数 学 物 理 方 法

第六章　数学物理方程的导出

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 10 月 22 日

第六章　数学物理方程的导出

- 本章开始研究本课程的第二部分，即**数学物理方程**
- 它研究物理或工程问题中所涉及的各种**偏微分方程**、**积分方程**和**微分—积分方程**
- 本课程只研究**偏微分方程**，而且只限于**二阶线性偏微分方程**

第六章 数学物理方程的导出

- 本章开始研究本课程的第二部分，即**数学物理方程**
- 它研究物理或工程问题中所涉及的各种**偏微分方程**、**积分方程**和**微分－积分方程**
- 本课程只研究**偏微分方程**，而且只限于**二阶线性偏微分方程**
- 内容包括方程的**导出**、**求解**和**对解的物理分析**，即以下三步

1. 在一定的条件下将**物理问题简化**，忽略一些次要因素，应用**物理学的基本规律**将它翻译成**数学问题**
2. **求解**所得的**数学问题**，这部分是**重点**
3. 之后，**分析**所得**解**的**物理图象**、**意义**和**适用范围**等

第六章　数学物理方程的导出

- 本章开始研究本课程的第二部分，即数学物理方程
- 它研究物理或工程问题中所涉及的各种偏微分方程、积分方程和微分－积分方程
- 本课程只研究偏微分方程，而且只限于二阶线性偏微分方程
- 内容包括方程的导出、求解和对解的物理分析，即以下三步

1. 在一定的条件下将物理问题简化，忽略一些次要因素，应用物理学的基本规律将它翻译成数学问题
2. 求解所得的数学问题，这部分是重点
3. 之后，分析所得解的物理图象、意义和适用范围等

- 这部分内容所提供的方法在经典物理、近代物理和工程技术中都有广泛的应用
- 它对于学好后续四大力学课程以及相关研究生基础课程，乃至于将来从事研究工作都有重要作用，因为它不仅提供了具体的数学方法，也培养了思维方式和计算能力
- 这部分内容有一定的难度，主要是**计算比较复杂**
- 但只要同学们多思考，多动手计算，就能够逐步适应，渐入佳境

§1 简介

- 含有未知函数及其偏导数的方程称为偏微分方程 (partial differential equation)
- 如果方程只包含未知函数及其偏导数的一次项，则称为线性偏微分方程
- 方程中出现的偏导数的最高阶数称为方程的阶
- 本课程只研究二阶线性偏微分方程
- 以两个自变量的情况为例，记自变量为 x 和 y，未知函数为 $u(x,y)$，则二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu+f=0$$

§1 简介

- 含有未知函数及其偏导数的方程称为偏微分方程 (partial differential equation)
- 如果方程只包含未知函数及其偏导数的一次项，则称为线性偏微分方程
- 方程中出现的偏导数的最高阶数称为方程的阶
- 本课程只研究二阶线性偏微分方程
- 以两个自变量的情况为例，记自变量为 x 和 y，未知函数为 $u(x,y)$，则二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu+f=0$$

- 其中 a_{11} 等系数和 f 都可以是 x 和 y 的函数
- 如果 $f=0$，称其为齐次方程，否则称为非齐次方程
- 上式类似于二次曲线的一般形式

$$\alpha_1 x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2+\beta_1 x+\beta_2 y+\varphi=0$$

标准形式和三种类型

- 通过坐标的旋转和平移，可以将二次曲线化为标准形式
- 与此类似，通过适当的自变量变换和函数变换，也可以将二阶线性偏微分方程简化为标准形式
- 二次曲线有三种不同类型，即双曲线、抛物线和椭圆
- 与此类似，二阶线性偏微分方程也有三种不同类型，称为双曲型、抛物型和椭圆型

标准形式和三种类型

- 通过坐标的旋转和平移，可以将二次曲线化为标准形式
- 与此类似，通过适当的自变量变换和函数变换，也可以将二阶线性偏微分方程简化为标准形式
- 二次曲线有三种不同类型，即双曲线、抛物线和椭圆
- 与此类似，二阶线性偏微分方程也有三种不同类型，称为双曲型、抛物型和椭圆型
- 曲线或方程的类型不因变换而改变，但化为标准形式后，各类型的特征一目了然
- 更重要的是，如果能够求解标准形式，一般形式的解就可以通过适当的变换得到
- 关于分类和化简的具体细节，可参看选读 §2
- 本节只介绍物理上常见的三类方程的标准形式，这比数学上所指的标准形式还要简单

§1.1 波动方程

- 在三维空间中，波动方程的标准形式为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = f}$$

- 其中 $u = u(\boldsymbol{r}, t)$ 是所要研究的物理量，比如位移或电场（磁场）的一个分量
- $\boldsymbol{r}$ 是空间位置，t 是时间，a 是常数，$f = f(\boldsymbol{r}, t)$ 是已知函数，代表波动的源
- ∇^2 是 Laplace 算符，有些书记作 Δ，直角坐标系中 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
- 但应注意，这并不是 Laplace 算符的定义
- Laplace 算符的定义是 $\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u$，具有确定的几何意义，不依赖于坐标系
- 在一维空间中，波动方程的标准形式为 $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f}$
- 这可以描写弦的横振动或弹性细杆的纵振动。在数学上，波动方程属于双曲型

§1.2 热传导方程和扩散方程

- 热传导方程和扩散方程统称为输运方程
- 在三维空间中，输运方程的标准形式为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = f}$$

- $u = u(\boldsymbol{r}, t)$ 是所要研究的物理量，$f = f(\boldsymbol{r}, t)$ 是已知函数，代表热源或杂质源
- 对于热传导方程，$u(\boldsymbol{r}, t)$ 表示温度的分布
- 对于扩散方程，$u(\boldsymbol{r}, t)$ 表示杂质浓度的分布
- 在数学上，输运方程属于抛物型
- 在一维空间中，输运方程的标准形式为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f}$$

§1.3 稳定场方程

稳定场方程的标准形式为

$$\boxed{\nabla^2 u = f}$$

其中 $u = u(\boldsymbol{r})$ 可以代表稳定温度分布、稳定浓度分布或静电场的电势

相应地，$f = f(\boldsymbol{r})$ 代表不随时间变化的热源、杂质源或自由电荷分布

该形式的方程又称为 **Poisson 方程**

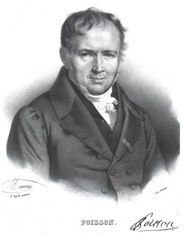
当 $f = 0$ 时又称为 **Laplace 方程**

在数学上，稳定场方程属于椭圆型

在二维直角坐标系中，稳定场方程的标准形式为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f}$$

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

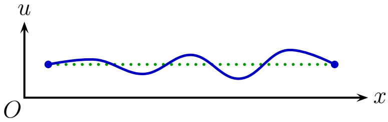


Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

§3 波动方程

§3.1 弦的横振动

- 考虑一根柔软的弦，平衡时沿 x 轴绷紧
- 当受到外界扰动时，它可以在垂直于 x 轴的方向作横向振动
- 弦上的张力使得各部分互相牵制，从而振动可以在弦上传播而形成机械波
- 假定初始激励（即外界扰动）所引起的振动是小振动（其意义将在以下讨论中逐步明确），并且弦上各点的位移方向平行

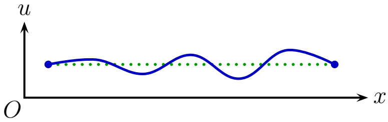


- 即振动发生在平面内
- 因而位移是一个标量函数（只有一个分量）

§3 波动方程

§3.1 弦的横振动

- 考虑一根**柔软**的**弦**，**平衡**时**沿 x 轴绷紧**
- 当受到**外界扰动**时，它可以在垂直于 x 轴的方向作**横向振动**
- 弦上的**张力**使得各部分互相牵制，从而**振动**可以在弦上**传播**而形成**机械波**
- 假定**初始激励**（即**外界扰动**）所引起的振动是**小振动**（其意义将在以下讨论中逐步明确），并且弦上各点的**位移方向平行**
- 即**振动**发生在**平面内**
- 因而**位移**是一个**标量函数**（只有一个分量）



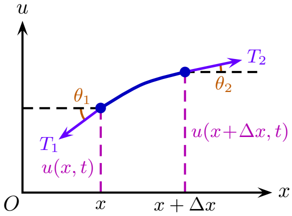
- 在这些前提下，可以用 **Newton 运动定律**来推导**位移**所满足的**波动方程**
- 记**弦上 x 点**在 t **时刻**的**位移**为 $u(x,t)$，通常在**振动平面**内将 x 轴绕原点逆时针旋转 90° 作为 u **轴**，这与观察的位置有关，所以**位移正向**的规定带有一定的**任意性**
- 如果**振动**发生在**竖直平面**内，一般取**向上**为**正**
- **波动方程**就是 $u(x,t)$ 所满足的微分方程，一般来说是**偏微分方程**

波动方程的推导过程一

为清楚起见，下面将**波动方程**的推导过程分为几步

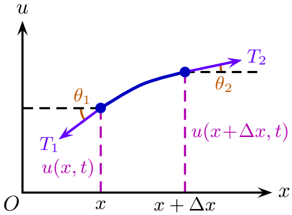
1. **弦**是**柔软**的，它**不抗弯曲**，**放松**时可取**任意形状**

在**张紧**状态下，不管处于**平衡状态**或**运动状态**，弦上的**张力**必定**沿切线方向**，这是由**柔软**的假定得出的结论



波动方程的推导过程一

- 为清楚起见，下面将波动方程的推导过程分为几步
- 1 弦是柔软的，它不抗弯曲，放松时可取任意形状
- 在张紧状态下，不管处于平衡状态或运动状态，弦上的张力必定沿切线方向，这是由柔软的假定得出的结论
- 2 考虑运动引起的弦长的变化



- 平衡时位于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段，当运动时，其长度为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}u)^2} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

- 由于所考虑的是小振动，故 $|\partial u/\partial x| \ll 1$，其二次项可以忽略，得到

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{d}x = \Delta x$$

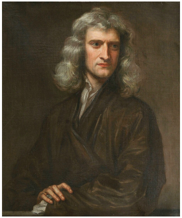
- 可见运动没有使得弦进一步伸长
- 张力取决于弦的伸长量，因此张力不随时间变化，这是由小振动假定得出的结论

波动方程的推导过程二

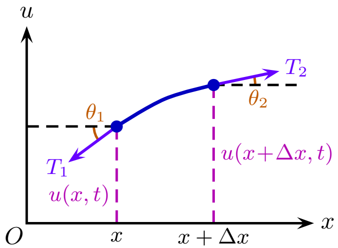
3 考虑弦上平衡时位于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段在 x 方向的运动方程，图中对位移作了夸大

- T_1 和 T_2 分别是 x 处和 $x+\Delta x$ 处的张力
- 由于弦上各点都只有 u 方向的位移，Newton 第二定律给出 x 方向的运动方程为

$$T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0$$



Isaac Newton
(1642–1726)



波动方程的推导过程二

3 考虑弦上平衡时位于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段在 x 方向的运动方程，图中对位移作了夸大

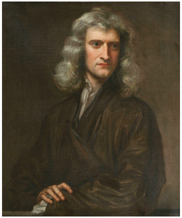
- T_1 和 T_2 分别是 x 处和 $x+\Delta x$ 处的张力
- 由于弦上各点都只有 u 方向的位移，Newton 第二定律给出 x 方向的运动方程为

$$T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0$$

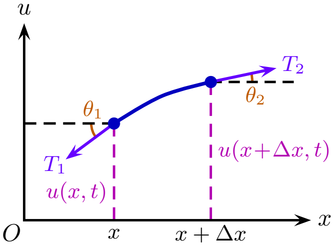
- 由于考虑的是小振动，有 $|\theta_1| \ll 1$ 和 $|\theta_2| \ll 1$
- 忽略二阶小量，得 $\cos\theta_1 \approx 1$ 和 $\cos\theta_2 \approx 1$，故

$$T_2 = T_1 \equiv T$$

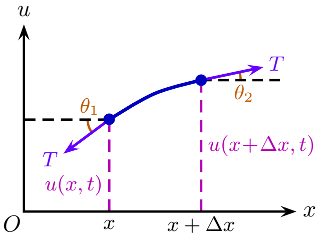
- 这就是说，弦上的张力不随位置而变化
- 这也是由小振动的假定所得出的结论
- 综合 2 、3 两点可知，弦上的张力是常数



Isaac Newton
(1642–1726)



波动方程的推导过程三

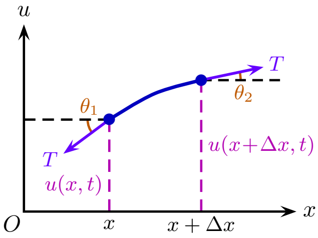


- 4 考虑上述小段在 u 方向的运动方程
- 记弦的线密度（即单位长度的质量）为 ρ
- 由 Newton 第二定律，有

$$\rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

- $\bar{u}$ 是该小段的平均位移，它依赖于 x、Δx 和 t

波动方程的推导过程三



- 考虑上述小段在 u 方向的运动方程
- 记弦的线密度 (即单位长度的质量) 为 ρ
- 由 Newton 第二定律，有

$$\rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=T\sin\theta_2-T\sin\theta_1$$

- $\bar{u}$ 是该小段的平均位移，它依赖于 x、Δx 和 t
- 再一次利用小振动的假定，忽略三阶小量 (注意一阶小量千万不能忽略)，就有

$$\sin\theta_1\approx\tan\theta_1=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x,\quad \sin\theta_2\approx\tan\theta_2=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

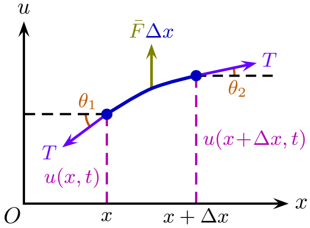
- 故 $\rho\,\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=T\,\dfrac{1}{\Delta x}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right)$，令 $\Delta x\to 0$，则 $\bar{u}\to u(x,t)$
- 而上式变成一维波动方程的标准形式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，其中 $a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$
- 由于是自由振动，方程中没有出现非齐次项

波动方程的推导过程四

- 如果弦在振动过程中受到外力的作用，即强迫振动，则上面的运动方程需要修正
- 设 x 处单位长度的受力（即力密度）为 $F(x,t)$，方向为 u 轴的正方向
- 则 u 方向的运动方程应修改为

$$\rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 + \bar{F}\Delta x$$

- 其中 $\bar{F}$ 是该小段的平均力密度，它依赖于 x、Δx 和 t



波动方程的推导过程四

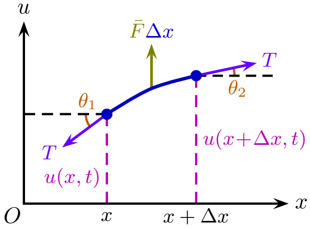
- 如果弦在振动过程中受到外力的作用，即强迫振动，则上面的运动方程需要修正
- 设 x 处单位长度的受力（即力密度）为 $F(x,t)$，方向为 u 轴的正方向
- 则 u 方向的运动方程应修改为

$$\rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 + \bar{F}\Delta x$$

- 其中 $\bar{F}$ 是该小段的平均力密度，它依赖于 x、Δx 和 t
- 当 $\Delta x \to 0$ 时，$\bar{F} \to F(x,t)$，重复上面的计算，得到外力作用下的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

- 其中 $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$ 是 x 处单位质量的受力
- 这与 §1 给出的一维波动方程的标准形式完全一致



讨论

✉️ 上面的推导主要用到经典物理的 Newton 运动定律，所以并没有什么深奥之处

📮 但是，应该特别注意其中对研究对象及其运动过程作了若干简化的假定

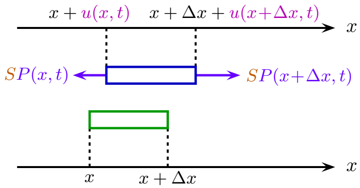
📫 因此上面得到的方程只是实际情况的比较粗糙的近似

☎️ 如果在某些具体问题中，这些假定难以满足，比如振动的振幅较大

📱 那么就需要重新考虑方程的推导，这时候问题显然要复杂得多

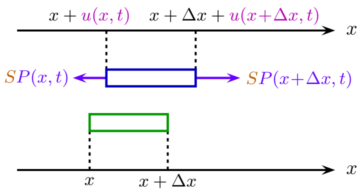
§3.2 杆的纵振动

- 本小节研究弹性杆沿着杆长方向的小振动，即纵振动
- 初始激励（纵向的拉伸或挤压）或外力的作用（作用于内部或端点）都可引起纵振动
- 取 x 轴沿着杆长方向且向右
- 为简单起见，设杆的横截面面积和物理性质不随 x 变化
- 记杆上 x 点在 t 时刻的位移为 $u(x,t)$，通常规定其正向与 x 轴方向一致
- 就目前的情况，即以离开平衡位置向右为正



§3.2 杆的纵振动

- 本小节研究弹性杆沿着杆长方向的小振动，即纵振动
- 初始激励（纵向的拉伸或挤压）或外力的作用（作用于内部或端点）都可引起纵振动
- 取 x 轴沿着杆长方向且向右
- 为简单起见，设杆的横截面面积和物理性质不随 x 变化
- 记杆上 x 点在 t 时刻的位移为 $u(x,t)$，通常规定其正向与 x 轴方向一致
- 就目前的情况，即以离开平衡位置向右为正
- 下面推导 $u(x,t)$ 所满足的偏微分方程
- 由于形变，杆上各处存在弹性力
- 记 x 处的应力（单位面积的弹性力）为 $P(x,t)$



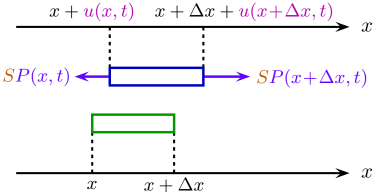
- 它表示 x 点右边部分对 x 点左边部分在单位面积上的作用力，向右为正
- 考虑平衡时位于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段，x 端受左边部分的弹性力为 $SP(x,t)$，而 $x+\Delta x$ 端受右边部分的弹性力为 $SP(x+\Delta x,t)$，其中 S 是杆的横截面面积

运动方程

- 设杆的**质量密度**为 ρ
- 对于**自由振动**情况，由 **Newton 第二定律**，**该小段**的**运动方程**为

$$\rho S\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=SP(x+\Delta x,t)-SP(x,t)$$

- 其中 $\bar{u}$ 是**该小段**的**平均位移**



运动方程

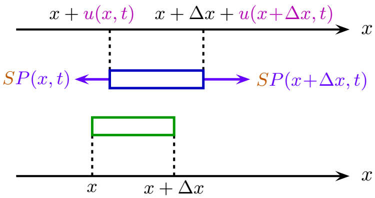
- 设杆的质量密度为 ρ
- 对于自由振动情况，由 Newton 第二定律，该小段的运动方程为

$$\rho S\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=SP(x+\Delta x,t)-SP(x,t)$$

- 其中 $\bar{u}$ 是该小段的平均位移
- 两边消去 S，除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，得到

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial x}$$

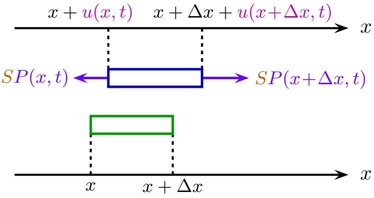
- 由于上式右边没有用 u 显式表出，上式还**不是**真正的运动方程
- 只有将应力 P 与位移 u 的关系代入上式，才能得到真正关于位移的运动方程



Hooke 定律和 Young 模量

- 实验表明，在弹性限度内，应力正比于应变
- 这称为 Hooke 定律
- 应变就是相对伸长，下面推导它的表达式
- 振动时 $[x, x+\Delta x]$ 段的绝对伸长为 $u(x+\Delta x, t) - u(x, t)$
- 相对伸长为 $\dfrac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}$，这是该段的平均应变
- 令 $\Delta x \to 0$，即得 x 点的应变为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

Robert Hooke
(1635–1703)



Hooke 定律和 Young 模量

- 实验表明，在弹性限度内，应力正比于应变
- 这称为 **Hooke 定律**
- 应变就是相对伸长，下面推导它的表达式
- 振动时 $[x, x+\Delta x]$ 段的绝对伸长为 $u(x+\Delta x, t) - u(x, t)$
- 相对伸长为 $\dfrac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}$，这是该段的平均应变
- 令 $\Delta x \to 0$，即得 x 点的应变为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$
- 从而，**Hooke 定律**可以表达为

$$P(x,t) = Y \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

- 其中 Y 是材料的力学参数，称为 **Young 模量**
- 对于性质均匀的材料，Y 与 x 无关，是一个常数

Robert Hooke
(1635–1703)

Thomas Young
(1773–1829)

弹性杆纵振动的波动方程

- 将 $P(x,t) = Y\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 代入 $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$，得 $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- 从而**弹性杆纵振动**所满足的**波动方程**是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- 这与**弦的横振动方程**在**形式上完全一致**，尽管两者的物理背景颇为不同

弹性杆纵振动的波动方程

- 将 $P(x,t)=Y\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 代入 $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$，得 $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- 从而**弹性杆纵振动**所满足的**波动方程**是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad a=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- 这与**弦的横振动方程**在**形式上完全一致**，尽管两者的物理背景颇为不同

- 可见，一个**偏微分方程**不一定只描述一个具体的物理过程，而可能描述**一系列类似的物理现象**，这一点在下节会得到进一步印证

- 因此，研究**偏微分方程**的**求解**具有较普遍的意义

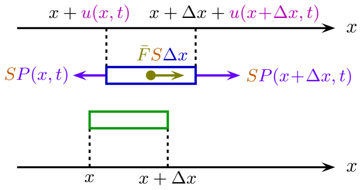
- 由于讨论的是**自由振动**，所以**以上波动方程不包含非齐次项**

弹性杆的强迫振动

- 如果杆在振动过程中受到外力的作用，即强迫振动，则上面的运动方程需要修正
- 设 x 处单位体积的受力（即力密度）为 $F(x,t)$，方向为 x 轴的正方向
- 则 $\bar{u}$ 的运动方程应修改为

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=SP(x+\Delta x,t)-SP(x,t)+\bar{F}S\Delta x$$

- 其中 $\bar{F}$ 是该小段的平均力密度



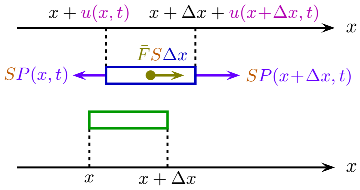
弹性杆的强迫振动

- 如果杆在振动过程中受到外力的作用，即强迫振动，则上面的运动方程需要修正
- 设 x 处单位体积的受力（即力密度）为 $F(x,t)$，方向为 x 轴的正方向
- 则 $\bar{u}$ 的运动方程应修改为

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=SP(x+\Delta x,t)-SP(x,t)+\bar{F}S\Delta x$$

- 其中 $\bar{F}$ 是该小段的平均力密度
- 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\bar{F}\to F(x,t)$，重复前面的计算并利用 Hooke 定律
- 推出外力作用下的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f$$



- $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$ 是 x 处单位质量的受力
- 这与外力作用下弦的横振动方程也完全一致

外力、边界条件和非齐次项

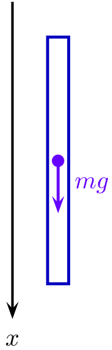
- 值得指出，如果杆在振动过程中一端受到外力的作用
- 则这个外力并不是波动方程中的非齐次项
- 而是出现在边界条件中（参看下一小节的讨论）
- 只有作用于杆内部各处的外力才表现为波动方程中的非齐次项

外力、边界条件和非齐次项

- 值得指出，如果杆在振动过程中一端受到外力的作用
- 则这个外力并不是波动方程中的非齐次项
- 而是出现在边界条件中（参看下一小节的讨论）
- 只有作用于杆内部各处的外力才表现为波动方程中的非齐次项
- 一个典型的例子是重力
- 如果杆处于竖直方向，取 x 轴和位移的正方向向下，则

$$f(x,t) = g$$

- 其中 g 是重力加速度



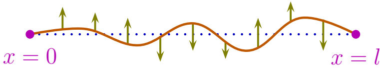
§3.3 定解条件

- 确定一个常微分方程的解需要给出初始条件，初始条件的个数与方程的阶数相同
- 确定二阶常微分方程的解需要两个初始条件，即同一点的函数值和一阶导数值
- 如果自变量表示时间，函数值表示位移，那就是要给出某一时刻 (不妨取为初始时刻 $t=0$) 的位移和速度
- 在数学上，即使方程的自变量并不表示时间，这些条件也称为初始条件
- 下面初始条件 (initial condition) 是就时间变量来说的，所以是物理上的初始条件

§3.3 定解条件

- 确定一个常微分方程的解需要给出初始条件，初始条件的个数与方程的阶数相同
- 确定二阶常微分方程的解需要两个初始条件，即同一点的函数值和一阶导数值
- 如果自变量表示时间，函数值表示位移，那就是要给出某一时刻（不妨取为初始时刻 $t=0$）的位移和速度
- 在数学上，即使方程的自变量并不表示时间，这些条件也称为初始条件
- 下面初始条件 (initial condition) 是就时间变量来说的，所以是物理上的初始条件
- 波动方程含有对时间的二阶偏导数，因而确定其解也需要两个初始条件
- 就本节所研究的一维波动方程来说，初始条件为

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$



- 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知函数
- 从物理上说，就是要给定弦上或杆上各点的初始位移和初始速度
- 对于三维波动方程，情况与此类似

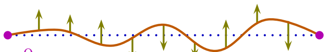
边界条件

🏢 由于研究对象是有界的连续体，所以除了初始条件，还需要知道边界上的约束情况，才能确定问题的解；这就是边界条件 (boundary condition)

🏰 常见的边界条件有三类，分别讨论如下

边界条件

- 由于研究对象是有界的连续体，所以除了初始条件，还需要知道边界上的约束情况，才能确定问题的解；这就是边界条件 (boundary condition)
- 常见的边界条件有三类，分别讨论如下



1. 第一类边界条件，就是给定边界上的 u 值

- 比如弦的横振动，如果两个端点是固定的，则边界条件为

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0$$

- 其中 $x=0$ 和 $x=l$ 分别是弦的两个端点的坐标
- 上式同样适用于杆的两端固定的情况
- 它是齐次边界条件
- 如果边界上的 u 值不为零，则称为非齐次边界条件
- 第一类边界条件也称为 Dirichlet 边界条件

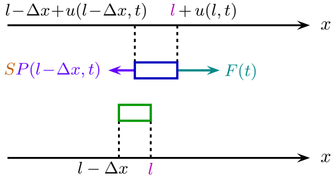
Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

第二类边界条件

2 **第二类边界条件**，就是给定**边界**上的 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ **值**，即**外法线方向**的**方向导数**

比如，**弹性杆**在**纵振动**的过程中，其 $x=l$ **端**受到**已知力** $F(t)$（向右为正）的作用，则该端具有**第二类边界条件**

推导如下，考虑 $[l-\Delta x, l]$ **段**，图中下半部分为**该小段**的**平衡位置**，上半部分为其**运动**时的**位置**和**受力分析**

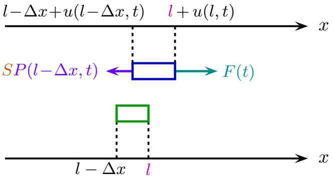


第二类边界条件

2 第二类边界条件，就是给定边界上的 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 值，即外法线方向的方向导数

比如，弹性杆在纵振动的过程中，其 $x=l$ 端受到已知力 $F(t)$（向右为正）的作用，则该端具有第二类边界条件

推导如下，考虑 $[l-\Delta x, l]$ 段，图中下半部分为该小段的平衡位置，上半部分为其运动时的位置和受力分析



由 Newtow 第二定律，其运动方程为

$$\rho S\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=F(t)-SP(l-\Delta x,t)$$

$\bar{u}$ 是该小段的平均位移，令 $\Delta x\to 0$，利用 Hooke 定律 $P(x,t)=Y\dfrac{\partial u}{\partial x}$，得到

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{F(t)}{YS}$$

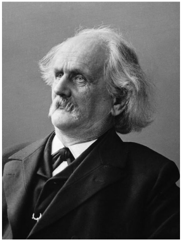
这是第二类非齐次边界条件

第二类齐次边界条件

- 特别地，如果 $F(t)=0$，则边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$$

- 即**不受外力**的**自由端**具有**第二类齐次边界条件**
- 这是一个常用的结论，应该熟悉掌握
- **第二类边界条件**也称为 **Neumann 边界条件**



Carl Neumann
(1832–1925)

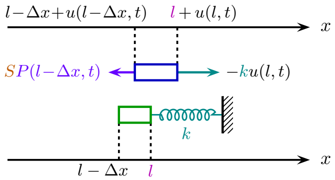
第三类边界条件

3 第三类边界条件，就是给定边界上的 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合

比如弹性杆在纵振动的过程中，其一端与弹簧连接，弹簧的另一端固定，且当该端处于平衡位置（即没有位移）时，弹簧也处于平衡状态，则该端具有第三类边界条件

以 $x = l$ 端为例，仍然考虑 $[l - \Delta x, l]$ 段进行推导

图中下半部分为该小段的平衡位置，上半部分为其运动时的位置和受力分析



第三类边界条件

3 第三类边界条件，就是给定边界上的 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合

比如弹性杆在纵振动的过程中，其一端与弹簧连接，弹簧的另一端固定，且当该端处于平衡位置（即没有位移）时，弹簧也处于平衡状态，则该端具有第三类边界条件

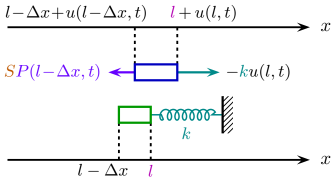
以 $x = l$ 端为例，仍然考虑 $[l - \Delta x, l]$ 段进行推导

图中下半部分为该小段的平衡位置，上半部分为其运动时的位置和受力分析

弹簧向右作用在 $x = l$ 端的弹性力为 $F(t) = -ku(l,t)$，k 是弹簧的弹性系数

由 Newtow 第二定律，其运动方程为

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = -ku(l,t) - SP(l-\Delta x,t)$$

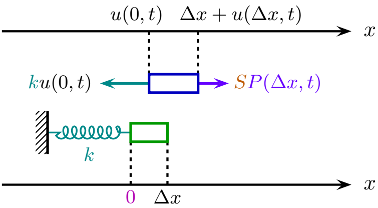


$\bar{u}$ 是该小段的平均位移

令 $\Delta x \to 0$，利用 Hooke 定律 $P(x,t) = Y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 推出 $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{k}{YS}u\right)\right|_{x=l} = 0$

这是第三类齐次边界条件

另一端的第三类边界条件



- 如果弹簧连接在 $x=0$ 端，则它向左作用在 $[0,\Delta x]$ 段的弹性力为 $F(t)=ku(0,t)$
- 由 Newtow 第二定律得

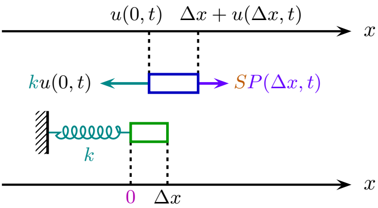
$$\rho S\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=SP(\Delta x,t)-ku(0,t)$$

- 令 $\Delta x\to 0$，利用 Hooke 定律 $P(x,t)=Y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 推出

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{k}{YS}u\right)\right|_{x=0}=0$$

- 这是 $x=0$ 端的第三类齐次边界条件

另一端的第三类边界条件



如果弹簧连接在 $x=0$ 端，则它向左作用在 $[0,\Delta x]$ 段的弹性力为 $F(t)=ku(0,t)$

由 Newtow 第二定律得

$$\rho S\Delta x\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=SP(\Delta x,t)-ku(0,t)$$

令 $\Delta x\to 0$，利用 Hooke 定律 $P(x,t)=Y\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 推出

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{k}{YS}\,u\right)\right|_{x=0}=0$$

这是 $x=0$ 端的第三类齐次边界条件

注意 $x=0$ 端边界条件与 $x=l$ 端之间的符号差异，这是第三类边界条件的特点

如果杆与弹簧连接的端点处于平衡位置时，弹簧已经有一定的形变，则该端将具有第三类非齐次边界条件，参见选读的思考题

第三类边界条件也称为 Robin 边界条件 (Victor Gustave Robin, 1855–1897)

定解条件和定解问题

- 以上讨论了三类常见的边界条件
- 初始条件与边界条件统称为定解条件
- 定解条件和偏微分方程一起构成定解问题
- 一个定解问题可以在边界的不同部分具有不同类型的边界条件
- 比如杆的纵振动，可以一端固定，对应于第一类边界条件
- 而另一端与弹簧连接，对应于第三类边界条件

§3.4 定解问题的适定性

- 定解问题的适定性指的是其解的存在性、唯一性和稳定性
- 存在性指的是有解
- 唯一性指解是确定的，没有任意性
- 稳定性指的是，当定解条件有微小的变化时，所引起的解的变化也是微小的
- 这在实际问题中非常重要，因为由测量给出的定解条件与实际情况会有一定误差

§3.4 定解问题的适定性

- 定解问题的适定性指的是其解的存在性、唯一性和稳定性
- 存在性指的是有解
- 唯一性指解是确定的，没有任意性
- 稳定性指的是，当定解条件有微小的变化时，所引起的解的变化也是微小的
- 这在实际问题中非常重要，因为由测量给出的定解条件与实际情况会有一定误差
- 如果定解问题不具有稳定性，那么理论计算所得到的解将不能反映物体的运动情况，因而是没有实际意义的
- 从物理学的角度来看，如果在导出偏微分方程时对物体和物理过程所做的简化和近似是合理的，定解条件恰当描写了客观情况，那么这样的定解问题应该具有适定性

§3.4 定解问题的适定性

- 定解问题的适定性指的是其解的存在性、唯一性和稳定性
- 存在性指的是有解
- 唯一性指解是确定的，没有任意性
- 稳定性指的是，当定解条件有微小的变化时，所引起的解的变化也是微小的
- 这在实际问题中非常重要，因为由测量给出的定解条件与实际情况会有一定误差
- 如果定解问题不具有稳定性，那么理论计算所得到的解将不能反映物体的运动情况，因而是没有实际意义的
- 从物理学的角度来看，如果在导出偏微分方程时对物体和物理过程所做的简化和近似是合理的，定解条件恰当描写了客观情况，那么这样的定解问题应该具有适定性
- 但是，从数学上研究各类定解问题的适定性也是有实际意义的
- 如果数学上证明了一个定解问题是不适定的，这可能说明物理学家在建立偏微分方程时作了不合理的近似，或给出了不恰当的定解条件，从而促使他们对研究结果作出改进或修正

边界条件与适定性

- 除本章研究各类方程的导出之外，以后各章主要研究定解问题的求解，并尽可能对解的物理图像作一些分析和说明

- 至于定解问题的适定性，今后不再考虑，这里只对边界条件作一点说明

- 虽然本课程研究的几类方程都具有对空间变量的二阶偏导数，但边界条件只能有一个（虽然在边界不同部分可以有不同类型的边界条件），否则定解问题将是不适定的

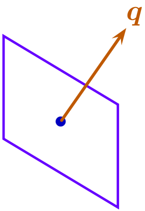
- 比如，在边界的同一个部分上**同时**给出 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的值，通常会导致定解条件**自相矛盾**，从而使得定解问题的解不存在

- 这与初始条件的情况是颇为不同的，初始条件的个数与方程对时间的偏导数的阶数相同

§4 热传导方程和扩散方程

§4.1 热传导方程

- 在导热介质中，如果温度分布不均匀，热量就会从温度高的地方向温度低的地方流动，这就是热传导现象，热量的流动可以用热流强度来描写
- 热流强度定义为单位时间内垂直流过单位面积的热量，记作 $\boldsymbol{q}$
- $\boldsymbol{q}$ 的方向即热量流动的方向，一般来说，$\boldsymbol{q}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数



§4 热传导方程和扩散方程

§4.1 热传导方程

- 在导热介质中，如果温度分布不均匀，热量就会从温度高的地方向温度低的地方流动，这就是热传导现象，热量的流动可以用热流强度来描写
- 热流强度定义为单位时间内垂直流过单位面积的热量，记作 $\boldsymbol{q}$
- $\boldsymbol{q}$ 的方向即热量流动的方向，一般来说，$\boldsymbol{q}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数
- 实验表明热流强度由介质中的温度分布 $u(\boldsymbol{r}, t)$ 决定，满足

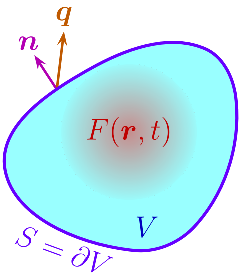
$$\boldsymbol{q} = -k\nabla u$$

Joseph Fourier
(1768–1830)

- 上式称为热传导定律，也称为 Fourier 定律
- 它表明热量沿着温度下降最快的方向流动
- k 称为热导率，它与介质的材料有关；在非均匀介质中，它可以是 $\boldsymbol{r}$ 的函数
- 原则上，k 还与温度有关，如此则下面推导的热传导方程将成为非线性方程
- 但如果温度的变化范围不大，则可近似地认为 k 与温度无关

热传导方程的推导过程一

- 下面从能量守恒定律和热传导定律出发，推导热传导方程
- 在介质中任取一区域 V，其边界面为 $S=\partial V$，设介质中有热源
- 热源强度为 $F(\boldsymbol{r},t)$，它表示 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处单位时间单位体积放出的热量
- 记介质的质量密度为 ρ，比热容（单位质量升高单位温度时吸收的热量）为 c
- 则区域 V 中单位时间内由于温度升高而增加的能量为 $\displaystyle\int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
- 其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是体积元



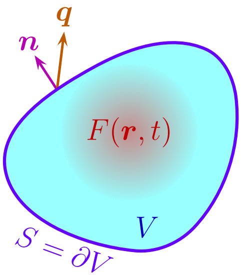
热传导方程的推导过程一

- 下面从能量守恒定律和热传导定律出发，推导热传导方程
- 在介质中任取一区域 V，其边界面为 $S = \partial V$，设介质中有热源
- 热源强度为 $F(\boldsymbol{r}, t)$，它表示 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处单位时间单位体积放出的热量
- 记介质的质量密度为 ρ，比热容（单位质量升高单位温度时吸收的热量）为 c
- 则区域 V 中单位时间内由于温度升高而增加的能量为 $\displaystyle\int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
- 其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是体积元，这一能量有两个来源
- 其一是边界面流入的热量 $\displaystyle -\int_S \boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

是边界面的面积元，其方向为边界面的外法线方向

- 其二是热源产生的热量 $\displaystyle\int_V F\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
- 能量守恒定律给出

$$\int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_S \boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \int_V F\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$



热传导方程的推导过程二

- 数学上的 **Gauss 定理**给出 $\int_S \boldsymbol{q}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，故

$$\int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_V (-\nabla\cdot\boldsymbol{q} + F)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

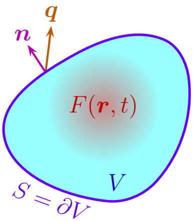
- 再由**区域** V 的**任意性**，得到 $c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} = F$
- 把**热传导定律** $\boldsymbol{q} = -k\nabla u$ 代入上式，就得到**热传导方程**

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(k\nabla u) = F$$

- 上式非常简练，而且**不依赖于坐标系**的选择
- 它在**三维直角坐标系**中的具体形式是

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) = F$$

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



热传导方程的推导过程三

- 对于均匀介质，k 是常数，则热传导方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = f$$

- 其中 $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$，$f(\boldsymbol{r}, t) = \frac{F(\boldsymbol{r}, t)}{c\rho}$，这就是 §1 中介绍的输运方程的标准形式
- 如果没有热源，就得到相应的齐次方程

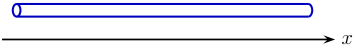
热传导方程的推导过程三

- 对于均匀介质，k 是常数，则热传导方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = f$$

- 其中 $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$，$f(\boldsymbol{r}, t) = \frac{F(\boldsymbol{r}, t)}{c\rho}$，这就是 §1 中介绍的输运方程的标准形式
- 如果没有热源，就得到相应的齐次方程
- 考虑一均匀导热细杆的热传导问题，设细杆的侧面绝热
- 由于细杆的横截面面积很小，故各横截面上的温度分布可以很快达到均匀
- 之后，温度在空间上只依赖于杆长方向的坐标 x，热量也只沿着 x 方向流动
- 于是得到一个一维的热传导问题，此时热传导方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$



- 其中 $u = u(x, t)$，$f = f(x, t)$；若无热源，则得到相应的齐次方程

§4.2 扩散方程

- 在流体介质中引入一种杂质，如果杂质浓度分布不均匀，它就会从浓度高的地方向浓度低的地方流动，这就是扩散现象
- 值得指出，对于混合气体，各成分的扩散应该在温度和总压强均匀的条件下进行
- 如果因总压强不均匀而产生气流，就不是扩散过程
- 杂质的扩散可以用扩散流强度来描写，扩散流强度定义为定义为单位时间内垂直流过单位面积的杂质质量，记作 q
- q 的方向即杂质流动的方向，一般来说 q 是 r 和 t 的函数

§4.2 扩散方程

在流体介质中引入一种杂质，如果杂质浓度分布不均匀，它就会从浓度高的地方向浓度低的地方流动，这就是扩散现象

值得指出，对于混合气体，各成分的扩散应该在温度和总压强均匀的条件下进行

如果因总压强不均匀而产生气流，就不是扩散过程

杂质的扩散可以用扩散流强度来描写，扩散流强度定义为定义为单位时间内垂直流过单位面积的杂质质量，记作 $\boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{q}$ 的方向即杂质流动的方向，一般来说 $\boldsymbol{q}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数

设介质中的杂质浓度分布为 $u(\boldsymbol{r}, t)$

它表示 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处单位体积内的杂质质量

实验表明，杂质沿着浓度下降最快的方向流动，满足

$$\boldsymbol{q} = -D\nabla u$$

上式称为扩散定律，也称为 **Fick 定律**，D 称为扩散系数

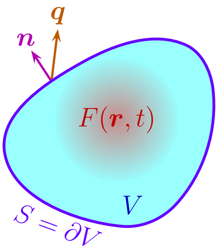
Adolf Fick
(1829–1901)

扩散方程的推导过程一

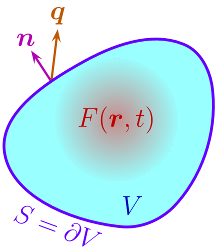
- 扩散系数 D 与介质的材料和扩散时介质中的温度有关
- 在非均匀介质中，它可以是 r 的函数

扩散方程的推导过程一

- 扩散系数 D 与介质的材料和扩散时介质中的温度有关
- 在非均匀介质中，它可以是 $\boldsymbol{r}$ 的函数
- 下面从物质守恒定律和扩散定律出发推导扩散方程
- 这与热传导方程的推导非常类似
- 在介质中任取一区域 V，其边界面为 $S = \partial V$
- 设介质中有杂质源，比如由化学反应所产生的杂质
- 杂质源强度为 $F(\boldsymbol{r}, t)$，它表示 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处单位时间单位体积产生的杂质质量



扩散方程的推导过程一



- 扩散系数 D 与介质的材料和扩散时介质中的温度有关
- 在非均匀介质中，它可以是 $\boldsymbol{r}$ 的函数
- 下面从物质守恒定律和扩散定律出发推导扩散方程
- 这与热传导方程的推导非常类似
- 在介质中任取一区域 V，其边界面为 $S=\partial V$
- 设介质中有杂质源，比如由化学反应所产生的杂质
- 杂质源强度为 $F(\boldsymbol{r},t)$，它表示 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处单位时间单位体积产生的杂质质量
- 考虑区域 V 中单位时间内杂质质量的增加，由物质守恒定律推出

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_S \boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \int_V F\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 利用数学上的 **Gauss 定理**将右边第一项化为体积分，考虑到区域 V 的任意性，得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} = F$$

扩散方程的推导过程二

☃️ 将扩散定律 $\boldsymbol{q} = -D\nabla u$ 代入 $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = F$，就得到扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla u) = F$$

☃️ 对于均匀介质，D 是常数，则扩散方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = F$$

☀️ 其中 $a = \sqrt{D}$，这与热传导方程在形式上完全一致

🌙 如果没有杂质源，就得到相应的齐次方程

扩散方程的推导过程二

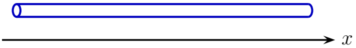
- 将扩散定律 $\boldsymbol{q} = -D\nabla u$ 代入 $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} = F$，就得到扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(D\nabla u) = F$$

- 对于均匀介质，D 是常数，则扩散方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = F$$

- 其中 $a = \sqrt{D}$，这与热传导方程在形式上完全一致
- 如果没有杂质源，就得到相应的齐次方程
- 考虑杂质气体在均匀细管内的扩散问题



- 细管侧面封闭，横截面面积很小，故各横截面上的杂质浓度分布可很快达到均匀
- 之后，浓度在空间上只依赖于管长方向的坐标 x，杂质也只沿着 x 方向扩散
- 于是得到一个一维的扩散问题，扩散方程简化为 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F$

输运过程的微观机制

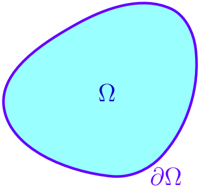
⭐ 在微观上，热传导和扩散过程都是通过分子的碰撞完成的

🌏 碰撞使得能量在分子间重新分布，这就是热传导过程，也就是能量的输运过程

🪐 类似地，碰撞改变了不同物质的分子数在空间上的分布，这就是扩散过程，也就是分子数的输运过程

✨ 由于这两种过程具有类似的微观机制，所以它们满足的方程具有同样的形式就不足为奇了

§4.3 定解条件



- 输运方程具有对时间的一阶偏导数，所以初始条件只有一个
- 它就是给定初始时刻的温度分布或浓度分布

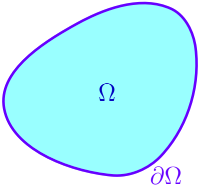
$$u\Big|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \Omega$$

- 其中 Ω 是研究对象在三维空间所占据的区域，其边界面记作 $\partial\Omega$

§4.3 定解条件

- 输运方程具有对时间的一阶偏导数，所以初始条件只有一个
- 它就是给定初始时刻的温度分布或浓度分布

$$u\big|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \Omega$$



- 其中 Ω 是研究对象在三维空间所占据的区域，其边界面记作 $\partial\Omega$
- 除了初始条件，确定一个具体问题的解还需要边界条件
- 常见的边界条件有三类，其数学形式与上节所述类似
- 但是，同样类型的边界条件，在输运问题中对应于不同的物理状况
- 所以下面对三类边界条件分别举例讨论
- 上节主要以一维问题为特例，本节则主要以三维热传导问题为例
- 对于扩散问题的边界条件可作类似讨论

第一类边界条件

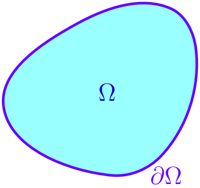
1 第一类边界条件

将研究对象置于**温度已知**的**环境**中

如果该物质的**导热性能良好**，则其**表面温度**可以很快达到**与环境一致**

故**边界条件**为

$$u\big|_{\partial\Omega} = u_0(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{r} \in \partial\Omega$$



其中 $u_0(\boldsymbol{r}, t)$ 是**已知函数**，表示**环境温度**

特别地，如果 $u_0(\boldsymbol{r}, t) = 0$，就得到**第一类齐次边界条件**

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

第二类边界条件

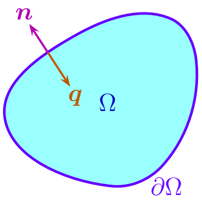
2 第二类边界条件

- 比如边界面上有已知的热流流入，其强度为 $q(\boldsymbol{r},t)$，且垂直于边界面
- 从边界面的内侧看，垂直流入的热流强度按热传导定律应为 $-k\nabla u = k\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$
- 从边界面的外侧看，则为已知量 $q(\boldsymbol{r},t)$
- 注意边界面是没有厚度的几何概念，它上面不能有热量的积聚，故两者相等，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \frac{1}{k}q(\boldsymbol{r},t), \quad \boldsymbol{r}\in\partial\Omega$$

- 特别地，如果 $q(\boldsymbol{r},t)=0$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$



- 即绝热的边界面具有第二类齐次边界条件
- 注意，对于一维问题，绝热的边界面就是绝热的端点

第三类边界条件

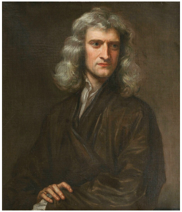
3 第三类边界条件

比如**边界面**按 **Newton 冷却定律**与外界交换热量

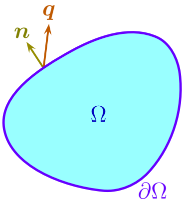
那么，从**介质表面流出**的**法向热流强度正比**于**表面内侧**与**外侧**的**温度差**，即 $q_n\big|_{\partial\Omega} = b\left[u\big|_{\partial\Omega} - u_0(\boldsymbol{r},t)\right]$， $\boldsymbol{r}\in\partial\Omega$

其中 $q_n = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}$，而 $\boldsymbol{n}$ 是**边界面**的**外法向单位矢量**

b 是**常数**，称为**介质**的**热交换系数**，$u_0(\boldsymbol{r},t)$ 是**环境温度**

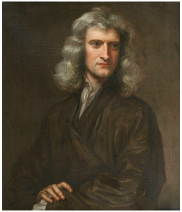


Isaac Newton
(1642–1726)



第三类边界条件

3 第三类边界条件



Isaac Newton
(1642–1726)

比如**边界面**按 **Newton 冷却定律**与外界交换热量

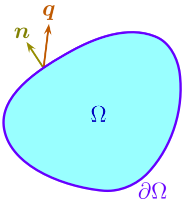
那么，从**介质表面流出**的**法向热流强度正比**于**表面内侧**与**外侧**的**温度差**，即 $q_n\big|_{\partial\Omega} = b\left[u\big|_{\partial\Omega} - u_0(\boldsymbol{r},t)\right]$， $\boldsymbol{r}\in\partial\Omega$

其中 $q_n = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}$，而 $\boldsymbol{n}$ 是**边界面**的**外法向单位矢量**

b 是**常数**，称为**介质**的**热交换系数**，$u_0(\boldsymbol{r},t)$ 是**环境温度**

按**热传导定律**有 $q_n\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = -k\,\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\big|_{\partial\Omega} = -k\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$，故

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_{\partial\Omega} = hu_0(\boldsymbol{r},t), \quad \boldsymbol{r}\in\partial\Omega$$



其中 $h = \dfrac{b}{k}$；如果 $u_0(\boldsymbol{r},t) = 0$，则得**第三类齐次边界条件**

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_{\partial\Omega} = 0$$

一维问题的第三类边界条件

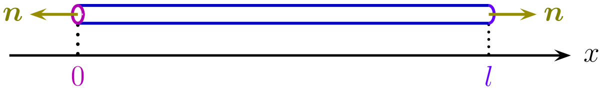
- 对于一维细杆的热传导问题，设细杆的两端坐标为 $x=0$ 和 $x=l$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0}=-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0},\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$$

- 从而，第三类齐次边界条件 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_{\partial\Omega}=0$ 化为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right)\right|_{x=0}=0,\qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)\right|_{x=l}=0$$

- 注意两式中的符号差导
- 上节已经看到，波动方程的第三类边界条件中也存在类似的符号差异



§5 稳定场方程

§5.1 稳定温度分布和稳定浓度分布

- 考虑**热传导方程** $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = f$
- 如果**非齐次项** $f = f(\boldsymbol{r})$ **与** t **无关**，且**边界条件**也**与** t **无关**
- 则**长时间后**，**温度分布**有可能达到**稳定状态**
- 这时**温度** u 只是 $\boldsymbol{r}$ **的函数**，故 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$，从而方程化为

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{a^2}$$

- 可见，**稳定温度分布**满足 **Poisson 方程**
- 如果**没有热源**，则得相应的**齐次方程**，即 **Laplace 方程**

$$\nabla^2 u = 0$$

讨论

- f 和边界条件与 t 无关只是达到稳定温度分布的必要条件，而**不是**充分条件
- 比如介质表面绝热，而内部有稳定热源，这满足上述条件
- 但一般来说**不可能**达到稳定状态(可能持续升温)，除非热源产生的总热量为零，即

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

讨论

- f 和边界条件与 t 无关只是达到稳定温度分布的必要条件，而**不是**充分条件
- 比如介质表面绝热，而内部有稳定热源，这满足上述条件
- 但一般来说**不可能**达到稳定状态(可能持续升温)，除非热源产生的总热量为零，即

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

- 稳定状态**不一定**是平衡状态
- 比如均匀导热细杆，侧面绝热，左端保持较高温度 u_1，右端保持较低温度 u_2
- 长时间后温度分布可以达到稳定状态
- 但在这种稳定状态下，显然有热量源源不断地从左向右流动
- 所以这一稳定状态需要靠外部条件来维持，因而不是平衡状态

§5.2 静电场方程

- 在介质中，静电场的基本方程是 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$
- 其中 ρ 是自由电荷密度，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量
- 引入静电势 u 使得 $\boldsymbol{E} = -\nabla u$，则 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 自动满足
- 为了导出 u 所满足的方程，需要知道 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系
- 这称为本构关系 (constitutive relation)，它的形式取决于介质的性质

§5.2 静电场方程

- 在介质中，静电场的基本方程是 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0}$
- 其中 ρ 是自由电荷密度，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量
- 引入静电势 u 使得 $\boldsymbol{E} = -\nabla u$，则 $\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ 自动满足
- 为了导出 u 所满足的方程，需要知道 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系
- 这称为本构关系 (constitutive relation)，它的形式取决于介质的性质
- 对于线性、各向同性的均匀介质，本构关系为 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \epsilon\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\epsilon\,\nabla u$
- 其中 ϵ 是介质的介电常数，从而推出

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

- 可见，在所考虑的介质中，静电势满足 Poisson 方程

§5.2 静电场方程

- 在介质中，静电场的基本方程是 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$
- 其中 ρ 是自由电荷密度，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量
- 引入静电势 u 使得 $\boldsymbol{E} = -\nabla u$，则 $\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ 自动满足
- 为了导出 u 所满足的方程，需要知道 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系
- 这称为本构关系 (constitutive relation)，它的形式取决于介质的性质
- 对于线性、各向同性的均匀介质，本构关系为 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \epsilon\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\epsilon\, \nabla u$
- 其中 ϵ 是介质的介电常数，从而推出

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

- 可见，在所考虑的介质中，静电势满足 Poisson 方程
- 在没有自由电荷的区域，静电势则满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$
- 对于真空，只需将介电常数 ϵ 换成真空介电常数 ϵ_0

§5.3 定解条件

- 稳定场方程不含对时间的偏导数，所以不需要初始条件
- 常见的边界条件有三类，与之前类似，不再详细讨论