中任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备**的
- 倘若只有 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 两个，就**不完备**了



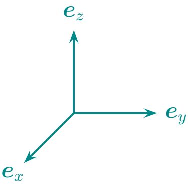
说明

- 在**本征函数族** $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备**了
- 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 构成三维空间的一组**基底**
- 三维空间中任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备**的
- 倘若只有 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 两个，就**不完备**了
- 即使 $f(x)$ **函数**与**本征函数族不具有**相同的**边界条件**
- 上述**展开式基本上**还是**正确**的，只在**端点处可能不成立**
- 对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况



说明

- 在本征函数族 $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就不完备了
- 这一点可以类比三维空间，单位矢量 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 构成三维空间的一组基底
- 三维空间中任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是完备的
- 倘若只有 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 两个，就不完备了



- 即使 $f(x)$ 函数与本征函数族**不具有**相同的边界条件
- 上述展开式基本上还是正确的，只在端点处可能不成立
- 对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况
- 本课程遇到的本征值问题均属于 **Sturm-Liouville 型**，将在第十章 §5 作一般讨论
- 这类本征值问题的本征函数族都是正交和完备的
- 如果本征函数的形式比较复杂，则正交性难以直接验证，但可以利用它们满足的方程和边界条件加以证明
- 完备性的证明比较困难，本课程将直接引用结论而不作证明

§1.4 一般解

将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}$$

其中 A_n 和 B_n 是**任意常数**

§1.4 一般解

- 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}$$

- 其中 A_n 和 B_n 是**任意常数**

- 于是得到满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 的**一系列特解**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 这些解称为**弦**的**本征振动**

§1.4 一般解

- 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}$$

- 其中 A_n 和 B_n 是**任意常数**

- 于是得到满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 的**一系列特解**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 这些解称为**弦**的**本征振动**

- 但是，这些解**一般并不满足初始条件** $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$

- 除非 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 同时正比于某个**本征函数** $\sin\frac{n\pi x}{l}$

一般解

- 现在，注意到**方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$ 都是**齐次**的
- 所以将上述**各特解叠加**后仍然满足**方程**和**边界条件**
- 于是可以写出下面的**一般解**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表**弦**在**两端固定**时的**最一般振动形式**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(x,t) = 0$$

$$u\big|_{x=0,l} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\big|_{x=0,l} = 0$$

一般解

🌱 现在，注意到方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$ 都是齐次的

🌿 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

🌺 于是可以写出下面的一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

🌷 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

🌼 我们希望通过适当选取其中的任意常数 A_n 和 B_n

🏵️ 可以使给定的初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ 也得到满足

💐 这样一来，它就满足定解问题的所有条件了

一般解

- 现在，注意到方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$ 都是齐次的
- 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件
- 于是可以写出下面的一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式
- 我们希望通过适当选取其中的任意常数 A_n 和 B_n
- 可以使给定的初始条件 $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ 也得到满足
- 这样一来，它就满足定解问题的所有条件了
- 注　一般解已**不具有**分离变量的形式，而且一般解**不是**通解
- 通解应该只满足偏微分方程，不同定解条件可通过调节通解中的任意函数来满足

关于一般解的说明

- 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件
- 如果边界条件有所改变，那么它就**不成立**了，这时需要从头开始求解
- 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件

关于一般解的说明

- 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件
- 如果边界条件有所改变，那么它就**不成立**了，这时需要从头开始重新求解
- 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件
- 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件
- 这里实际上假定了级数可以逐项求导
- 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是**非常苛刻**的

关于一般解的说明

- 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件
- 如果边界条件有所改变，那么它就**不成立**了，这时需要从头开始重新求解
- 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件
- 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件
- 这里实际上假定了级数可以逐项求导
- 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是**非常苛刻**的
- 这些条件归结为对系数 A_n 和 B_n 的限制，而它们由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 决定
- 所以最终归结为对 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的解析性质的限制，具体情况不再深入讨论
- 今后我们假定所有形式操作 (如逐项求导、逐项积分等) 都是合法的
- 不对其成立条件加以深究

§1.5 用初始条件确定系数

一般解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 对 t 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件，推出

$$u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

§1.5 用初始条件确定系数

一般解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 对 t 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件，推出

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

根据前面的讨论，**本征函数族** $\{\sin(n\pi x/l)\}_{n=1}^{\infty}$ 是**完备**的

只要 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的**解析性质良好**，就能选取适当的 A_n 和 B_n 使以上两式成立

参照 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ 和 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$，有

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\qquad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

分离变量法

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出系数 A_n 和 B_n
- 将它们代回一般解，就得到定解问题的最终答案

分离变量法

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出**系数** A_n 和 B_n
- 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案
- 由于以上方法的出发点是**特解** $u(x,t) = X(x)T(t)$
- 它具有**分离变量**的形式，即 x **的函数**与 t **的函数**是**分离**的
- 而**一般解**是一系列这样的**特解**的**叠加**，因此这种方法称为**分离变量法**

分离变量法

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出系数 A_n 和 B_n
- 将它们代回一般解，就得到定解问题的最终答案
- 由于以上方法的出发点是特解 $u(x,t) = X(x)T(t)$
- 它具有分离变量的形式，即 x 的函数与 t 的函数是分离的
- 而一般解是一系列这样的特解的叠加，因此这种方法称为分离变量法
- 它是 **J. Fourier** 在 18 世纪初最先引入的，所以也称为 **Fourier 方法**
- 实际上，一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l} \right) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

就是 x 的正弦 **Fourier 级数**

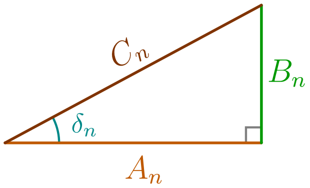
- 一般解中的每一项都是驻波，所以这种方法又称为驻波法

Joseph Fourier
(1768–1830)

§1.6 解的物理图像

- 由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 可以看出，弦上的**一般振动**是一系列**本征振动**的叠加
- 每一个**本征振动**的形式为 $u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$
- 令 $C_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，$\delta_n\equiv\arctan\frac{B_n}{A_n}$，则

$$\frac{A_n}{C_n}=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\cos\delta_n,\qquad \frac{B_n}{C_n}=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\sin\delta_n$$



§1.6 解的物理图像

- 由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 可以看出，弦上的**一般振动**是一系列**本征振动**的叠加
- 每一个**本征振动**的形式为 $u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$
- 令 $C_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，$\delta_n\equiv\arctan\frac{B_n}{A_n}$，则

$$\frac{A_n}{C_n}=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\cos\delta_n,\qquad \frac{B_n}{C_n}=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\sin\delta_n$$

- 记 $k_n\equiv\frac{n\pi}{l}$，$\omega_n\equiv k_n a=\frac{n\pi a}{l}$，推出

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=C_n\sin k_nx\left(\frac{A_n}{C_n}\cos\omega_nt+\frac{B_n}{C_n}\sin\omega_nt\right)\\&=C_n\sin k_nx\,(\cos\omega_nt\cos\delta_n+\sin\omega_nt\sin\delta_n)=C_n\sin k_nx\cos(\omega_nt-\delta_n)\end{aligned}$$

- 这个结果代表**一列驻波**，对于给定的 n，弦上**各点**以同样的**频率** ω_n 振动
- **初相位** $-\delta_n$ 也是**各点相同**，只是在**节点两侧相差** π（因为振幅的符号**相反**）
- **振幅** $|C_n\sin k_nx|$ 则是**位置的函数**

§1.6 解的物理图像

- 由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 可以看出，弦上的**一般振动**是一系列**本征振动**的叠加
- 每一个**本征振动**的形式为 $u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$
- 令 $C_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，$\delta_n\equiv\arctan\frac{B_n}{A_n}$，则

$$\frac{A_n}{C_n}=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\cos\delta_n,\qquad \frac{B_n}{C_n}=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\sin\delta_n$$

- 记 $k_n\equiv\frac{n\pi}{l}$，$\omega_n\equiv k_na=\frac{n\pi a}{l}$，推出

驻波的动画演示

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=C_n\sin k_nx\left(\frac{A_n}{C_n}\cos\omega_nt+\frac{B_n}{C_n}\sin\omega_nt\right)\\&=C_n\sin k_nx\left(\cos\omega_nt\cos\delta_n+\sin\omega_nt\sin\delta_n\right)=C_n\sin k_nx\cos(\omega_nt-\delta_n)\end{aligned}$$

- 这个结果代表**一列驻波**，对于给定的 n，弦上**各点**以同样的**频率** ω_n 振动
- **初相位** $-\delta_n$ 也是**各点相同**，只是在**节点两侧相差** π（因为振幅的符号**相反**）
- **振幅** $|C_n\sin k_nx|$ 则是**位置的函数**

驻波的特点

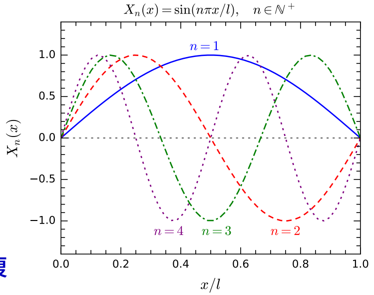
- $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$ 只决定于系统的性质 (弦的长度、线密度和张力) 和边界条件，而与初始条件无关，故称为本征频率
- 另一方面，$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ 和 $\delta_n = \arctan \dfrac{B_n}{A_n}$ 则与初始条件有关
- $n = 1$ 的振动称为基波，频率为 $\omega_1 = \dfrac{\pi a}{l}$
- 由于 $\omega_n = n\omega_1$ ，故 $n > 1$ 的振动称为 n 次谐波

驻波的特点

- $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$ 只决定于系统的性质（弦的长度、线密度和张力）和边界条件，而与初始条件无关，故称为本征频率
- 另一方面，$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ 和 $\delta_n = \arctan \dfrac{B_n}{A_n}$ 则与初始条件有关
- $n = 1$ 的振动称为基波，频率为 $\omega_1 = \dfrac{\pi a}{l}$
- 由于 $\omega_n = n\omega_1$，故 $n > 1$ 的振动称为 n 次谐波
- 驻波 $u_n(x,t) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n)$ 上有一些点振幅为零
- 这些点永远不动，称为波节或节点
- 节点满足 $k_n x = \dfrac{n\pi x}{l} = m\pi$，因而位置在

$$x = \frac{m}{n}l, \quad m = 0, 1, \cdots, n$$

- 可见，n 次谐波包括端点共有 $n+1$ 个节点
- 基波除端点外没有节点。振幅最大的点称为波腹
- 相邻节点间有一个波腹，n 次谐波共有 n 个波腹



特例

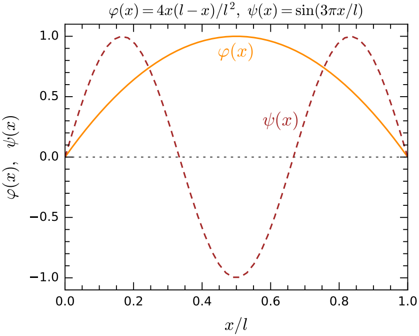
考虑**特例**

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \ (n \neq 3)$$



一般解化为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}$$

特例

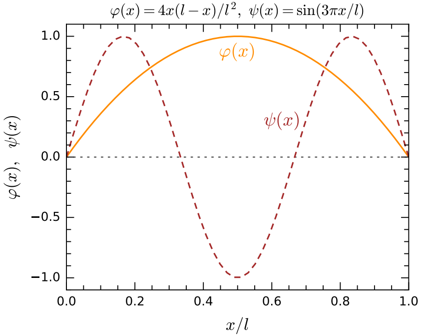
考虑**特例**

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0\ (n \neq 3)$$



一般解化为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

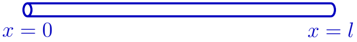
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}$$

解的动画演示

§2　一维热传导方程

§2.1　分离变量与本征值问题

- 本节以**第二边值问题**为例研究**一维热传导方程**的求解
- 考虑**侧面**和**两端绝热**的**细杆**的**热传导**问题



- 即给定**初始温度分布**，求以后各时刻的**温度** $u(x,t)$，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l,\quad t>0) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

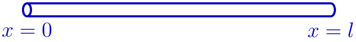
- 其中 $\varphi(x)$ 是**已知**函数，给出杆上各点的初始温度分布

§2 一维热传导方程

§2.1 分离变量与本征值问题

本节以**第二边值问题**为例研究**一维热传导方程**的求解

考虑**侧面**和**两端绝热**的**细杆**的**热传导**问题



即给定**初始温度分布**，求以后各时刻的**温度** $u(x,t)$，定解问题为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\
u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l)
\end{cases}
$$

其中 $\varphi(x)$ 是**已知**函数，给出杆上各点的初始温度分布

现在尝试寻找 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 形式的**特解**，将它代入**一维热传导方程**，得

$$
0 = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T'(t) - a^2X''(x)T(t)
$$

本征值问题

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}$，左边与 t 无关，右边与 x 无关，必为常数，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个常微分方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的边界条件给出

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

- 从而得到本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

本征值问题

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}$，**左边与 t 无关**，**右边与 x 无关**，必为**常数**，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个**常微分方程** $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$
- 1 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cosh\mu x + D\sinh\mu x$
- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $X'(x) = C\mu\sinh\mu x + D\mu\cosh\mu x$
- 由于 $\mu > 0$，$X'(0) = D\mu = 0$ 表明 $D = 0$
- 由于 $l > 0$，$X'(l) = C\mu\sinh\mu l = 0$ 表明 $C = 0$
- 于是得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

本征值和本征函数

- 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**
- 由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$，故 $C = 0$，而 D 可**任意**
- 于是得到**本征值** $\lambda_0 = 0$，**本征函数** $X_0(x) = 1$，其中已取 $D = 1$
- 注意这里与**第一边值问题**的区别，如果**遗漏**这个解，**本征函数族**将是**不完备**的

本征值和本征函数

2 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$，故 $C = 0$，而 D 可**任意**

于是得到**本征值** $\lambda_0 = 0$，**本征函数** $X_0(x) = 1$，其中已取 $D = 1$

注意这里与**第一边值问题**的区别，如果**遗漏**这个解，**本征函数族**将是**不完备**的

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

其中 C、D 是**任意常数**，有 $X'(x) = -C\mu\sin\mu x + D\mu\cos\mu x$

由 $X'(0) = D\mu = 0$ 得 $D = 0$，从而 $X'(l) = -C\mu\sin\mu l = 0$

本征值和本征函数

2 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$，故 $C = 0$，而 D 可**任意**

于是得到**本征值** $\lambda_0 = 0$，**本征函数** $X_0(x) = 1$，其中已取 $D = 1$

注意这里与**第一边值问题**的区别，如果**遗漏**这个解，**本征函数族**将是**不完备**的

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

其中 C、D 是**任意常数**，有 $X'(x) = -C\mu\sin\mu x + D\mu\cos\mu x$

由 $X'(0) = D\mu = 0$ 得 $D = 0$，从而 $X'(l) = -C\mu\sin\mu l = 0$

为了得到**非平庸解**，必须使 $\sin\mu l = 0$，如此则 C 可**任意**

因此 $\sin\mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 是**正弦函数**的**零点**，于是得到**本征值**和**本征函数**

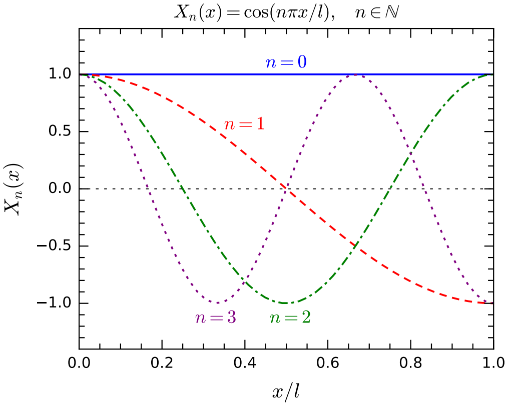
$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\mu_n x = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取 $C = 1$

本征函数的图像

- 注意 $X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ 在 $n=0$ 时退化为 $X_0(x)=1$
- 因此，可以把**所有**的**本征值**和**本征函数**统一写成

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l},\quad n\in\mathbb{N}$$



§2.2 本征函数族的正交完备性

与上节情况类似，**本征函数族** $\left\{X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 具有**正交完备性**

首先，该本征函数族在**区间** $[0,l]$ 上是**正交**的：

$$(X_m(x),X_n(x))=\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\quad m,n\in\mathbb{N}^+,\quad m\neq n$$

$$(X_0(x),X_n(x))=\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

利用**积化和差公式**，有

$$\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\bigg|_0^l+\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\bigg|_0^l\right]=0$$

$$\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l=0$$

本征函数的模方

- 本征函数的模方定义为 $\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$
- 当 $n=0$ 时，$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \int_0^l \mathrm{d}x = l$
- 当 $n \neq 0$ 时，有

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos \frac{2n\pi x}{l} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2n\pi}\sin \frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l + x\Big|_0^l\right) = \frac{l}{2}$$

- 归纳起来，模方表达为

$$\|X_n(x)\|^2 = \begin{cases} l, & n=0 \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

本征函数族的完备性

- 其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0,l]$ 上是完备的
- 从而，对于区间 $[0,l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

本征函数族的完备性

- 其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0,l]$ 上是完备的
- 从而，对于区间 $[0,l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\qquad x\in[0,l]$$

- 将上式的求和指标 n 改写为 k，两边乘以 $\cos(n\pi x/l)$，对 x 从 0 到 l 积分，得

$$\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^l\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=a_n\|X_n(x)\|^2,\qquad n\in\mathbb{N}$$

- 第二步用到本征函数族的正交性，只有 $k=n$ 那一项的贡献**非零**
- 于是，展开系数表达为

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

§2.3 一般解

- 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中 A_0 和 A_n 是**任意常数**
- 于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= X_0(x)T_0(t) = 1 \cdot A_0 = A_0 \\ u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

§2.3 一般解

- 将本征值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中 A_0 和 A_n 是任意常数
- 于是得到一系列满足一维热传导方程和边界条件的特解

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= X_0(x)T_0(t) = 1 \cdot A_0 = A_0 \\ u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

- 将这些特解叠加，就得到满足方程和边界条件的一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos\frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表细杆两端绝热时温度分布的最一般形式
- 适当选取其中的任意常数 A_0 和 A_n，就可以满足给定的初始条件

§2.4 用初始条件确定系数

- 将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

- 由于本征函数族 $\{\cos\ n\pi x/l\ \}_{n=0}^{\infty}$ 是完备的，只要 $\varphi(x)$ 具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 给定 $\varphi(x)$ 的具体形式，就可以计算出以上积分
- 将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

§2.4 用初始条件确定系数

- 将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

- 由于本征函数族 $\{\cos\ n\pi x/l\ \}_{n=0}^{\infty}$ 是完备的，只要 $\varphi(x)$ 具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 给定 $\varphi(x)$ 的具体形式，就可以计算出以上积分
- 将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

- 如果初始时刻不是 $t=0$，而是 $t=\tau$，那么只需将原一般解中的 t 改成 $t-\tau$
- 就得到相应的一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-\lambda_n a^2(t-\tau)]\cos\dfrac{n\pi x}{l}$
- 其中系数 A_0 和 A_n 由初始条件 $u|_{t=\tau} = \varphi(x)$ 决定，仍然由上面的表达式给出

§2.5 解的物理图像

- 在一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中
- 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$
- 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性
- 而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的

§2.5 解的物理图像

- 在一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos\frac{n\pi x}{l}$ 中
- 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$
- 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性
- 而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的
- 当 $t \to \infty$ 时，有 $u(x,t) \to A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

⚠ 注意，如果在一般解表达式中不把常数项 A_0 单独写出来，而且**忽视** $\lambda_0 = 0$ 这一事实，那么就很容易得出 $u(x,t) \to 0$ 的错误结果

- 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值 A_0

§2.5 解的物理图像

- 在一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos\frac{n\pi x}{l}$ 中
- 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$
- 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性
- 而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的
- 当 $t\to\infty$ 时，有 $u(x,t)\to A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

⚠ 注意，如果在一般解表达式中不把常数项 A_0 单独写出来，而且**忽视** $\lambda_0 = 0$ 这一事实，那么就很容易得出 $u(x,t)\to 0$ 的错误结果

- 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值 A_0
- 这是因为杆的侧面和两端都是绝热的，热量只能在内部流动
- 根据热传导的 Fourier 定律，热量总是从高温处流向低温处，最后温度趋于均匀
- 根据能量守恒定律，最终温度只能是初始温度的平均值

特例

考虑**特例** $\varphi(x)=\sin^2\dfrac{2\pi x}{l}$，由 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 得

$$u|_{t=0}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi x}{l}$$

比较两边，得到**系数**

$$A_0=\frac{1}{2},\quad A_4=-\frac{1}{2},\quad A_n=0\ (n\neq 0,4)$$

定解问题的**解**为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\exp\left[-\left(\frac{4\pi a}{l}\right)^2 t\right]\cos\frac{4\pi x}{l}$$

特例

考虑**特例** $\varphi(x) = \sin^2 \dfrac{2\pi x}{l}$，由 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 得

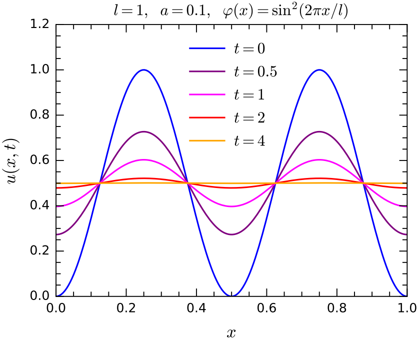
$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi x}{l}$$

比较两边，得到**系数**

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0\ (n \neq 0, 4)$$

定解问题的**解**为

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left[-\left(\frac{4\pi a}{l}\right)^2 t\right]\cos\frac{4\pi x}{l}$$



解的动画演示