数学物理方法补充讲义

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html

2023 年 11 月 10 日

目　录

1 $X'' + \lambda X = 0$ 本征值问题

考虑常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.1}$$

其中 λ 为常数，分别结合下面几种边界条件组成本征值问题。

(1) 结合边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X(l) = 0$ 时，本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{1.2}$$

本征函数图象如图 1(a) 所示。

(2) 结合边界条件 $X'(0) = 0$ 和 $X'(l) = 0$ 时，本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

本征函数图象如图 1(b) 所示。

(3) 结合边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X'(l) = 0$ 时，本征值和本征函数为

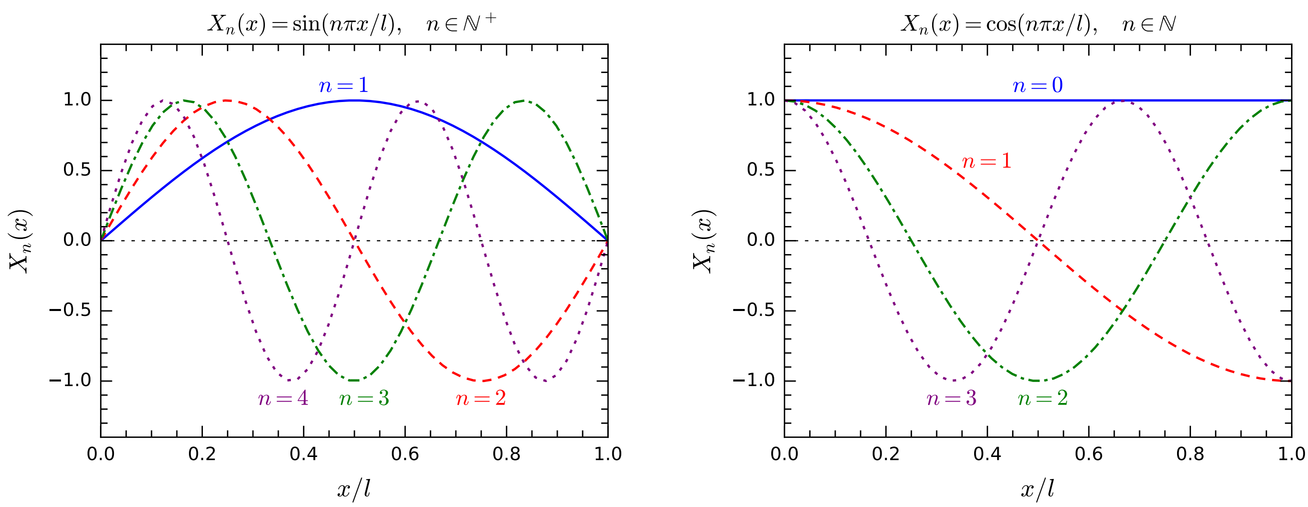
$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{1.4}$$

本征函数图象如图 2(a) 所示。

(4) 结合边界条件 $X'(0) = 0$ 和 $X(l) = 0$ 时，设 $\lambda > 0$ 对应的解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$，其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$，则 $X'(x) = -C\mu\sin\mu x + D\mu\cos\mu x$，而

$$X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0, \tag{1.5}$$

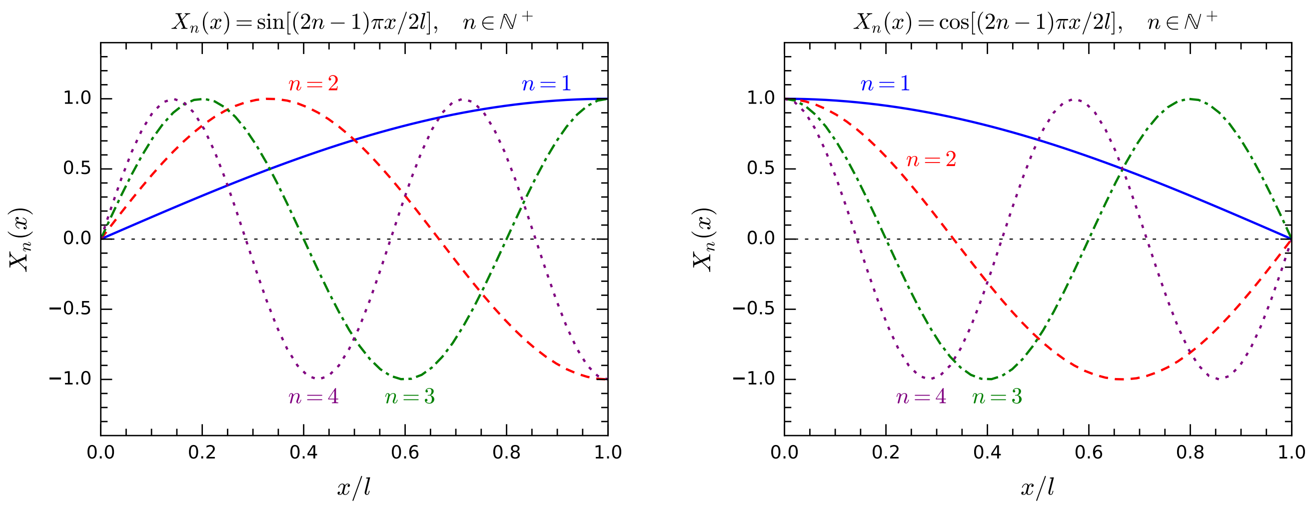
$$X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\mu l = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{1.6}$$



(a) 本征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$

(b) 本征函数 $X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi x}{l}$

图 1: 本征函数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ 和 $X_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ 的图像。



(a) 本征函数 $X_n(x) = \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$　　(b) 本征函数 $X_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$

图 2: 本征函数 $X_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2l]$ 和 $X_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2l]$ 的图像。

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{1.7}$$

本征函数图象如图 2(b) 所示。

(5) 结合边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X(l) + hX'(l) = 0$ 时，设 $\lambda > 0$ 对应的解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$，其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$，则

$$X(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad C = 0, \tag{1.8}$$

$$X(l) + hX'(l) = 0 \quad\Rightarrow\quad D\sin\mu l + Dh\mu\cos\mu l = 0 \quad\Rightarrow\quad \tan\mu l = -\mu h, \tag{1.9}$$

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin\mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{1.10}$$

其中 μ_n $(n \in \mathbb{N}^+)$ 是超越方程 $\tan\mu l = -\mu h$ 的正根，满足 $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$。当 $l = h = 1$ 时，图 3(a) 展示了方程 $\tan\mu l = -\mu h$ 的根 μ_n，相应本征函数 $X_n(x)$ 的图象如图 3(b) 所示。

(6) 结合边界条件 $X'(0) = 0$ 和 $X(l) + hX'(l) = 0$ 时，设 $\lambda > 0$ 对应的解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$，其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$，则

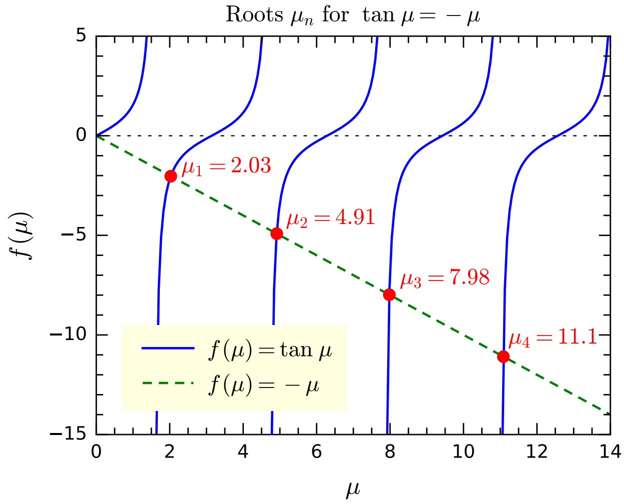
$$X'(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad D = 0 \tag{1.11}$$

$$X(l) + hX'(l) = 0 \quad\Rightarrow\quad C\cos\mu l - Ch\mu\sin\mu l = 0 \quad\Rightarrow\quad \cot\mu l = \mu h \tag{1.12}$$

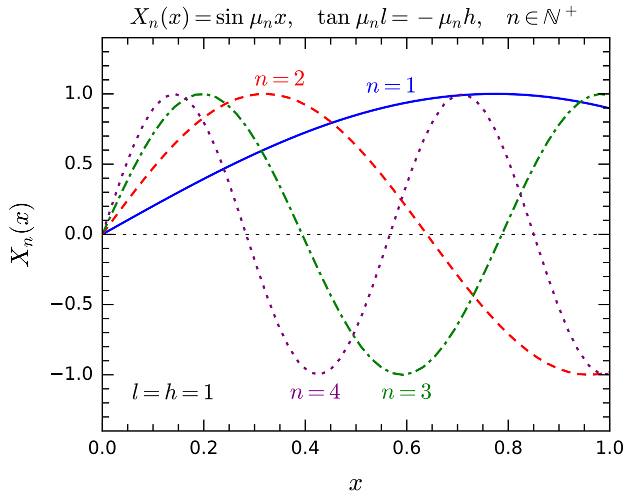
本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \cos\mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{1.13}$$

其中 μ_n $(n \in \mathbb{N}^+)$ 是超越方程 $\cot\mu l = \mu h$ 的正根，满足 $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$。当 $l = h = 1$ 时，图 4(a) 展示了方程 $\cot\mu l = \mu h$ 的根 μ_n，相应本征函数 $X_n(x)$ 的图象如图 4(b) 所示。

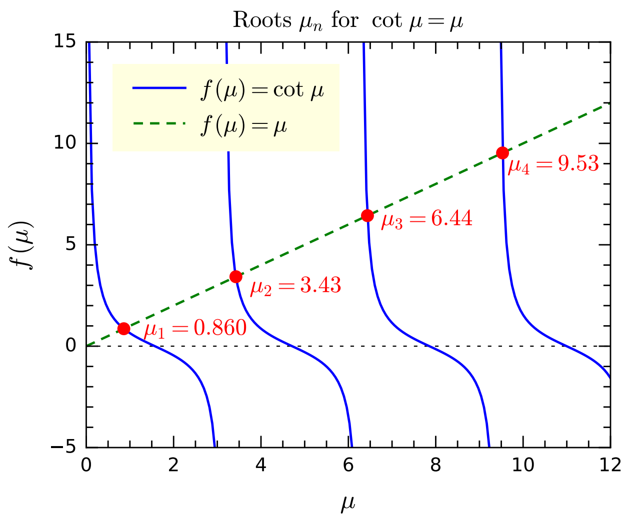


(a) $\tan\mu = -\mu$ 的根 μ_n

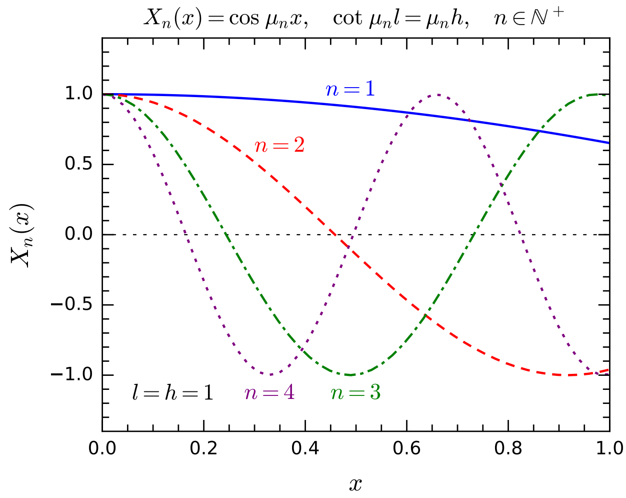


(b) 本征函数 $X_n(x) = \sin\mu_n x$

图 3: 方程 $\tan\mu = -\mu$ 的根 μ_n 和 $l = h = 1$ 时本征函数 $X_n(x) = \sin\mu_n x$ 的图像。



(a) $\cot\mu = \mu$ 的根 μ_n



(b) 本征函数 $X_n(x) = \cos\mu_n x$

图 4: 方程 $\tan\mu = -\mu$ 的根 μ_n 和 $l = h = 1$ 时本征函数 $X_n(x) = \cos\mu_n x$ 的图像。

2 Fourier 变换例题

例 1 计算矩形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$。

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos kx \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx}{k}\bigg|_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin k}{k}. \tag{2.2}$$

原函数和像函数的图像见图 5。

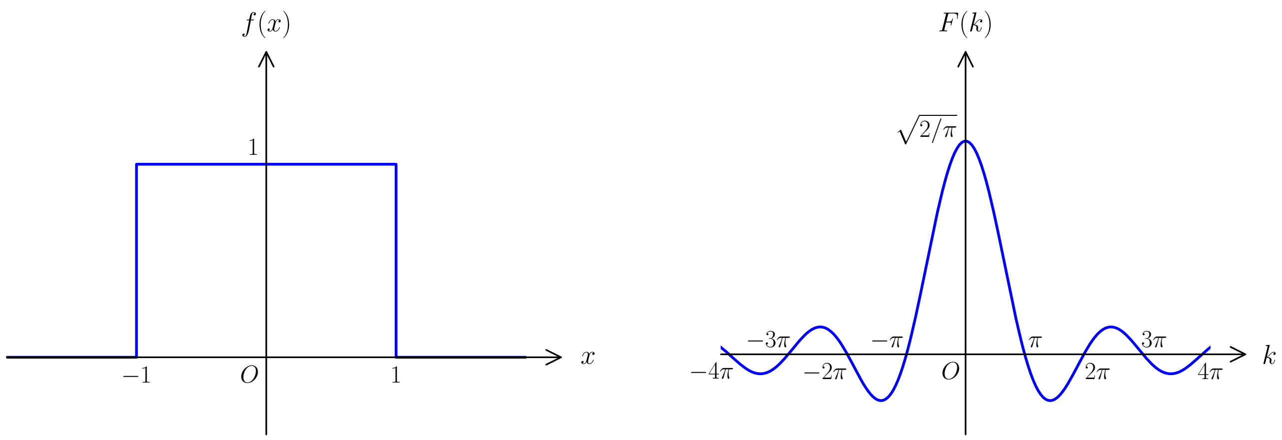


图 5: 矩形函数 $f(x)$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$。

例 2 计算三角形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases} \tag{2.3}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$。

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|x|)(\cos kx - \mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1-x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}\sin kx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\left[(1-x)\sin kx\Big|_0^1 + \int_0^1 \sin kx\,\mathrm{d}x\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}(1-\cos k). \end{aligned} \tag{2.4}$$

原函数和像函数的图像见图 6。

例 3 计算函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换 $F(k)$，其中 $a>0$。

解 Fourier 变换

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}I. \tag{2.5}$$

这里，积分

$$I \equiv \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\cos kx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax} = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\Big|_0^{\infty} - \frac{k}{a}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\,\mathrm{d}x$$

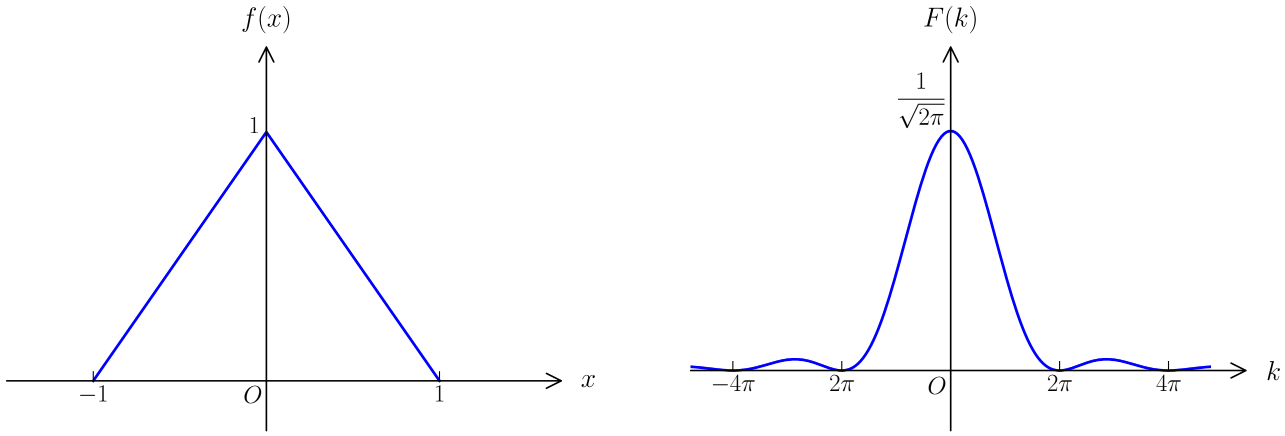


图 6: 三角形函数 $f(x)$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$。

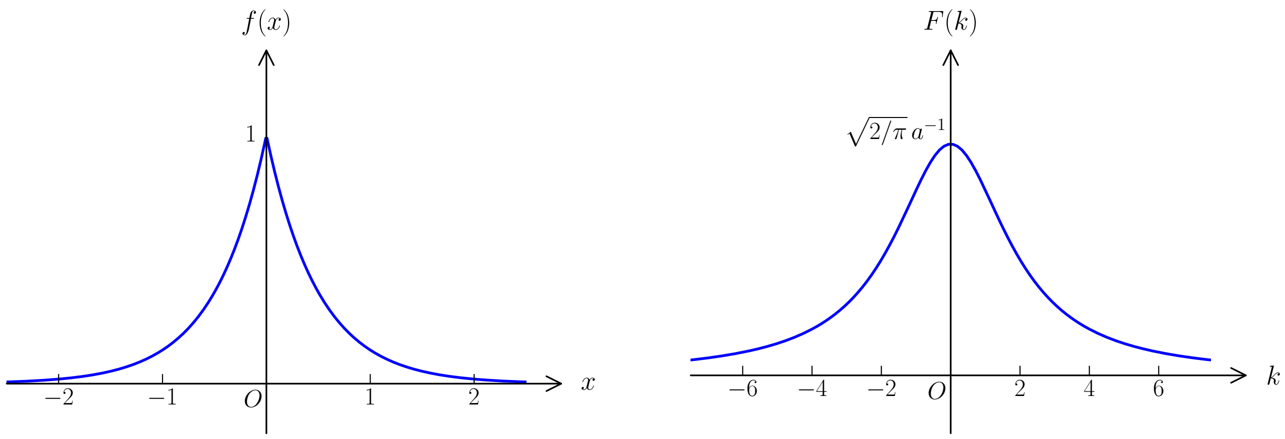


图 7: $a=2$ 时的函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$。

$$= \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2}\int_0^\infty \sin kx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax} = \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\bigg|_0^\infty - \frac{k^2}{a^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2}I, \tag{2.6}$$

故

$$I = \frac{a}{a^2+k^2}. \tag{2.7}$$

从而得到

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+k^2}. \tag{2.8}$$

原函数和像函数的图像见图 7。

例 4 计算 Gauss 函数

$$f(x) = \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) \tag{2.9}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$，其中 $a>0$。

解 Fourier 变换

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) \\
&= -\frac{a}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(-\mathrm{i}x)\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{a}{k\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{a}{k}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k} + \frac{k}{a}F(k) = 0. \tag{2.11}$$

求解这个微分方程，得到

$$F(k) = F(0)\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right), \tag{2.12}$$

其中

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

$F(0)$ 的平方是

$$\begin{aligned}
[F(0)]^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ay^2}{2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{a(x^2+y^2)}{2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

将平面上的直角坐标 (x, y) 替换成极坐标 (ρ, ϕ)，有

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi, \tag{2.15}$$

从而

$$\begin{aligned}
[F(0)]^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\Big|_0^{\infty}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{a},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

故

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \tag{2.17}$$

于是，$f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right). \tag{2.18}$$

可见，Gauss 函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换也是一个 Gauss 函数。原函数和像函数的图像见图 8。

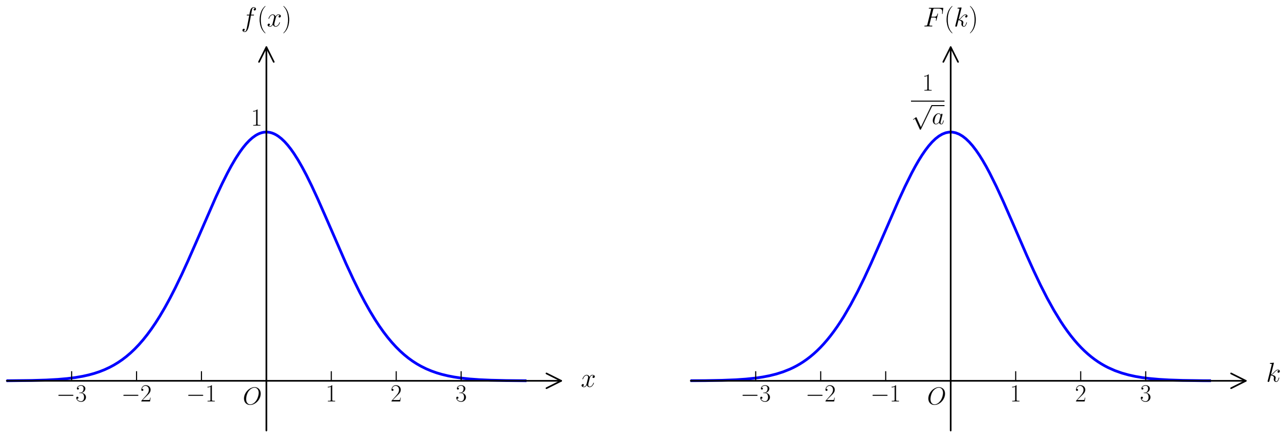


图 8: $a=1$ 时的 Gauss 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2/2}$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$。

利用上述 Fourier 变换关系可以推出一条有用的积分公式。对 $F(k)$ 作 Fourier 反变换，得

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) &= f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k,\end{aligned}\tag{2.19}$$

也就是说，存在积分公式

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k=\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right),\qquad a>0.\tag{2.20}$$

作变量替换

$$k\to y,\quad x\to\beta,\quad a\to\frac{1}{2\alpha},\tag{2.21}$$

将它改写成

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha y^2}\cos\beta y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),\qquad \alpha>0.\tag{2.22}$$

这条积分公式在第八章 §4.1 中得到应用。

例 5　计算

$$f(x)=\cos\omega_0x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\tag{2.23}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$，其中 ω_0 是实数。

解　Fourier 变换

$$\begin{aligned}F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0x}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\omega_0)x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-\omega_0)x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(k+\omega_0)^2}{2}\right]+\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(k-\omega_0)^2}{2}\right],\end{aligned}\tag{2.24}$$

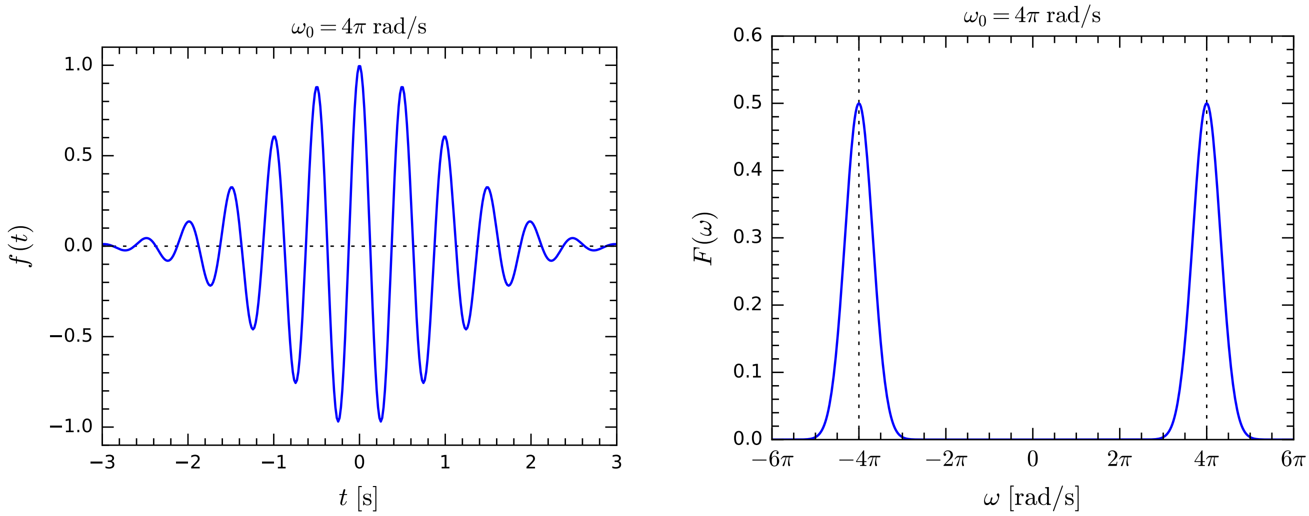


图 9: $\omega = 4\pi$ rad/s 时的函数 $f(t) = \cos\omega_0 t\, \mathrm{e}^{-t^2/2}$ 和它的 Fourier 变换 $F(\omega)$。

最后一步用到例 4 给出的 Fourier 变换 (2.18)。

将 x 改记为 t，k 改记为 ω，原函数和像函数写成

$$f(t) = \cos\omega_0 t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad F(\omega) = \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2}\right] + \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\right]. \tag{2.25}$$

可以把 $f(t)$ 看作一个受 Gauss 函数调制的余弦函数信号，取圆频率 $\omega_0 = 4\pi$ rad/s，则信号周期为 0.5 s，频率为 2 Hz，而 Fourier 变换将信号的时域分布转换成频域分布，原函数和像函数的图像见图 9。

3　球坐标系和柱坐标系示意图

球坐标系 (r, θ, ϕ) 的定义如图 10(a) 所示，图中还标出相互正交的单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$。球坐标系的三族坐标线处处相互正交，如图 10(b) 所示。

柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 的定义如图 10(c) 所示，图中还标出相互正交的单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$。柱坐标系的三族坐标线处处相互正交，如图 10(d) 所示。

4　Legendre 多项式函数图像

头五个 Legendre 多项式的具体形式为

$$\mathrm{P}_0(x) = 1, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{P}_1(x) = x, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{P}_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \tag{4.3}$$

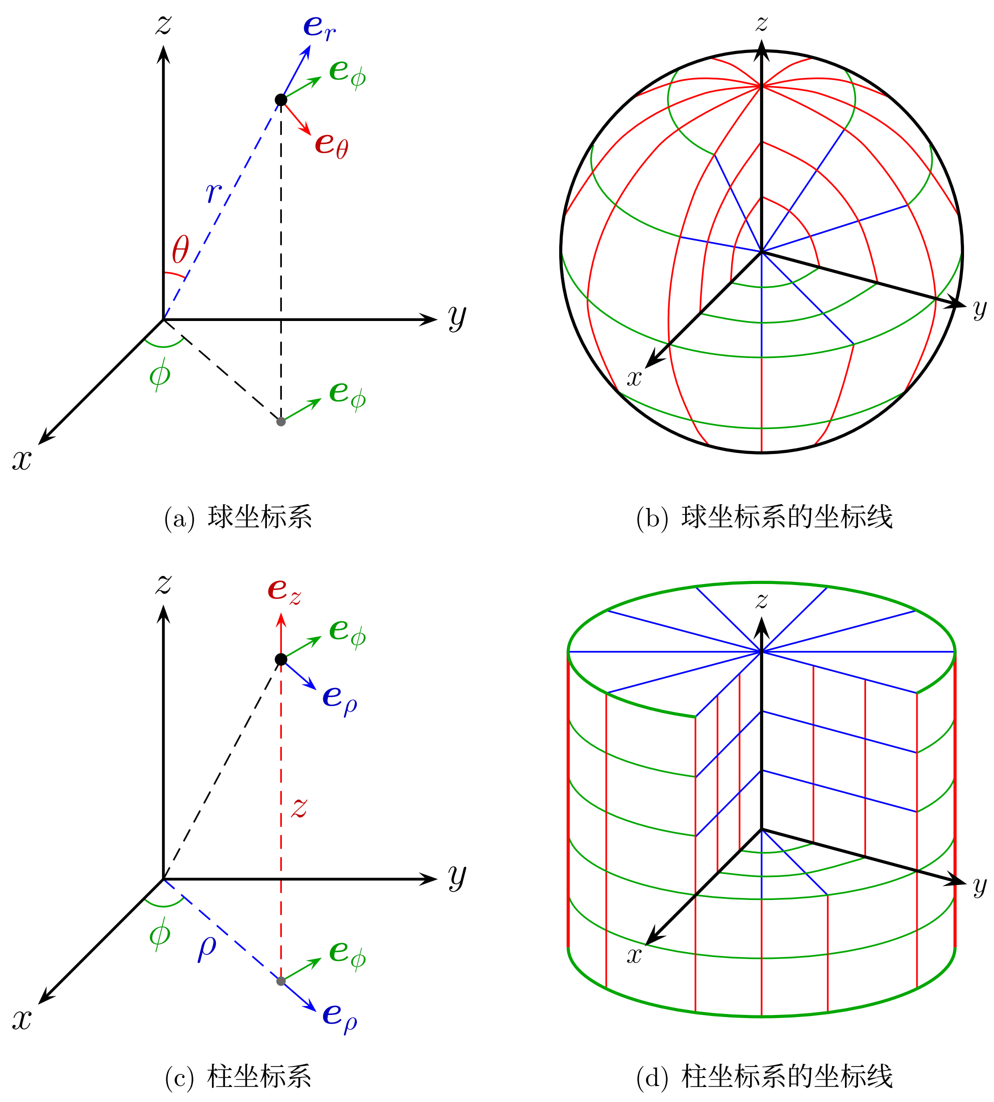


图 10: 球坐标系和柱坐标系示意图。

$$\mathrm{P}_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{P}_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \tag{4.5}$$

它们的函数图像如图 11 所示。

5 连带 Legendre 函数的应用

在球坐标系下对 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{5.1}$$

分离变量，寻找形如

$$u(\boldsymbol{r}) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi) \tag{5.2}$$

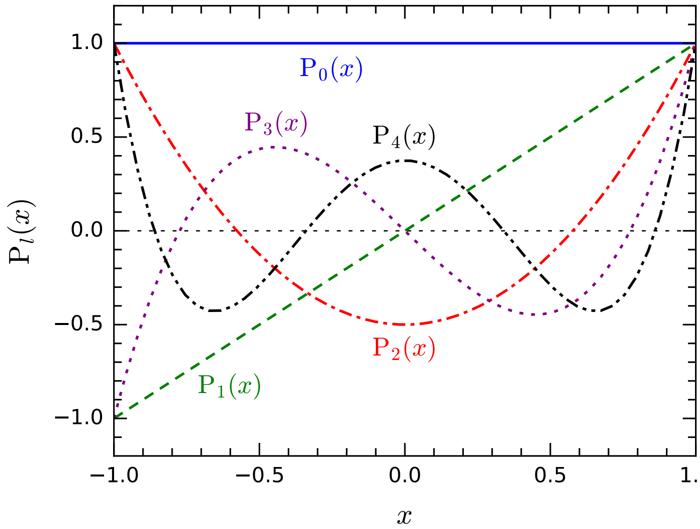


图 11: Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$ $(l=0,1,2,3,4)$ 的函数图像。

的解。考虑到关于 ϕ 的周期性边界条件，可得

$$\Phi(\phi)=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\},\quad m\in\mathbb{N}, \tag{5.3}$$

或者，

$$\Phi(\phi)=\{\cos m\phi,\sin m\phi\},\quad m\in\mathbb{N}. \tag{5.4}$$

令 $\cos\theta=x$，$H(\theta)=P(x)$，考虑到 $\theta=0,\pi$ 处的自然边界条件，$P(x)$ 应该满足本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P=0, \tag{5.5}$$

$$P(\pm1)=0\quad(m\neq0)\quad 或\quad |P(\pm1)|<\infty\quad(m=0). \tag{5.6}$$

$m=0$ 时对应于 Legendre 方程的本征值问题，$m\neq0$ 时对应于连带 Legendre 方程的本征值问题。两种情况的本征值和本征函数可以统一写作

$$\lambda_l=l(l+1),\quad P(x)=\{\mathrm{P}_l^m(x)\},\quad l=m,m+1,\cdots \tag{5.7}$$

这里 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 是连带 Legendre 函数。将本征值代回径向方程

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda_lR(r)=0, \tag{5.8}$$

可以解出

$$R(r)=\{r^l,r^{-(l+1)}\}. \tag{5.9}$$

因此，一般解为

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[r^l(A_{lm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}+B_{lm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi})+\frac{1}{r^{l+1}}(C_{lm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}+D_{lm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi})\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta), \tag{5.10}$$

也可以写成

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[r^l(\tilde{A}_{lm}\cos m\phi+\tilde{B}_{lm}\sin m\phi)+\frac{1}{r^{l+1}}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi+\tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{5.11}$$

例 已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $u_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi$，球内外无电荷，电势零点取在无穷远处，求空间各处的电势。

由于球内外无电荷，故电势在球内外均满足 Laplace 方程，定解问题为

$$\nabla^2 u=0\quad(r<a,r>a), \tag{5.12}$$

$$u|_{r=a}=u_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi,\qquad u|_{r=\infty}=0. \tag{5.13}$$

由 $\mathrm{P}_2(x)=(3x^2-1)/2$ 可得 $\mathrm{P}_2''(x)=(3x)'=3$，因而

$$\mathrm{P}_2^2(x)=(1-x^2)\mathrm{P}_2''(x)=3(1-x^2),\quad \mathrm{P}_2^2(\cos\theta)=3(1-\cos^2\theta)=3\sin^2\theta. \tag{5.14}$$

因此，$r=a$ 处的边界条件可以改写为

$$u|_{r=a}=u_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi=\frac{u_0}{6}3\sin^2\theta\sin 2\phi=\frac{u_0}{6}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{5.15}$$

首先，求解球内 $(r<a)$ 的电势，为了计算方便，将一般解写作

$$\begin{aligned}u_1(r,\theta,\phi)\ =\ &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^l(A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi)\right.\\&\left.+\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta).\end{aligned} \tag{5.16}$$

由于球内没有电荷，球心 $(r=0)$ 处电势应该有限，故对所有 l 和 m 均有 $C_{lm}=D_{lm}=0$。从而，球内的解应为

$$u_1(r,\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l(A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{5.17}$$

代入 $r=a$ 处的边界条件，得

$$u_1(a,\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)=\frac{u_0}{6}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{5.18}$$

可见，非零系数只有

$$B_{2,2}=\frac{u_0}{6}, \tag{5.19}$$

其它系数均为零。于是得到球内的解为

$$u_1(r,\theta,\phi)=\frac{u_0}{6}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{5.20}$$

其次，求解球外 $(r > a)$ 的电势，将一般解写作

$$u_2(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^l(\tilde{A}_{lm}\cos m\phi + \tilde{B}_{lm}\sin m\phi)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi + \tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{5.21}$$

由于无穷远 $(r = \infty)$ 处的电势已取为零，故对所有 l 和 m 均有 $\tilde{A}_{lm} = \tilde{B}_{lm} = 0$。从而，球外的解应为

$$u_2(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi + \tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{5.22}$$

代入 $r = a$ 处的边界条件，得

$$u_2(a,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi + \tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) = \frac{u_0}{6}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{5.23}$$

可见，非零系数只有

$$\tilde{D}_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \tag{5.24}$$

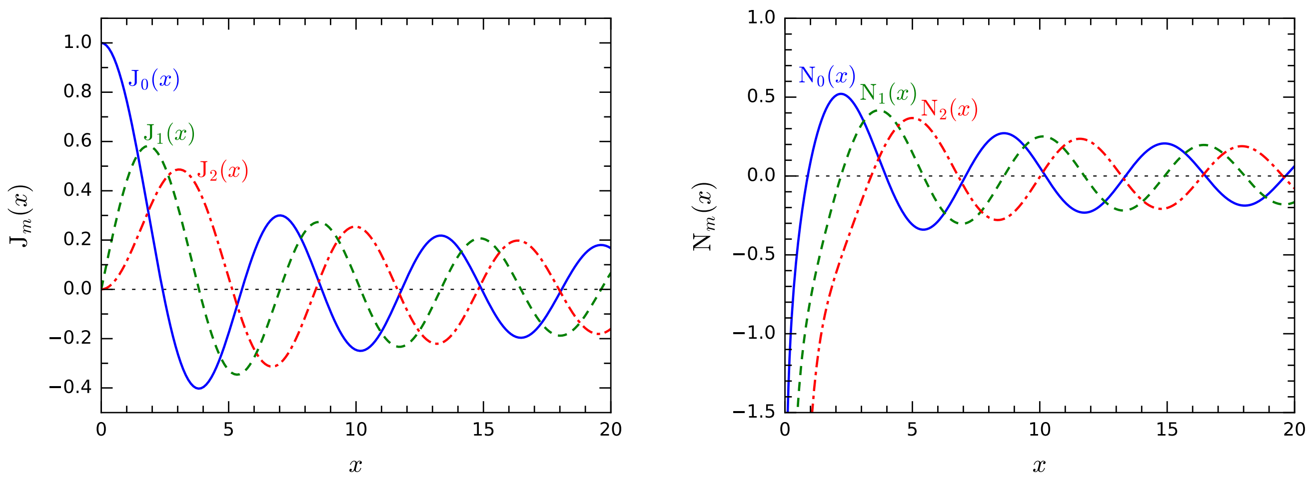
其它系数均为零。于是得到球外的解为

$$u_2(r,\theta,\phi) = \frac{u_0}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{5.25}$$

6 柱函数图像

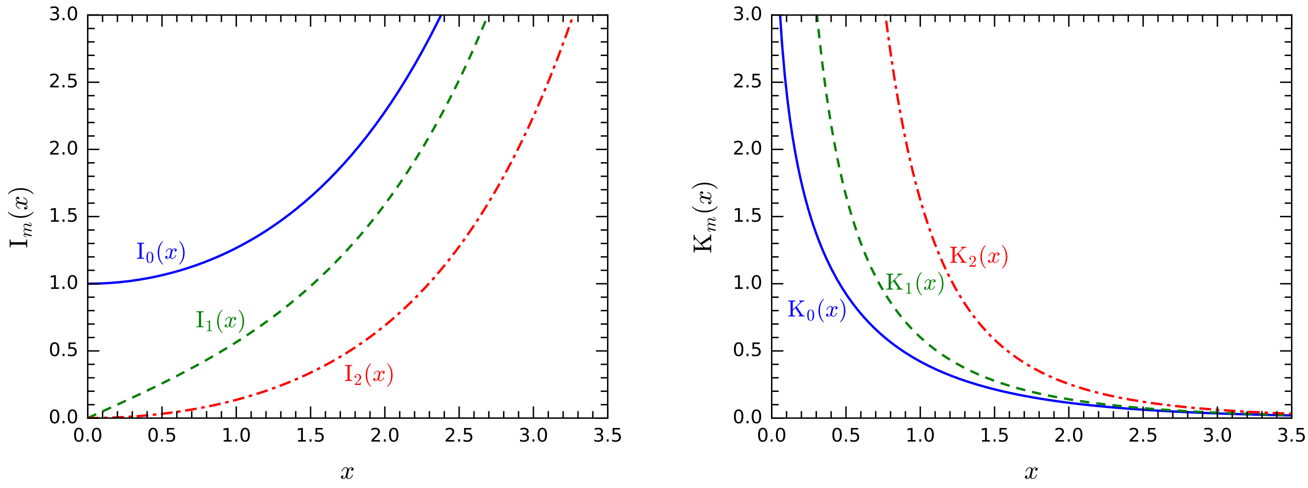
头三个 Bessel 函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 和头三个 Neumann 函数 $\mathrm{N}_m(x)$ 的图像如图 12 所示。

头三个虚宗量 Bessel 函数 $\mathrm{I}_m(x)$ 和头三个虚宗量 Hankel 函数 $\mathrm{K}_m(x)$ 的图像如图 13 所示。



(a) Bessel 函数 $\mathrm{J}_m(x)$ (b) Neumann 函数 $\mathrm{N}_m(x)$

图 12: Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(x)$、$\mathrm{J}_1(x)$、$\mathrm{J}_2(x)$ 和 Neumann 函数 $\mathrm{N}_0(x)$、$\mathrm{N}_1(x)$、$\mathrm{N}_2(x)$ 的图像。



(a) 虚宗量 Bessel 函数 $\mathrm{I}_m(x)$ (b) 虚宗量 Hankel 函数 $\mathrm{K}_m(x)$

图 13: 虚宗量 Bessel 函数 $\mathrm{I}_0(x)$、$\mathrm{I}_1(x)$、$\mathrm{I}_2(x)$ 和虚宗量 Hankel 函数 $\mathrm{K}_0(x)$、$\mathrm{K}_1(x)$、$\mathrm{K}_2(x)$ 的图像。

当 $x \to \infty$ 且 $-\pi < \arg x < \pi$ 时，Bessel 函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 Neumann 函数 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 的渐近形式为

$$\mathrm{J}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{6.1}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{6.2}$$

$\mathrm{J}_0(x)$ 和 $\mathrm{N}_0(x)$ 的渐近行为如图 14(a) 所示。

当 $x \to \infty$ 时，虚宗量 Bessel 函数 $\mathrm{I}_\nu(x)$、虚宗量 Hankel 函数 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 的渐近形式为

$$\mathrm{I}_\nu(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2} \tag{6.3}$$

$$\mathrm{K}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, \mathrm{e}^{-x}, \quad -\pi < \arg x < \pi. \tag{6.4}$$

$\mathrm{I}_0(x)$ 和 $\mathrm{K}_0(x)$ 的渐近行为如图 14(b) 所示。

头三个球 Bessel 函数 $\mathrm{j}_l(x)$ 的具体形式为

$$\mathrm{j}_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \tag{6.5}$$

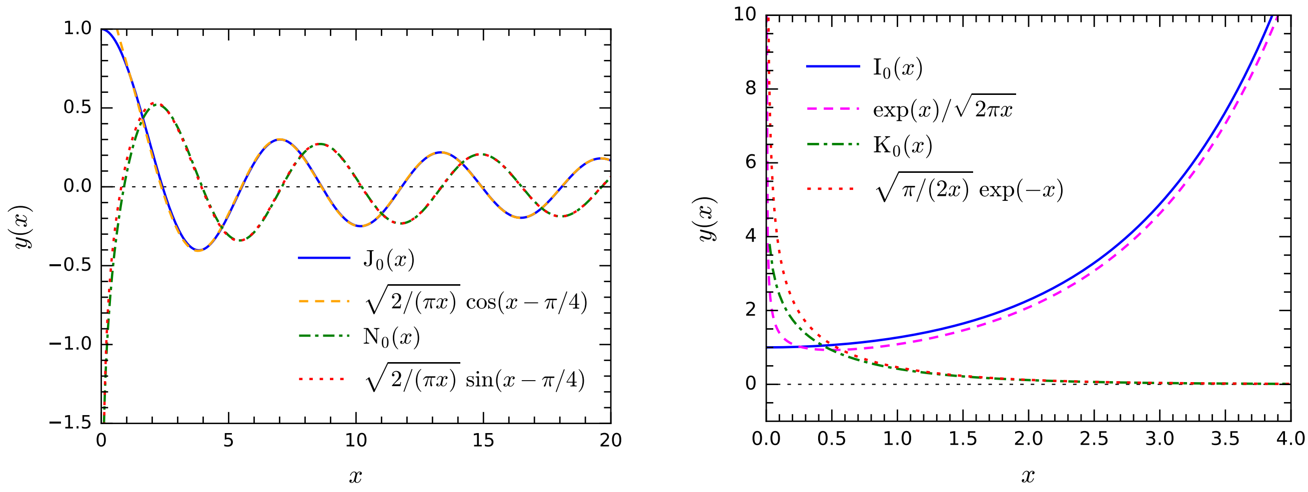
$$\mathrm{j}_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \tag{6.6}$$

$$\mathrm{j}_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2}. \tag{6.7}$$

它们的图像如图 15(a) 所示。

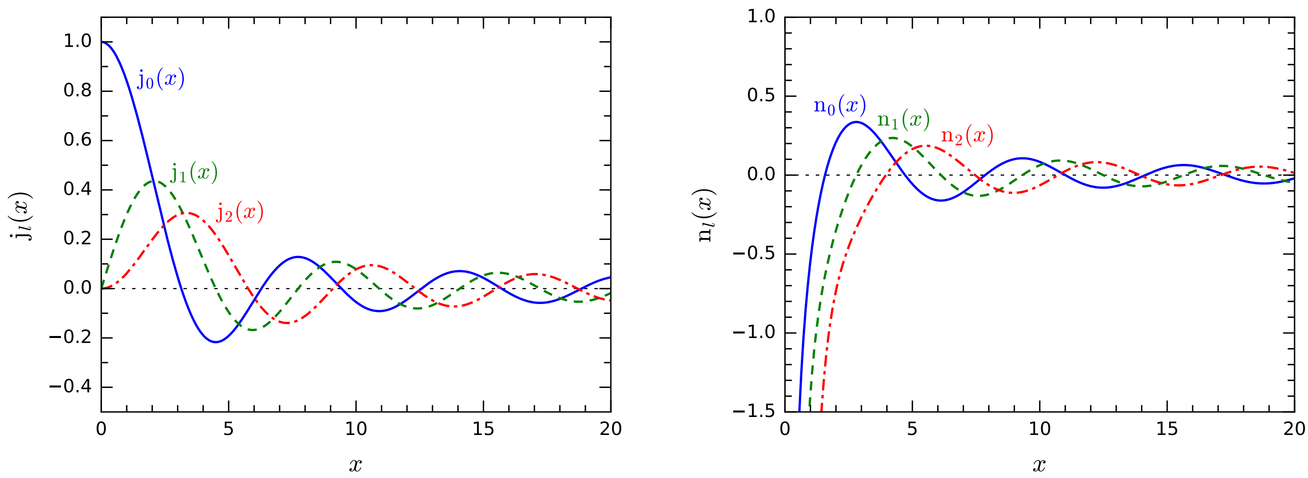
头三个球 Neumann 函数 $\mathrm{n}_l(x)$ 的具体形式为

$$\mathrm{n}_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \tag{6.8}$$



(a) $J_0(x)$ 和 $N_0(x)$ 的渐近行为 (b) $I_0(x)$ 和 $K_0(x)$ 的渐近行为

图 14: Bessel 函数 $J_0(x)$、Neumann 函数 $N_0(x)$、虚宗量 Bessel 函数 $I_0(x)$、虚宗量 Hankel 函数 $K_0(x)$ 的渐近行为。



(a) 球 Bessel 函数 $j_l(x)$ (b) 球 Neumann 函数 $n_l(x)$

图 15: 球 Bessel 函数 $j_0(x)$、$j_1(x)$、$j_2(x)$ 和球 Neumann 函数 $n_0(x)$、$n_1(x)$、$n_2(x)$ 的图像。

$$n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \tag{6.9}$$

$$n_2(x) = \left(-\frac{3}{x^2}+1\right)\frac{\cos x}{x} - \frac{3\sin x}{x^2}. \tag{6.10}$$

它们的图像如图 15(b) 所示。