

数学物理方法

第三章 解析函数的幂级数展开

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 10 月 8 日



第三章 解析函数的幂级数展开

 本章先介绍复数级数、尤其是幂级数的性质

 然后利用 Cauchy 积分公式导出解析函数的 Taylor 展开式


§1 复常数项级数

§1.1 基本概念与基本判敛法


 复常数项级数具有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots$$

的形式，其中**每一项**都是复数

 $s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ 称为其**部分和**

 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 是**有限复数**，则称**级数收敛于** s

 s 称为它的**和**，记作 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = s$


§1 复常数项级数

§1.1 基本概念与基本判敛法


 复常数项级数具有


$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots$$


的形式，其中**每一项**都是复数

 $s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ 称为其**部分和**


 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 是**有限复数**，则称**级数收敛**于 s

 s 称为它的**和**，记作 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = s$

 若**级数不收敛**于有限复数，则称它**发散**


 **注** 发散包括两种情况：**1** $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ ；**2** 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ **没有极限**


数列的 Cauchy 收敛原理

 对于数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否收敛、即其极限是否存在的问题，类似于实数列，有下述 Cauchy 收敛原理

 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall p \in \mathbb{N}^+, \quad \text{均有 } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$


 其中 \mathbb{N}^+ 表示正整数的集合

 这一精确描述的大意是，从某一项 s_n 开始，数列的各项 s_{n+1}, s_{n+2}, \dots 均聚集在它附近，这样就容易理解极限的存在了

$$s_1, \quad s_2, \quad \dots, \quad s_n, \quad s_{n+1}, \quad \dots, \quad s_{n+p}, \quad \dots$$

数列 Cauchy 收敛原理的第二种表述

 **Cauchy 收敛原理**也称为 **Cauchy 判敛准则**，它的**另一种**更常见的**表述**如下

 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛**的**充要条件**是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+, \text{ 当 } n > n_0 \text{ 时, } \forall p \in \mathbb{N}^+, \text{ 均有 } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$


 这一精确描述的大意是，当数列**下标足够大**以后，**任何两项**的**距离**都可以**任意小**

 更形象地说，**越往后**，数列的**各项就越是挤在一起**，这样也容易理解极限的存在


$$s_1, \quad s_2, \quad \cdots, \quad s_{n_0}, \quad \cdots, \quad s_n, \quad s_{n+1}, \quad \cdots, \quad s_{n+p}, \quad \cdots$$


两种表述的区别

 **Cauchy 收敛原理**两种表述的区别如下

 在**第一种表述**中, n **足够大但固定**


 在**第二种表述**中, n **足够大但也是任意的**

 容易证明两种表述是**等价的**


 **第一种表述**显得更简洁, 对于多数具体应用情景也更便于操作


两种表述的区别


 **Cauchy 收敛原理**两种表述的区别如下

 在**第一种表述**中, n 足够大但**固定**

 在**第二种表述**中, n 足够大但也是**任意**的


 容易证明两种表述是**等价**的

 **第一种表述**显得更简洁, 对于多数具体应用情景也更便于操作


 举例来说, 考虑**数列** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的通项对于 s_{3n} 、 s_{3n+1} 和 s_{3n+2} 具有不同的形式, 用 Cauchy 收敛原理研究其敛散性


 如果按照**第一种表述**, 只需要考察 **3 种情况**

 而按照**第二种表述**, 则需要考察 **9 种情况**


 今后较多地采用**第一种表述**, 但视具体情况有时候也采用**第二种表述**

级数的 Cauchy 收敛原理


 根据数列的 Cauchy 收敛原理，立得关于级数的 Cauchy 收敛原理

 **定理 (Cauchy 收敛原理)** 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的充要条件是


$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+, \forall p \in \mathbb{N}^+, \text{ 均有 } \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$$


 对于 $s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ ，有

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k = \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$$

 故 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ 意味着 $\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$

级数的 Cauchy 收敛原理

 根据数列的 Cauchy 收敛原理，立得关于级数的 Cauchy 收敛原理


 **定理 (Cauchy 收敛原理)** 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+, \forall p \in \mathbb{N}^+, \text{ 均有 } \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$$


 再利用三角不等式，易得

$$|\alpha_{n+p}| = \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| + \left| \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| < 2\varepsilon$$

 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的必要条件是 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$

 如果这一条件得不到满足，马上可以断定级数是发散的

级数的 Cauchy 收敛原理

 根据数列的 Cauchy 收敛原理，立得关于级数的 Cauchy 收敛原理


 **定理 (Cauchy 收敛原理)** 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+, \forall p \in \mathbb{N}^+, \text{ 均有 } \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$$

 再利用三角不等式，易得

$$|\alpha_{n+p}| = \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| + \left| \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| < 2\varepsilon$$

 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的必要条件是 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$

 如果这一条件得不到满足，马上可以断定级数是发散的

 **注** 如果采用 Cauchy 收敛原理的第二种表述，则 $\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$ 中的 n 在足够

大的前提下是任意的，此时只需取 $p = 1$ ，则 $|\alpha_{n+1}| < \varepsilon$ 即是收敛的必要条件

绝对收敛和条件收敛



Cauchy 收敛原理无疑是一个最基本的判别法，但是使用它需要计算**求和式**

$$\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}, \text{ 或至少要估计其模的上限}$$



这只有在**少数简单情况**下可以做到，比如**几何级数**（即**等比级数**） $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$



在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 中**添加或去掉有限项**，并不改变级数的**收敛或发散**性质

绝对收敛和条件收敛



Cauchy 收敛原理无疑是一个最基本的判别法，但是使用它需要计算**求和式**

$\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$ ，或至少要估计**其模的上限**

📌 这只有在**少数简单情况**下可以做到，比如**几何级数**（即**等比级数**） $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$

📍 在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 中**添加或去掉有限项**，并不改变级数的**收敛或发散**性质

🔪 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ **收敛**，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ **绝对收敛**

🔪 **收敛但不绝对收敛**的级数称为**条件收敛**

绝对收敛和条件收敛



Cauchy 收敛原理无疑是一个最基本的判别法，但是使用它需要计算**求和式**

$\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$ ，或至少要估计**其模的上限**

📌 这只有在**少数简单情况**下可以做到，比如**几何级数**（即**等比级数**） $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$

📌 在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 中**添加或去掉有限项**，并不改变级数的**收敛或发散**性质

🔪 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ **收敛**，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ **绝对收敛**


📐 **收敛但不绝对收敛**的级数称为**条件收敛**


🟢 **定理** **绝对收敛**的级数必定**收敛**

🔑 这是因为**三角不等式**表明 $\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| \leq \sum_{k=1}^p |\alpha_{n+k}| = \left| \sum_{k=1}^p |\alpha_{n+k}| \right|$

🔒 从而由 $\left| \sum_{k=1}^p |\alpha_{n+k}| \right| < \varepsilon$ 可以推出 $\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$ ，反之则不然

判敛操作

 在实际操作上，给定一个级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ ，先看看 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ 是否满足

 若不满足，马上可以断定级数**发散**

 若**满足**，再看看相应的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 是否收敛

 若**收敛**，则**原级数绝对收敛**

判敛操作

🔧 在实际操作上，给定一个级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ ，先看看 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ 是否满足

🔨 若不满足，马上可以断定级数**发散**

🔨 若**满足**，再看看相应的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 是否收敛

🔧 若**收敛**，则**原级数绝对收敛**

✂️ 由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 是**正项级数** ($|\alpha_k| \geq 0$)，可用**高等数学**中的**正项级数判别法**来

判敛，如**比较判别法**、**Cauchy 判别法**、**d'Alembert 判别法**、**Cauchy 积分判别法**等


🔪 如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ **满足**，而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ **又不收敛**，则需要进一步判断**原级数**是

发散还是**条件收敛**

🔪 不过，如果是由 **Cauchy 判别法**或 **d'Alembert 判别法**得到级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ **发散**，

则**原级数**必定也**发散**，因为这时 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ **必不满足**

回顾：实数域上正项级数的判别法

 **比较判别法**：两正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 满足 $u_k \leq v_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$)，则由 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$

收敛可断定 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 也收敛，由 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散可断定 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 也发散

 **Cauchy 判别法**：若正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = l$ ，则 $l < 1$ 时级数收敛，

$l > 1$ 时级数发散， $l = 1$ 时级数可能收敛也可能发散

 **d'Alembert 判别法**：若正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ($u_k > 0$) 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = l$ ，则 $l < 1$

时级数收敛， $l > 1$ 时级数发散， $l = 1$ 时级数可能收敛也可能发散

 **Cauchy 积分判别法**：若存在单调下降的非负函数 $f(x)$ ($x \geq 1$)，使得

$$u_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

则正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛的充要条件为无穷积分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 收敛



回到刚才的讨论，其它情况下要进一步判断原级数是否**条件收敛**就比较困难



这时可以尝试计算**求和式** $\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$ ，或估计**其模的上限**



如果成功，就可以用 **Cauchy 收敛原理**来判断；如果**求和式** $\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$ **无法计算**

或**估计上限**，则可以尝试**选读 §1.2** 介绍的 **Abel 判别法**和 **Dirichlet 判别法**





就我们所知，并没有什么方法能够百分之百地解决任何级数的判敛问题




即使是**正项级数**，虽然有一些更敏锐的判别法可资利用，比如**选读 §1.5** 介绍的 **Gauss 判别法**，但也并不存在一劳永逸的解决方案


例


 回到刚才的讨论，其它情况下要进一步判断原级数是否**条件收敛**就比较困难

 这时可以尝试计算**求和式** $\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$ ，或估计**其模的上限**


 如果成功，就可以用 **Cauchy 收敛原理**来判断；如果**求和式** $\sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$ **无法计算**

或**估计上限**，则可以尝试**选读 §1.2** 介绍的 **Abel 判别法**和 **Dirichlet 判别法**

 就我们所知，并没有什么方法能够百分之百地解决任何级数的判敛问题

 即使是**正项级数**，虽然有一些更敏锐的判别法可资利用，比如**选读 §1.5** 介绍的 **Gauss 判别法**，但也并不存在一劳永逸的解决方案


 **例 几何级数** $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$


 当 $|\alpha| < 1$ 时，由于**正项级数** $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{|\alpha|}{1-|\alpha|}$ **收敛**，故**原级数绝对收敛**

 当 $|\alpha| \geq 1$ 时， $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha|^k \exp(ik \operatorname{Arg} \alpha) \neq 0$ ，故**原级数发散**

§2 复函数项级数

§2.1 普通函数项级数


 设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的每一项都是定义在点集 E 上的复变函数，则该级数称为复函数项级数


 $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ 称为其部分和

 如果对 E 中的一点 z_0 ，常数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ 收敛，则称级数在 z_0 处收敛

§2 复函数项级数


§2.1 普通函数项级数

 设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的每一项都是定义在点集 E 上的复变函数，则该级数称为复函数项级数


 $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ 称为其部分和

 如果对 E 中的一点 z_0 ，常数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ 收敛，则称级数在 z_0 处收敛

 如果 $\forall z \in E$ ，级数都收敛，则称它在点集 E 上收敛

 这时级数在 E 上每点有和，记作 $f(z)$ ，称为其和函数，即


$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$$

 从上述定义可以看出，这是一个逐点收敛的概念


 取定一点，则级数成为一个常数项级数，其判敛方法与上节所述无异

§2.2 一致收敛的函数项级数

 对于函数项级数的研究，不能只是满足于逐点收敛的概念

 因为即使级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上处处收敛，也看不出它在 E 上各点行为有何共性

 既然是函数项级数，我们自然更关心这种共性

 更重要的是，即使级数在 E 上处处收敛，也无法由级数中各项均具有的某种性质（比如连续、可导）而推断其和函数 $f(z)$ 具有同种性质

§2.2 一致收敛的函数项级数

🚗 对于函数项级数的研究，不能只是满足于逐点收敛的概念

🚗 因为即使级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上处处收敛，也看不出它在 E 上各点行为有何共性

🚗 既然是函数项级数，我们自然更关心这种共性

🚗 更重要的是，即使级数在 E 上处处收敛，也无法由级数中各项均具有的某种性质（比如连续、可导）而推断其和函数 $f(z)$ 具有同种性质

🚗 为了研究和函数 $f(z)$ 的性质，一个关键的概念是一致收敛，即级数在各点的收敛速度大致相同

💖 一致收敛定义 设在点集 E 上存在函数 $f(z)$ ，如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ ，当 $n > n_0$ 时，


$$|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

在 E 上处处成立，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上一致收敛于 $f(z)$

收敛与一致收敛的区别

 按这一定义，一致收敛当然就收敛，但反之则不然

 让我们看看收敛与一致收敛的区别在于何处


 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上收敛于 $f(z)$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，对于每一点 $z \in E$ ，


$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ ，当 $n > n_0$ 时， $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 在该点 z 成立

 由此可以看出，对于同样的 ε ，不同的点 z 可能需要不同的 n_0 ，即 $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$

收敛与一致收敛的区别


 按这一定义，**一致收敛**当然就**收敛**，但**反之则不然**


 让我们看看**收敛**与**一致收敛**的区别在于何处


 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上**收敛**于 $f(z)$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，对于每一点 $z \in E$ ，

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ ，当 $n > n_0$ 时， $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 在该点 z 成立

 由此可以看出，对于**同样的** ε ，**不同的点** z 可能需要**不同的** n_0 ，即 $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$

 这样就存在一种可能性，当 z 沿某一趋势变化时，比如 $z \rightarrow z_0$ ($z, z_0 \in E$) 时，所需的 $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$ **越来越大**，以至于**无法找到其有限的上界**

 亦即**无法找到一个共同的** n_0 ，使得当 $n > n_0$ 时， $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ **在 E 上一致成立**

 另一方面，**一致收敛**的定义正是要求**存在这样一个共同的** $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ，它**不依赖于 z** ，而**只与 ε 有关**

Weierstrass M-判别法

下面给出一个**一致收敛**的**充分条件**，它是一个常用的判别法

定理 (Weierstrass M-判别法) 如果存在**正数列** $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，使得

$$|f_k(z)| \leq M_k, \quad \forall z \in E, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

且**正项级数** $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ **收敛**，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在**点集** E 上**绝对**

收敛且一致收敛

证明见选读内容



Karl Weierstrass
(1815–1897)

Weierstrass M-判别法

下面给出一个**一致收敛**的**充分条件**，它是一个常用的判别法

定理 (Weierstrass M-判别法) 如果存在**正数列** $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，使得

$$|f_k(z)| \leq M_k, \quad \forall z \in E, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

且**正项级数** $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ **收敛**，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在点集 E 上**绝对收敛**且**一致收敛**



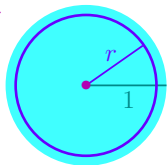
Karl Weierstrass
(1815–1897)

证明见选读内容

例 3 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 在 $r < 1$ 的闭圆 $|z| \leq r$ 上**绝对收敛**且**一致收敛**


事实上，存在**正项级数** $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ 满足**上述定理**的要求

该级数在**单位圆** $|z| < 1$ 上**绝对收敛**但不能**一致收敛**，见选读例 2





例 4

 **例 4** 当 $s > 1$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^s}$ 在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 上绝对收敛且一致收敛

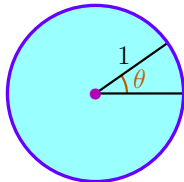
 事实上, 由于 $\left| \frac{e^{ik\theta}}{k^s} \right| = \frac{1}{k^s}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$), 存在正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ (其收敛性见高

等数学教材) 满足上述定理的要求

 等价地说, 当 $s > 1$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ 在单位圆周 $|z| = 1$ 上绝对且一致收敛


 实际上, 由于 $\left| \frac{z^k}{k^s} \right| \leq \frac{1}{k^s}$ ($|z| \leq 1$), 此时它在闭圆

$|z| \leq 1$ 上绝对且一致收敛



和函数连续定理

 **一致收敛**的重要性体现在下面两个定理上

 **和函数连续定理** 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在点集 E 上连续, 且级数在 E 上一致收敛于函数 $f(z)$, 则 $f(z)$ 也在 E 上连续

 证明见选读内容

 **和函数**在点 $z_0 \in E$ 连续就是 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 也就是

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_k(z)$$

 所以, 可以等价地说, **取极限**与**求和**可以**交换次序**, 其前提是级数要**一致收敛**


逐项积分定理

● **逐项积分定理** 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在曲线 C 上连续, 且级数在 C 上一致

收敛于函数 $f(z)$, 则可以沿 C 逐项积分, 即

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz$$


 证明见选读内容

 上式意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz = \int_C f(z) dz = \int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz$$

 亦即积分与求和可以交换次序, 其前提是级数要一致收敛


逐项积分定理

 **逐项积分定理** 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在曲线 C 上连续, 且级数在 C 上一致

收敛于函数 $f(z)$, 则可以沿 C 逐项积分, 即


$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz$$


 证明见选读内容

 上式意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz = \int_C f(z) dz = \int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz$$


 亦即积分与求和可以交换次序, 其前提是级数要一致收敛


 很容易想到的一个问题是, 什么情况下求导与求和可以交换次序?

 当然, 只有在级数各项均可导、或者说各项均解析的条件下, 这一问题才有意义

 所以这是一个关于解析函数项级数的问题, 下一小节就会给出答案


§2.3 解析函数项级数

 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 中各项均为解析函数，就称为解析函数项级数，有以下重要定理

 **Weierstrass 定理** 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在区域 D 内解析，且级数在 D 内的任一有界闭集上一致收敛 (称为在 D 上内闭一致收敛) 于函数 $f(z)$ ，则

 和函数 $f(z)$ 在 D 内解析

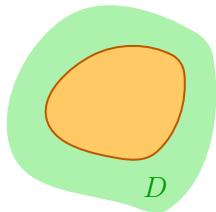
 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(p)}(z)$ ，其中 $p \in \mathbb{N}^+$

 **注** 这是一个非常重要的定理，它是级数理论的基石


 **复变函数论**中的级数理论也称为 **Weierstrass 级数理论**

 定理的证明见**选读内容**


 这个定理是**微积分**中所**没有的**



关于 Weierstrass 定理的讨论

 微积分中，要求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上收敛，各项都有导数，且 $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$

在 $[a, b]$ 上一致收敛，才能逐项求导一次，并且不能保证可以进一步逐项求导

 而这里只要求原级数一致收敛，且各项解析，那么就可以不断地逐项求导，且求导后的级数也一致收敛到和函数的同阶导数

 这里要求级数在 D 上内闭一致收敛，这比要求级数在 D 内一致收敛要弱

关于 Weierstrass 定理的讨论

🚗 微积分中，要求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上收敛，各项都有导数，且 $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$

在 $[a, b]$ 上一致收敛，才能逐项求导一次，并且不能保证可以进一步逐项求导

🚦 而这里只要求原级数一致收敛，且各项解析，那么就可以不断地逐项求导，且求导后的级数也一致收敛到和函数的同阶导数

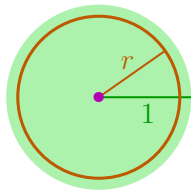
🚦 这里要求级数在 D 上内闭一致收敛，这比要求级数在 D 内一致收敛要弱

🚗 比如，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 虽然在单位圆 $|z| < 1$ 上不能一致收敛，但内闭一致收敛

🚗 这是因为例 3 表明它在闭圆 $|z| \leq r < 1$ 上一致收敛

🚗 从而，它的和函数 $f(z) = \frac{z}{1-z}$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内

解析，且可以逐项求导



§3 幂级数


§3.1 幂级数的敛散性

 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (a \in \mathbb{C}, c_n \in \mathbb{C})$$


的级数称为**幂级数**

 **注** 从本节开始，改用 n 来表示**求和指标**

 并注意现在求和**多了 $n = 0$ 一项**，不过这对于级数的性质**没有什么影响**

 显然，**幂级数的每一项 $c_n (z - a)^n$ 都是解析函数**

 事实上，**幂级数是最简单的解析函数项级数**

 根据 **Weierstrass 定理**，只要把级数的**收敛区域**研究清楚，那么**和函数的解析性质**也就清楚了

Abel 定理

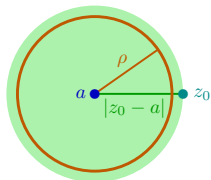
关于幂级数的敛散性，Abel 给出了下述重要定理

Abel 定理 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 $z_0 \neq a$ 收敛，则

- 1 它在圆 $K : |z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛
- 2 它在闭圆 $K_\rho : |z-a| \leq \rho < |z_0-a|$ 内一致收敛 (即在圆 K 上内闭一致收敛)



Niels Henrik Abel
(1802–1829)



Abel 定理

关于幂级数的敛散性，Abel 给出了下述重要定理

Abel 定理 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 $z_0 \neq a$ 收敛，则

- 它在圆 $K: |z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛
- 它在闭圆 $K_\rho: |z-a| \leq \rho < |z_0-a|$ 内一致收敛 (即在圆 K 上内闭一致收敛)

证明 ① 由已知条件，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ 收敛

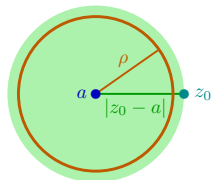
故 $\exists M > 0$ ，使得 $|c_n(z_0-a)^n| < M$ ， $n \in \mathbb{N}$

于是 $|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n < M \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$

当 $|z-a| < |z_0-a|$ 时，以右边为通项的级数 (它正比于几何级数) 收敛，由比较判别法，以左边为通项的级数亦收敛，即原级数在圆 K 上绝对收敛



Niels Henrik Abel
(1802–1829)

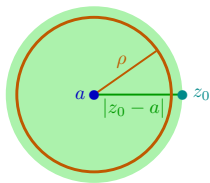


2 当 $|z - a| \leq \rho < |z_0 - a|$ 时, 有

$$|c_n(z - a)^n| < M \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n \leq M \left(\frac{\rho}{|z_0 - a|} \right)^n$$

右边是与 z 无关的正数, 且以此为通项的级数显然收敛

由 Weierstrass M-判别法, 原级数在闭圆 K_ρ 上一致收敛



证毕



Abel 定理的推论 1

2 当 $|z - a| \leq \rho < |z_0 - a|$ 时, 有

$$|c_n(z - a)^n| < M \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n \leq M \left(\frac{\rho}{|z_0 - a|} \right)^n$$

🐿️ 右边是与 z 无关的正数, 且以此为通项的级数显然收敛

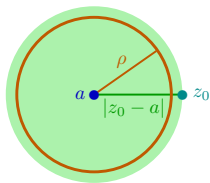
🐿️ 由 Weierstrass M-判别法, 原级数在闭圆 K_ρ 上一致收敛

🌲 由 Abel 定理, 立得以下推论

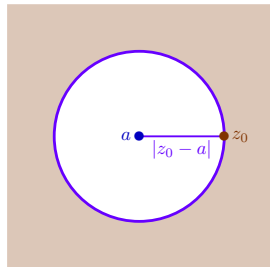
💜 推论 1 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ 在某点 $z_0 \neq a$

发散, 则它必在圆周 $|z - a| = |z_0 - a|$ 外发散

🦌 这是因为如果它在圆周 $|z - a| = |z_0 - a|$ 外某点收敛, 则 Abel 定理表明它必定在 z_0 收敛, 这与已知条件矛盾



证毕



Abel 定理的推论 2



由 Abel 定理和推论 1 可知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z 收敛或发散只与该点与 a 的距离 $|z-a|$ 有关，而与该点相对于 a 点的方向无关



即只与 $z-a$ 的模有关，而与其辐角无关



因此收敛点集与发散点集的分界必定是一个圆周，这就是下面的推论

Abel 定理的推论 2

🌴 由 **Abel 定理**和**推论 1** 可知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z 收敛或发散只与该点与 a 的距离 $|z-a|$ 有关，而与该点相对于 a 点的方向无关

🐵 即只与 $z-a$ 的模有关，而与其辐角无关

🥥 因此收敛点集与发散点集的分界必定是一个圆周，这就是下面的推论

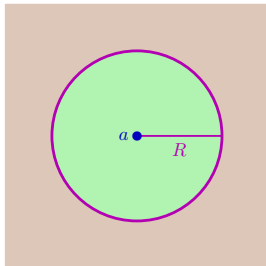
💖 **推论 2** 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ， $\exists R \geq 0$ ，使它在圆 $|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛，而在圆外处处发散

🌱 R 称为收敛半径， $|z-a| < R$ 称为收敛圆

🦂 而 $|z-a| = R$ 称为收敛圆周

🐫 应当指出，对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在


收敛圆周 $|z-a| = R$ 上的敛散性，**Abel 定理及其推论**没有给出结论



§3.2 收敛半径的求法

 **Abel 定理**的**推论 2**可等价表达为：令 $r = |z - a|$ ，则**正项**

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 当 $0 \leq r < R$ 时**收敛**，当 $r > R$ 时**发散**

 也就是说， R 是**该正项级数**的**收敛区间**与**发散区间**的**分界点**

§3.2 收敛半径的求法

🌺 **Abel 定理的推论 2** 可等价表达为：令 $r = |z - a|$ ，则**正项**

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 当 $0 \leq r < R$ 时**收敛**，当 $r > R$ 时**发散**

🐝 也就是说， R 是**该正项级数的收敛区间与发散区间的分界点**

🦋 根据判断**正项级数敛散性的 Cauchy 判别法**，不难推出下面**收敛半径的计算公式**

💙 **定理 (收敛半径的 Cauchy 计算公式)** 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$,



Augustin-Louis Cauchy

(1789–1857)

则**幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ 的**收敛半径**为

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 < l < \infty \\ 0, & l = \infty \\ \infty, & l = 0 \end{cases}$$

🐜 实际上，注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n| r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} r = lr$

🐌 则**正项级数** $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 的**收敛条件** $lr < 1$ 等价于 $r < \frac{1}{l} = R$

收敛半径的 d'Alembert 计算公式

☀ 由判断正项级数敛散性的 **d'Alembert 判别法** 可推出另一个计算**收敛半径**的公式

♥ **定理 (收敛半径的 d'Alembert 计算公式)** 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l$, 则**幂级数**

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ 的**收敛半径**为

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 < l < \infty \\ 0, & l = \infty \\ \infty, & l = 0 \end{cases}$$




Jean d'Alembert
(1717–1783)

🕸 实际上, 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| r^{n+1}}{|c_n| r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| r = lr$

🕷 则**正项级数** $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 的**收敛条件** $lr < 1$ 等价于 $r < \frac{1}{l} = R$


§3.3 和函数的解析性

 知道了幂级数的收敛范围，由前面有关定理，就可以得到以下结论，证明见选读

 **定理** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆 $K: |z-a| < R$ 上有如下性质


1 和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 解析

2 可以逐项求导，而收敛半径不变

 比如， $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(z-a)^n]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(z-a)^n$ 在 $|z-a| < R$ 上

绝对收敛且内闭一致收敛

3 可以逐项积分，而收敛半径不变

 比如， $\int_a^z f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^z c_n(\zeta-a)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ 在

$|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛

§4 解析函数的 Taylor 展开

§4.1 Taylor 定理

- 🍷 上节看到，一个**幂级数**在其**收敛圆**内具有**解析的和函数**
- 🍪 换句话说，它在**收敛圆**内代表一个**解析函数**
- 🍰 反过来，在**圆**内**解析的函数**是否可以展开成**幂级数**呢？
- 🍌 下面的定理给出了肯定的答案

§4 解析函数的 Taylor 展开

§4.1 Taylor 定理

☞ 上节看到，一个幂级数在其收敛圆内具有解析的和函数

☞ 换句话说，它在收敛圆内代表一个解析函数

☞ 反过来，在圆内解析的函数是否可以展开成幂级数呢？

🍌 下面的定理给出了肯定的答案

♥ **Taylor 定理** 设函数 $f(z)$ 在圆 $K: |z - a| < R$ 内解析，则在 K 内可以展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

其中

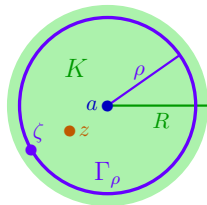
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

$$\Gamma_\rho: |\zeta - a| = \rho < R, \quad n \in \mathbb{N},$$


且展开式是唯一的





Brook Taylor
(1685–1731)




几何级数的和函数

 为了证明 **Taylor 定理**，需要先推出**几何级数**在其**收敛圆**上的**和函数**

 **几何级数**的**部分和**为
$$\sum_{n=0}^m z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1} + z^m$$

 两边同时**乘以** z ，有
$$z \sum_{n=0}^m z^n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + z^{m+1}$$

 两式**相减**，得 $(1 - z) \sum_{n=0}^m z^n = 1 - z^{m+1}$ ，即
$$\sum_{n=0}^m z^n = \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}$$

几何级数的和函数

🍌 为了证明 **Taylor 定理**，需要先推出**几何级数**在其**收敛圆**上的**和函数**

🍌 **几何级数**的**部分和**为 $\sum_{n=0}^m z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1} + z^m$

🍌 两边同时**乘以** z ，有 $z \sum_{n=0}^m z^n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + z^{m+1}$

🍌 两式**相减**，得 $(1 - z) \sum_{n=0}^m z^n = 1 - z^{m+1}$ ，即 $\sum_{n=0}^m z^n = \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}$

🍌 当 $|z| < 1$ 时， $\lim_{m \rightarrow \infty} z^{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} |z|^{m+1} \exp[i(m+1) \text{Arg } z] = 0$ ，故

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m z^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

🍌 也就是说，**几何级数**在 $|z| < 1$ 上的**和函数**为

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1$$

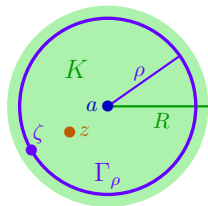
Taylor 定理的证明

证明 $\forall z \in K$, 总可以找到正数 ρ 使得 $|z - a| < \rho < R$

作圆周 $\Gamma_\rho: |\zeta - a| = \rho$, 则 z 在其内部

显然, $f(\zeta)$ 在 $\bar{K}_\rho: |\zeta - a| \leq \rho$ 上解析

根据 Cauchy 积分公式, 有
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



Taylor 定理的证明

证明 $\forall z \in K$, 总可以找到**正数** ρ 使得 $|z - a| < \rho < R$

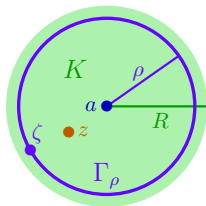
作圆周 $\Gamma_\rho: |\zeta - a| = \rho$, 则 z 在其**内部**

显然, $f(\zeta)$ 在 $\bar{K}_\rho: |\zeta - a| \leq \rho$ 上**解析**

根据 **Cauchy 积分公式**, 有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

在 Γ_ρ 上有 $\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < \frac{\rho}{\rho} = 1$, 利用 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \ (|z| < 1)$ 推出

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - (z - a)/(\zeta - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n$$



Taylor 定理的证明

证明 $\forall z \in K$, 总可以找到**正数** ρ 使得 $|z - a| < \rho < R$

作圆周 $\Gamma_\rho: |\zeta - a| = \rho$, 则 z 在其**内部**

显然, $f(\zeta)$ 在 $\bar{K}_\rho: |\zeta - a| \leq \rho$ 上**解析**

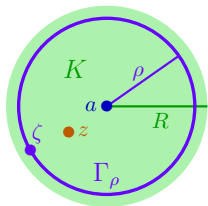
根据 **Cauchy 积分公式**, 有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

在 Γ_ρ 上有 $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < \frac{\rho}{\rho} = 1$, 利用 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ ($|z| < 1$) 推出

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - (z - a)/(\zeta - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n$$

$\zeta \in \Gamma_\rho$ 时, $\left| \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n \right| = \left(\frac{|z - a|}{\rho} \right)^n$ 与 ζ 无关, 以此为**通项的正项级数收敛**

故由 **Weierstrass M-判别法**, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n$ 在 Γ_ρ 上**一致收敛**



继续证明

🔍 又函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}$ 在 Γ_ρ 上有界

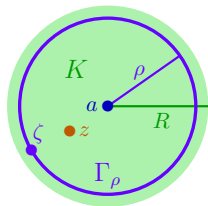
🕒 故 $\frac{f(z)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n$ 在 Γ_ρ 上一致收敛

📖 因而可以逐项积分，得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right] (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \end{aligned}$$

🍲 最后一步用到 **Cauchy 高阶导数公式**，上式即所求证

🍕 虽然开始时取 ρ 满足 $|z - a| < \rho < R$ ，但最后出现在系数中的积分显然与 ρ 的大小无关，只要 $\rho < R$ 即可



完成证明

为了证明展开式的**唯一性**，假设用某种方法找到在 K 内成立的**另一个展开式**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n$$

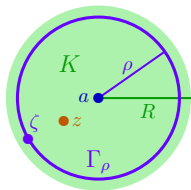
令 $z = a$ ，即得 $d_0 = f(a) = c_0$

又因为**幂级数逐项求导**后在 K 内仍**收敛**，故可**逐项求导 n 次**后令 $z = a$ ，得到

$$d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

可见，**展开式是唯一的**

证毕 ■



完成证明

为了证明**展开式**的**唯一性**，假设用某种方法找到在 K 内成立的**另一个展开式**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n$$

令 $z = a$ ，即得 $d_0 = f(a) = c_0$

又因为**幂级数****逐项求导**后在 K 内仍**收敛**，故可**逐项求导** n 次后令 $z = a$ ，得到

$$d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

可见，**展开式**是**唯一的**

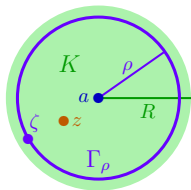
证毕 ■

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ 称为 $f(z)$ 在 a 点处的 **Taylor 展开式**

其右边称为 **Taylor 级数**， a 称为**展开中心**

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 称为 **Taylor 系数**

只要 $|z - a| < R$ ，Taylor 展开式就成立，故 Taylor 级数的**收敛半径大于或等于 R**

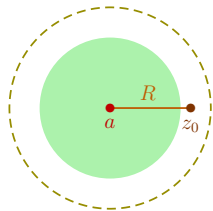


§4.2 展开式的收敛半径

- 🍪 如果求得了 Taylor 展开式的通项系数，就可以用 §3.2 的方法来计算收敛半径
- 🍪 然而，在 $f(z)$ 比较复杂的情况下，要求出展开式的通项系数是很困难的
- 🍪 因此，希望可通过被展开函数本身的性质来计算收敛半径
- 🍪 即使可以求出通项系数，另一种方法也可用于互相印证

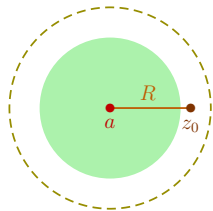
§4.2 展开式的收敛半径

- 🍪 如果求得了 Taylor 展开式的通项系数，就可以用 §3.2 的方法来计算收敛半径
- 🍪 然而，在 $f(z)$ 比较复杂的情况下，要求出展开式的通项系数是很困难的
- 🍪 因此，希望可通过被展开函数本身的性质来计算收敛半径
- 🏠 即使可以求出通项系数，另一种方法也可用于互相印证
- 🍪 关于这一问题，有以下简单的结论
- 🍪 以 a 点为中心将解析函数 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数，若 $f(z)$ 距离 a 点最近的奇点为 z_0 ，则收敛半径为 $R = |z_0 - a|$



§4.2 展开式的收敛半径


- 🍪 如果求得了 Taylor 展开式的通项系数，就可以用 §3.2 的方法来计算收敛半径
- 🍪 然而，在 $f(z)$ 比较复杂的情况下，要求出展开式的通项系数是很困难的
- 🍪 因此，希望可通过被展开函数本身的性质来计算收敛半径
- 🍪 即使可以求出通项系数，另一种方法也可用于互相印证
- 🍪 关于这一问题，有以下简单的结论
- 🍪 以 a 点为中心将解析函数 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数，若 $f(z)$ 距离 a 点最近的奇点为 z_0 ，则收敛半径为 $R = |z_0 - a|$




- 🍪 以 a 点为中心作圆 K ，只要 $f(z)$ 在其中解析，则 Taylor 展开式就在 K 内成立
- 🍪 因此，展开圆的圆周至少可以推至 z_0 处，从而收敛半径 $R \geq |z_0 - a|$
- 🍪 另一方面，假设 Taylor 级数的收敛半径 $R > |z_0 - a|$ ，由于幂级数的和函数在收敛圆内解析，故 $f(z)$ 在 z_0 解析，这与 z_0 是奇点的条件矛盾，故 $R \leq |z_0 - a|$
- 🍪 综上所述，即得 $R = |z_0 - a|$

§4.3 初等单值函数的 Taylor 展开式

 本小节给出若干常用的初等单值函数的 Taylor 展开式

 **例 1** 求 $f(z) = e^z$ 在 $a = 0$ 处的 Taylor 展开式

 **解** 由 $(e^z)' = e^z$ 得 $f^{(n)}(z) = e^z$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 故 $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

 于是所求 Taylor 展开式为


$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$


 $f(z) = e^z$ 在 z 平面上解析, 即在有限远处无奇点

 故展开式的收敛半径应为 $R = \infty$

§4.3 初等单值函数的 Taylor 展开式

 本小节给出若干常用的初等单值函数的 Taylor 展开式

 **例 1** 求 $f(z) = e^z$ 在 $a = 0$ 处的 Taylor 展开式


 **解** 由 $(e^z)' = e^z$ 得 $f^{(n)}(z) = e^z$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 故 $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

 于是所求 Taylor 展开式为

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

 $f(z) = e^z$ 在 z 平面上解析, 即在有限远处无奇点


 故展开式的收敛半径应为 $R = \infty$


 也可以通过 Taylor 系数 $c_n = \frac{1}{n!}$ 计算收敛半径, 根据 d'Alembert 计算公式, 有

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

 同样得到收敛半径 $R = \infty$


例 2

 **例 2** 求 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式


 **解** $c_0 = f(0) = 1$, 而


$$f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{d}{dz^{n-1}} \frac{1!}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz^{n-2}} \frac{2!}{(1-z)^3} = \cdots = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0) = n!, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 所求 Taylor 展开式为 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$, 即几何级数


例 2


 **例 2** 求 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式


 **解** $c_0 = f(0) = 1$, 而


$$f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{d}{dz^{n-1}} \frac{1!}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz^{n-2}} \frac{2!}{(1-z)^3} = \cdots = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0) = n!, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 所求 Taylor 展开式为 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$, 即几何级数


 由于 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 z 平面上有奇点 $z_0 = 1$, 而展开中心 $a = 0$, 故收敛半径应为 $R = |z_0 - a| = 1$

 此外, 由 Cauchy 计算公式得 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$, 故 $R = \frac{1}{l} = 1$

 以上两个结果经常被用来计算更复杂的函数的 Taylor 展开式, 应熟悉掌握

例 3

 **例 3** 求 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在 $a = 0$ 处的 Taylor 展开式

 **解** 由例 1 的结果, 注意到 $i^{2k} = (-1)^k$ ($k \in \mathbb{N}$), 有


$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

 故所求 Taylor 展开式为

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

 由于 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在 z 平面上解析, 即在有限远处无奇点, 故两展开式的收敛半径都是 $R = \infty$, 由 Taylor 系数计算收敛半径可得同样的结果

§4.4 初等多值函数的 Taylor 展开式

对于多值函数，首先要分出单值分支，然后才能作 Taylor 展开

例 4 求 $f(z) = \ln(1+z)$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式，规定 $f(0) = 0$

解 $f(z) = \ln(1+z)$ 的支点为 -1 和 ∞

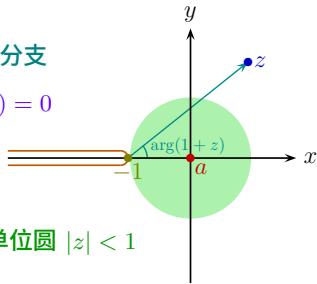
将 z 平面沿负实轴从 -1 到 ∞ 割破，可以分出单值分支

由于 $\ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z)$ ，规定 $f(0) = 0$

即规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = \arg[z - (-1)]|_{z=0} = 0$ ，

这就确定了单值分支

为了使 Taylor 级数收敛圆尽量大，割线不应该穿过单位圆 $|z| < 1$



§4.4 初等多值函数的 Taylor 展开式

对于多值函数，首先要分出单值分支，然后才能作 Taylor 展开

例 4 求 $f(z) = \ln(1+z)$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式，规定 $f(0) = 0$

解 $f(z) = \ln(1+z)$ 的支点为 -1 和 ∞

将 z 平面沿负实轴从 -1 到 ∞ 割破，可以分出单值分支

由于 $\ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z)$ ，规定 $f(0) = 0$

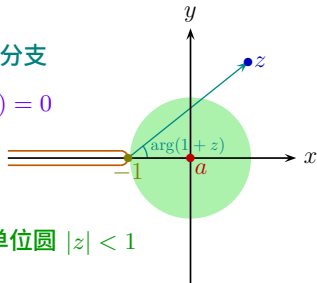
即规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = \arg[z - (-1)]|_{z=0} = 0$ ，

这就确定了单值分支

为了使 Taylor 级数收敛圆尽量大，割线不应该穿过单位圆 $|z| < 1$

按规定， $f(0) = 0$ ，故 $c_0 = 0$ ，又

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{d}{dz^{n-1}} [\ln(1+z)]' = \frac{d}{dz^{n-1}} \frac{1}{1+z} = \frac{d}{dz^{n-2}} \frac{-1!}{(1+z)^2} \\ &= \frac{d}{dz^{n-3}} \frac{(-)^2 2!}{(1+z)^3} = \cdots = \frac{(-)^{n-1} (n-1)!}{(1+z)^n} \end{aligned}$$



$\ln(1+z)$ 的 Taylor 展开式

🍷 从而 $f^{(n)}(0) = (-)^{n-1}(n-1)!$, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-)^{n-1}}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

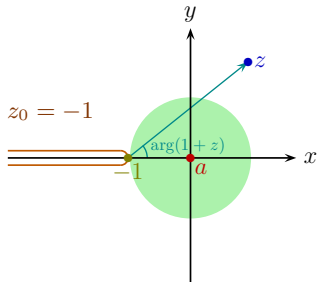
🍷 于是, 所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

🍵 $f(z) = \ln(1+z)$ 距离展开中心 $a=0$ 最近的奇点为 $z_0 = -1$

☕ 故展开式的收敛半径应为 $R=1$

🍲 由 Taylor 系数计算收敛半径可得同样的结果



$\ln(1+z)$ 的 Taylor 展开式

🍷 从而 $f^{(n)}(0) = (-)^{n-1}(n-1)!$, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-)^{n-1}}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

🍷 于是, 所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

🍵 $f(z) = \ln(1+z)$ 距离展开中心 $a=0$ 最近的奇点为 $z_0 = -1$

☕ 故展开式的收敛半径应为 $R=1$

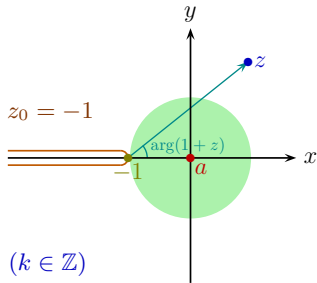
🍲 由 Taylor 系数计算收敛半径可得同样的结果

🍷 如果规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = \arg[z - (-1)]|_{z=0} = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

🍷 则 $c_0 = f(0) = 2k\pi i$, 而其余系数不变 ($\text{Ln } z$ 的多值性只体现在给虚部加上 $2k\pi$)

🍷 从而所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = 2k\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

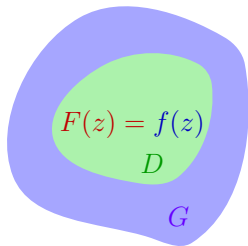


§5 解析开拓的基本概念

♥ **定义** 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 考虑一个包含 D 的更大的区域 G , 如果存在函数 $F(z)$ 在 G 内解析, 且在 D 内 $F(z) = f(z)$, 则称函数 $f(z)$ 可解析开拓到 G 内, 并称函数 $F(z)$ 为函数 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓

↓ **注** 解析开拓也称为解析延拓

🧠 如果这样定义的解析开拓存在的话, 可以证明它一定是唯一的



§5 解析开拓的基本概念

♥ **定义** 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 考虑一个包含 D 的更大的区域 G , 如果存在函数 $F(z)$ 在 G 内解析, 且在 D 内 $F(z) = f(z)$, 则称函数 $f(z)$ 可解析开拓到 G 内, 并称函数 $F(z)$ 为函数 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓

↓ **注** 解析开拓也称为解析延拓

🧠 如果这样定义的解析开拓存在的话, 可以证明它一定是唯一的

🔦 **例** $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在区域 $D: |z| < 1$ 内解析

🦀 而 $F(z) = \frac{1}{1-z}$ 在区域 $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ (表示复平面去掉点 $z = 1$) 内解析

👩 在 D 内 $F(z) = f(z)$

🦀 故 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓

