

量子场论

第 11 章 路径积分量子化

11.5 节 Schwinger-Dyson 方程和对称性

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2026 年 7 月 1 日

11.5 节 Schwinger-Dyson 方程和对称性

11.5.1 小节 Schwinger-Dyson 方程



本节推导 **Schwinger-Dyson 方程**，它体现了**量子场论**和**经典场论**在**运动方程**和**守恒流方程**上的差异



然后，用它推出 **Ward-Takahashi 恒等式**，进而证明 **Ward 恒等式**

11.5 节 Schwinger-Dyson 方程和对称性

11.5.1 小节 Schwinger-Dyson 方程



本节推导 **Schwinger-Dyson 方程**，它体现了**量子场论**和**经典场论**在**运动方程**和**守恒流方程**上的差异



然后，用它推出 **Ward-Takahashi 恒等式**，进而证明 **Ward 恒等式**



在**路径积分量子化**中，**实标量场** $\phi(x)$ 的**两点关联函数**表达为

$$\langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)] | 0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) e^{iS}$$



其中**作用量** $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ ，生成泛函的**归一化因子** $\mathcal{N} = \left(\int \mathcal{D}\phi e^{iS} \right)^{-1}$



依照 1.6.2 小节对**经典场论**中**作用量原理**的讨论，考虑**变分** $\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ 对**作用量** S 的影响，那么由 $\delta S = 0$ 可以导出 $\phi(x)$ 的**经典运动方程**，即 **Euler-Lagrange 方程**

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

变量替换

🌸 取**无穷小量** $\delta\phi(x) = \varepsilon(x)$ ，但不把它看成变分，而是利用 $\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon(x)$ 对上述泛函积分进行**变量替换**

🌿 **泛函测度**具有**平移不变性**，故 $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ ，**两点关联函数**在**变量替换**下化为

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)} &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi' \phi'(x_1) \phi'(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi')} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi [\phi(x_1) + \varepsilon(x_1)][\phi(x_2) + \varepsilon(x_2)] e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi + \varepsilon, \partial_\mu(\phi + \varepsilon)]} \end{aligned}$$

🌹 以 $\varepsilon(x)$ 为**小量**，对上式中的拉氏量作 **Taylor 展开**，利用**分部积分**推出

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}[\phi + \varepsilon, \partial_\mu(\phi + \varepsilon)] &= \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \\ &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \varepsilon \right] - \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \varepsilon \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \varepsilon \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Taylor 展开



从而

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi+\varepsilon, \partial_\mu(\phi+\varepsilon)]} = e^{iS} \left\{ 1 + i \int d^4x \varepsilon(x) \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$



以此将两点关联函数展开为

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{iS} &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{iS} \\ &+ \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \left\{ i \int d^4x \varepsilon(x) \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \phi(x_1) \phi(x_2) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(x_1) \phi(x_2) + \phi(x_1) \varepsilon(x_2) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

上式成立意味着右边 ε^1 阶的项必须为零，故

$$\begin{aligned} &\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} i \int d^4x \varepsilon(x) \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi} \right] \phi(x_1) \phi(x_2) \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} [\varepsilon(x_1) \phi(x_2) + \phi(x_1) \varepsilon(x_2)] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} i \int d^4x \varepsilon(x) [-i\delta^{(4)}(x - x_1) \phi(x_2) - i\phi(x_1) \delta^{(4)}(x - x_2)] \end{aligned}$$

Schwinger-Dyson 方程的路径积分形式

✿ 由 $\varepsilon(x)$ 的任意性得到

$$\begin{aligned} & \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi} \right] \phi(x_1) \phi(x_2) \\ &= -i \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} [\delta^{(4)}(x - x_1) \phi(x_2) + \phi(x_1) \delta^{(4)}(x - x_2)] \end{aligned}$$

🌲 推广到 n 点关联函数, 有

$$\begin{aligned} & \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi} \right] \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \\ &= -i \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \sum_{i=1}^n \delta^{(4)}(x - x_i) \phi(x_1) \cdots \phi(x_{i-1}) \phi(x_{i+1}) \cdots \phi(x_n) \end{aligned}$$

实标量场的 ϕ^4 理论



对于实标量场的 ϕ^4 理论，拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$



故

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\partial^2 + m^2)\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$



代入到上一页的方程中，有

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}(\partial_x^2 + m^2) \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \\ & + \frac{\lambda}{3!} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \phi^3(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \\ & = -i\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \sum_{i=1}^n \delta^{(4)}(x - x_i) \phi(x_1)\cdots\phi(x_{i-1})\phi(x_{i+1})\cdots\phi(x_n) \end{aligned}$$

ϕ^4 理论中的 Schwinger-Dyson 方程

🌳 改写成多点关联函数的方程，得

$$\begin{aligned} & (\partial_x^2 + m^2) \langle 0 | T[\phi^H(x) \phi^H(x_1) \phi^H(x_2) \cdots \phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ &= -\frac{\lambda}{3!} \langle 0 | T\{[\phi^H(x)]^3 \phi^H(x_1) \phi^H(x_2) \cdots \phi^H(x_n)\} | 0 \rangle \\ &\quad - i \sum_{i=1}^n \delta^{(4)}(x - x_i) \langle 0 | T[\phi^H(x_1) \cdots \phi^H(x_{i-1}) \phi^H(x_{i+1}) \cdots \phi^H(x_n)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

🍇 这是 ϕ^4 理论中的 Schwinger-Dyson 方程

🍋 上式并未对耦合常数 λ 进行微扰展开，可见，Schwinger-Dyson 方程是非微扰的精确方程，既对微扰理论成立，也对非微扰理论成立

🍇 方程右边第一项是相互作用引起的，剩下的求和项中每一项都包含四维 δ 函数与 $(n-1)$ 点关联函数的乘积，这些项称为接触项 (contact term)

🍒 当 $x^\mu = x_i^\mu$ 时， $\phi^H(x)$ 与 $\phi^H(x_i)$ 相互接触，而 $n=i$ 的接触项才有非平庸的贡献

与经典场论比较

🍉 在 ϕ^4 理论中, 实标量场算符满足**经典运动方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi^H = -\frac{\lambda}{3!}(\phi^H)^3$$

🍌 **Schwinger-Dyson 方程**与它相似, 但多出了**接触项**, 接触项是**量子理论**所**特有**的

🍋 因此, 可将 Schwinger-Dyson 方程看作 $(n+1)$ **点关联函数**

$$\langle 0 | T[\phi^H(x)\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle$$

的**量子运动方程**, 而**接触项**体现了**量子场论**与**经典场论**之间的**差异**

🍌 从另一个角度看, **Schwinger-Dyson 方程**给出了 $(n+1)$ **点关联函数**、 $(n-1)$ **点关联函数**和**相互作用项**引起的关联函数之间的**关系**



Julian Schwinger
(1918–1994)



Freeman Dyson
(1923–2020)

正则量子化方法的推导



正则量子化方法同样能导出 **Schwinger-Dyson 方程**。利用**等时对易关系**，可推出

$$\begin{aligned} & (\partial_x^2 + m^2) \langle 0 | T[\phi^H(x) \phi^H(x_1) \phi^H(x_2) \cdots \phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T[(\partial_x^2 + m^2) \phi^H(x) \phi^H(x_1) \phi^H(x_2) \cdots \phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ & - i \sum_{i=1}^n \delta^{(4)}(x - x_i) \langle 0 | T[\phi^H(x_1) \cdots \phi^H(x_{i-1}) \phi^H(x_{i+1}) \cdots \phi^H(x_n)] | 0 \rangle \end{aligned}$$



当 $n = 1$ 时，上式的推导过程见习题 11.5，进一步推广就得到任意 n 的结果



注意，上式中的**时序乘积**包含与 x^0 有关的**阶跃函数**，如 $\theta(x^0 - x_i^0)$ ，因此，将 **Klein-Gordon 微分算符** $(\partial_x^2 + m^2)$ 移动到**时序乘积**中得到的第一项并不等于原式



缺少的东西就是**接触项**，它们起源于 $\partial_{x^0} \theta(x^0 - x_i^0) = \delta(x^0 - x_i^0)$ 和**非平庸的等时对易关系** $[\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] = i\hbar \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$



在**经典极限**下，约化 **Planck 常数** $\hbar \rightarrow 0$ ，则 $[\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] \rightarrow 0$ ，导致**接触项消失**，退化为经典理论



将**经典运动方程** $(\partial^2 + m^2)\phi^H = -\frac{\lambda}{3!}(\phi^H)^3$ 代入，便得到 **Schwinger-Dyson 方程**

自由理论的 Schwinger-Dyson 方程

🥜 令 $\lambda = 0$ ，则 ϕ^4 理论退化为自由理论，而 $n = 1$ 时的 Schwinger-Dyson 方程变成

$$(\partial_x^2 + m^2) \langle 0 | T[\phi^H(x) \phi^H(x_1)] | 0 \rangle_{\text{free}} = -i\delta^{(4)}(x - x_1)$$

🥜 这是 10.5.2 小节已经得到的结果

🍎 它表明自由实标量场的两点关联函数是 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_x^2 + m^2)$ 的 Green 函数

连续的整体对称性

 对于一种连续的整体对称性，可以导出类似的 **Schwinger-Dyson 方程**

 考虑自由的 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ ，拉氏量为 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$

 根据 5.5.3 小节， $\mathcal{L}$ 在 **U(1) 整体变换** $\psi'(x) = e^{iq\theta}\psi(x)$ 的作用下保持不变

 因而存在 **U(1) 整体对称性**，相应的 **U(1) 守恒流** $J^\mu(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 满足**守恒流方程** $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ ，其中 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$

连续的整体对称性

 对于一种**连续的整体对称性**，可以导出类似的 **Schwinger-Dyson 方程**

 考虑**自由的 Dirac 旋量场** $\psi(x)$ ，拉氏量为 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$

 根据 5.5.3 小节， $\mathcal{L}$ 在 **U(1) 整体变换** $\psi'(x) = e^{iq\theta}\psi(x)$ 的作用下保持不变

 因而存在 **U(1) 整体对称性**，相应的 **U(1) 守恒流** $J^\mu(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 满足**守恒流方程** $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ ，其中 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$

 现在，把 **U(1) 变换参数**改为**时空坐标的函数** $\theta(x)$ ，用 $\psi'(x) = e^{iq\theta(x)}\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}'(x) = e^{-iq\theta(x)}\bar{\psi}(x)$ 对泛函积分**变量替换**，则泛函测度在这样的**么正变换**下保持不变，有 $\mathcal{D}\psi' = \mathcal{D}\psi$ ， $\mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{D}\bar{\psi}$ ，拉氏量在变量替换下化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x) &= i\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) - m\bar{\psi}'(x)\psi'(x) \\ &= ie^{-iq\theta(x)}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu[e^{iq\theta(x)}\psi(x)] - me^{-iq\theta(x)}\bar{\psi}(x)e^{iq\theta(x)}\psi(x) \\ &= \mathcal{L}(x) - q\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = \mathcal{L}(x) - J^\mu(x)\partial_\mu\theta(x)\end{aligned}$$

 这与**规范变换在形式上相同**，因而拉氏量**不再保持不变**，而是多出一个与**守恒流** $J^\mu(x)$ 有关的项

变量替换下的两点关联函数

🐫 进一步，**两点关联函数**在变量替换下化为

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T[\psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}(x)} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' \psi'_a(x_1) \bar{\psi}'_b(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}'(x)} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iq\theta(x_1)} \psi_a(x_1) e^{-iq\theta(x_2)} \bar{\psi}_b(x_2) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(x) - J^\mu(x) \partial_\mu \theta(x)]} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iq\theta(x_1)} \psi_a(x_1) e^{-iq\theta(x_2)} \bar{\psi}_b(x_2) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + \partial_\mu J^\mu(x) \theta(x)]}
 \end{aligned}$$

🐫 其中 $\mathcal{N}$ 是归一化常数，最后一步对指数上积分的第二项作**分部积分**

🐫 以 $\theta(x)$ 为**小量**，对上式作 **Taylor 展开**，得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) e^{iS} &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) e^{iS} \\
 &\quad + \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} \left[i \int d^4x \partial_\mu J^\mu(x) \theta(x) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \right. \\
 &\quad \left. + iq\theta(x_1) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) - iq\theta(x_2) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \right] + \mathcal{O}(\theta^2)
 \end{aligned}$$

U(1) 整体对称性的 Schwinger-Dyson 方程

🦏 上式的 θ^1 阶给出

$$\begin{aligned} & \mathcal{N} \int d^4x \, i\theta(x) \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{iS} \partial_\mu J^\mu(x) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{iS} [-iq\theta(x_1) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) + iq\theta(x_2) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2)] \\ &= \mathcal{N} \int d^4x \, i\theta(x) [-q\delta^{(4)}(x - x_1) + q\delta^{(4)}(x - x_2)] \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{iS} \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \end{aligned}$$

🐕 由 $\theta(x)$ 的任意性推出

$$\begin{aligned} & \mathcal{N} \partial_\mu \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{iS} J^\mu(x) \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \\ &= [-q\delta^{(4)}(x - x_1) + q\delta^{(4)}(x - x_2)] \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{iS} \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \end{aligned}$$

🐷 改写成多点关联函数的形式，得到 U(1) 整体对称性的 Schwinger-Dyson 方程

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \langle 0 | T[J^{H,\mu}(x) \psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle \\ &= [-q\delta^{(4)}(x - x_1) + q\delta^{(4)}(x - x_2)] \langle 0 | T[\psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

守恒流方程

🐘 经典守恒流方程 $\partial_\mu J^{H,\mu}(x) = 0$ 在多点关联函数上给出

$$\langle 0 | T [\partial_\mu J^{H,\mu}(x) \psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle = 0$$

🐘 但这并不意味着 $\partial_\mu \langle 0 | T [J^{H,\mu}(x) \psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle = 0$ 成立，而是需要添加接触项

🐘 从正则量子化的角度看，时序乘积中包含了形如 $\theta(x^0 - x_i^0)$ 的阶跃函数，因而不能把 $\partial/\partial x^0$ 直接移动到时序乘积之外

🐘 不过，Schwinger-Dyson 方程仍然是对称性和守恒定律的体现

🐘 可以把它看作量子守恒流方程，即 Noether 定理的推广

推广到 $U(1)$ 规范理论

 在时序乘积中插入**更多旋量场算符**，可以将上述 **Schwinger-Dyson 方程**推广到**更多点的关联函数**上

 甚至插入 **$U(1)$ 规范场算符**，将讨论推广到 **$U(1)$ 规范理论**上，也会得到类似结果

推广到 U(1) 规范理论

🐡 在时序乘积中插入**更多旋量场算符**，可以将上述 **Schwinger-Dyson 方程**推广到**更多点的关联函数**上

☀️ 甚至插入 **U(1) 规范场算符**，将讨论推广到 **U(1) 规范理论**上，也会得到类似结果

🐟 **旋量 QED** 拉氏量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_f \bar{\psi}\psi - Q_f e A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

在**电磁 U(1) 整体变换** $\psi'(x) = e^{iQ_f\theta}\psi(x)$ 的作用下保持不变

🐟 相应的**电磁 U(1) 整体对称性**给出**守恒流方程** $\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x) = 0$

🐡 其中**电磁流**为 $J_{\text{EM}}^\mu(x) = Q_f e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

🐡 而 Q_f 是 $\psi(x)$ 及其相应费米子 f 的电荷

电磁 U(1) 整体对称性的 Schwinger-Dyson 方程

🐚 类似于上述做法，用 $\psi'(x) = e^{iQ_f \theta(x)} \psi(x)$ 和 $\bar{\psi}'(x) = e^{-iQ_f \theta(x)} \bar{\psi}(x)$ 对泛函积分进行变量替换，但不替换电磁场 $A^\mu(x)$

🦀 可以推出电磁 U(1) 整体对称性的 Schwinger-Dyson 方程

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \langle 0 | T [J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x) \psi_{a_1}^{\text{H}}(x_1) \cdots \psi_{a_n}^{\text{H}}(x_n) \bar{\psi}_{b_1}^{\text{H}}(y_1) \cdots \bar{\psi}_{b_m}^{\text{H}}(y_m) A^{\text{H},\mu_1}(z_1) \cdots A^{\text{H},\mu_p}(z_p)] | 0 \rangle \\ &= \left[- \sum_{i=1}^n Q_f e \delta^{(4)}(x - x_i) + \sum_{j=1}^m Q_f e \delta^{(4)}(x - y_j) \right] \\ & \times \langle 0 | T [\psi_{a_1}^{\text{H}}(x_1) \cdots \psi_{a_n}^{\text{H}}(x_n) \bar{\psi}_{b_1}^{\text{H}}(y_1) \cdots \bar{\psi}_{b_m}^{\text{H}}(y_m) A^{\text{H},\mu_1}(z_1) \cdots A^{\text{H},\mu_p}(z_p)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

🦀 注意，上式中电磁场算符的引入并没有导致相应接触项的出现

11.5.2 小节 Ward-Takahashi 恒等式

 在 8.6.1 小节中，我们利用经典守恒流方程 $\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x) = 0$ 来论证 Ward 恒等式，关键步骤在于

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | N[\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= - \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \frac{\partial e^{ip \cdot x_1}}{\partial x_1^\mu} \langle \cdots | N[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= -ip_\mu \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | N[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \propto p_\mu M^\mu(p) \end{aligned}$$

的第二步，它通过分部积分把 $\langle \cdots | N[\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$ 中的微分算符 $\partial/\partial x_1^\mu$ 转移到指数因子 $e^{ip \cdot x_1}$ 上

 但是， T 矩阵元中的 $\langle \cdots | N[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$ 源自 $\langle \cdots | T[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$ ，上述操作成立的前提条件是 $\langle \cdots | T[\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$ 等于 $\partial_\mu \langle \cdots | T[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$

 然而，上一小节的讨论告诉我们，这两者并不相等，而是相差 Schwinger-Dyson 方程中的接触项

 因此，8.6.1 小节对 Ward 恒等式的论证是有漏洞的

动量空间中的多点关联函数

 下面我们先从 **Schwinger-Dyson 方程** 推出 **Ward-Takahashi 恒等式**，然后用它严格地证明 **Ward 恒等式**

 $n = m = 1$ 且 $p = 0$ 时，**电磁 U(1) 整体对称性的 Schwinger-Dyson 方程**化为

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle 0 | T[J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x) \psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \\ = [-Q_f e \delta^{(4)}(x - x_1) + Q_f e \delta^{(4)}(x - y_1)] \langle 0 | T[\psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

 对上式中的**多点关联函数**作 **Fourier 变换**，得到**动量空间中的多点关联函数**

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ab}^\mu(p; q; k) &\equiv \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(-p \cdot x + q \cdot x_1 - k \cdot y_1)} \langle 0 | T[J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x) \psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \\ \tilde{G}_{0,ab}(q; k) &\equiv \int d^4x_1 d^4y_1 e^{i(q \cdot x_1 - k \cdot y_1)} \langle 0 | T[\psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

 如果考虑**多点关联函数**与**散射矩阵元**的关系，那么这里 p^μ 和 k^μ 对应于**入射粒子**的四维动量，而 q^μ 对应于**出射粒子**的四维动量

 不过， p^μ 、 q^μ 和 k^μ **不一定是在壳的**，也可以理解成相关**内线**上的动量

Fourier 变换



现在, 对上述 **Schwinger-Dyson 方程** 的左边作 Fourier 变换, 进行**分部积分**, 有

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(-p \cdot x + q \cdot x_1 - k \cdot y_1)} \partial_\mu \langle 0 | T[J_{\text{EM}}^{\text{H}, \mu}(x) \psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \\
 &= - \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 \frac{\partial e^{i(-p \cdot x + q \cdot x_1 - k \cdot y_1)}}{\partial x^\mu} \langle 0 | T[J_{\text{EM}}^{\text{H}, \mu}(x) \psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \\
 &= i p_\mu \tilde{G}_{ab}^\mu(p; q; k)
 \end{aligned}$$



对方程右边作 Fourier 变换, 得

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(-p \cdot x + q \cdot x_1 - k \cdot y_1)} [-Q_f e^{\delta^{(4)}(x - x_1)} + Q_f e^{\delta^{(4)}(x - y_1)}] \\
 & \quad \times \langle 0 | T[\psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \\
 &= Q_f e \int d^4x_1 d^4y_1 \{-e^{i[(q - p) \cdot x_1 - k \cdot y_1]} + e^{i[q \cdot x_1 - (k + p) \cdot y_1]}\} \langle 0 | T[\psi_a^{\text{H}}(x_1) \bar{\psi}_b^{\text{H}}(y_1)] | 0 \rangle \\
 &= -Q_f e \tilde{G}_{0,ab}(q - p; k) + Q_f e \tilde{G}_{0,ab}(q; k + p)
 \end{aligned}$$



从而推出 $i p_\mu \tilde{G}_{ab}^\mu(p; q; k) = -Q_f e \tilde{G}_{0,ab}(q - p; k) + Q_f e \tilde{G}_{0,ab}(q; k + p)$

Ward-Takahashi 恒等式

🧀 上式两边同时乘以 $-i$ ，省略旋量指标，得

$$p_\mu \tilde{G}^\mu(p; q; k) = iQ_f e \tilde{G}_0(q - p; k) - iQ_f e \tilde{G}_0(q; k + p)$$

🍕 这是 1957 年由 Yasushi Takahashi (1924–2013) 提出 **Ward-Takahashi 恒等式**

🍰 根据 10.5 节引入的**动量空间多点关联函数**的 **Feynman 图**，将上式表示成

$$p_\mu \left(\text{Feynman diagram with a loop and external lines } k, q, p \right) = iQ_f e \left(\text{Feynman diagram 1} - \text{Feynman diagram 2} \right)$$

🥥 如果在**微扰论**中借助 **LSZ 约化公式**来计算**散射矩阵元**，时序乘积中的**电磁流算符**

$J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x) = Q_f e \bar{\psi}^{\text{H}}(x) \gamma^\mu \psi^{\text{H}}(x)$ 来自相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -A_\mu(x) J_{\text{EM}}^\mu(x)$ ，而与它相关的**电磁场算符** $A_\mu^{\text{H}}(x)$ 被**移除了**

🚬 因此，在上式左边的 Feynman 图中，**光子线**只是一个**线头**，对应于被移除的

$A_\mu^{\text{H}}(x)$ **算符**，与这个线头相连的**两条费米子线**则对应于 $J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x)$ 中的**两个旋量场算符**

一般情况

进一步，对一般的 Schwinger-Dyson 方程

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \langle 0 | T [J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x) \psi_{a_1}^{\text{H}}(x_1) \cdots \psi_{a_n}^{\text{H}}(x_n) \bar{\psi}_{b_1}^{\text{H}}(y_1) \cdots \bar{\psi}_{b_m}^{\text{H}}(y_m) A^{\text{H},\mu_1}(z_1) \cdots A^{\text{H},\mu_p}(z_p)] | 0 \rangle \\ &= \left[- \sum_{i=1}^n Q_f e \delta^{(4)}(x - x_i) + \sum_{j=1}^m Q_f e \delta^{(4)}(x - y_j) \right] \\ &\quad \times \langle 0 | T [\psi_{a_1}^{\text{H}}(x_1) \cdots \psi_{a_n}^{\text{H}}(x_n) \bar{\psi}_{b_1}^{\text{H}}(y_1) \cdots \bar{\psi}_{b_m}^{\text{H}}(y_m) A^{\text{H},\mu_1}(z_1) \cdots A^{\text{H},\mu_p}(z_p)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

作 Fourier 变换，引入动量空间中的多点关联函数

$$\begin{aligned} & \tilde{G}^{\mu\mu_1 \cdots \mu_p}(p; q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) \\ & \equiv \int d^4x d^4x_1 \cdots d^4x_n d^4y_1 \cdots dy_m d^4z_1 \cdots dz_p e^{i(-p \cdot x + \sum_i q_i \cdot x_i - \sum_j k_j \cdot y_j + \sum_k l_k \cdot z_k)} \\ & \quad \times \langle 0 | T [J_{\text{EM}}^{\text{H},\mu}(x) \psi^{\text{H}}(x_1) \cdots \psi^{\text{H}}(x_n) \bar{\psi}^{\text{H}}(y_1) \cdots \bar{\psi}^{\text{H}}(y_m) A^{\text{H},\mu_1}(z_1) \cdots A^{\text{H},\mu_p}(z_p)] | 0 \rangle \\ & \tilde{G}_0^{\mu\mu_1 \cdots \mu_p}(q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) \\ & \equiv \int d^4x_1 \cdots d^4x_n d^4y_1 \cdots dy_m d^4z_1 \cdots dz_p e^{i(\sum_i q_i \cdot x_i - \sum_j k_j \cdot y_j + \sum_k l_k \cdot z_k)} \\ & \quad \times \langle 0 | T [\psi^{\text{H}}(x_1) \cdots \psi^{\text{H}}(x_n) \bar{\psi}^{\text{H}}(y_1) \cdots \bar{\psi}^{\text{H}}(y_m) A^{\text{H},\mu_1}(z_1) \cdots A^{\text{H},\mu_p}(z_p)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

一般的 Ward-Takahashi 恒等式

🍷 推出一般的 **Ward-Takahashi 恒等式**

$$\begin{aligned}
 & p_\mu \tilde{G}^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}(p; q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) \\
 &= iQ_f e \sum_{i=1}^n \tilde{G}_0^{\mu_1\cdots\mu_p}(q_1, \cdots, q_i - p, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) \\
 &\quad - iQ_f e \sum_{j=1}^m \tilde{G}_0^{\mu_1\cdots\mu_p}(q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_j + p, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)
 \end{aligned}$$

🍲 用 Feynman 图表示为

$$p_\mu \left(\text{Feynman diagram with incoming } p, \text{ outgoing } q_i, k_j, l_p \right) = iQ_f e \left(\sum_{i=1}^n \text{Feynman diagram with } q_i - p \right) - \sum_{j=1}^m \text{Feynman diagram with } k_j + p$$

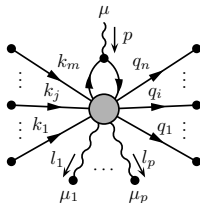
🍷 这个结果中涉及的四维动量都不需要满足质壳条件

散射矩阵元计算

📖 接下来论证 Ward 恒等式成立

🍎 借助 LSZ 约化公式将 Ward-Takahashi 恒等式应用于散射矩阵元的计算

🍌 那么, Feynman 图 对应于某个散射过程的一部分, 其中四维



动量为 p^μ 的光子线头既可用于连接一条外线, 又可用于连接一条内线

🔨 而剩下的费米子传播子和光子传播子通过 LSZ 约化公式转换为初末态粒子, 则四维动量 q_i^μ ($1 \leq i \leq n$)、 k_j^μ ($1 \leq j \leq m$) 和 l_k^μ ($1 \leq k \leq p$) 都是在壳的

🍎 10.3 节对 LSZ 约化公式的讨论告诉我们, 非平庸的散射矩阵元正比于动量空间多点关联函数在在壳动量极点上的多重留数

在壳和离壳



也就是说，对 **Ward-Takahashi 恒等式**

$$\begin{aligned}
 & p_\mu \tilde{G}^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}(p; q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) \\
 &= iQ_f e \sum_{i=1}^n \tilde{G}_0^{\mu_1\cdots\mu_p}(q_1, \cdots, q_i - p, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) \\
 &\quad - iQ_f e \sum_{j=1}^m \tilde{G}_0^{\mu_1\cdots\mu_p}(q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_j + p, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)
 \end{aligned}$$

中的**动量空间多点关联函数** $\tilde{G}^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}$ 乘上**因子**

$$\left[\prod_{i=1}^n (q_i^2 - m_f^2) \right] \left[\prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_f^2) \right] \left(\prod_{k=1}^p l_k^2 \right)$$

 所得结果会**正比于**散射矩阵元 iT_{fi} ，这里的 m_f 是费米子的质量

 当 q_i^μ 和 k_j^μ **在壳**时， $q_i^\mu - p^\mu$ 和 $k_j^\mu + p^\mu$ 必定是**离壳**的

 导致 $\tilde{G}_0^{\mu_1\cdots\mu_p}(q_1, \cdots, q_i - p, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)$ **不在** $q_i^2 = m^2$ 的**极点**上， $\tilde{G}_0^{\mu_1\cdots\mu_p}(q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_j + p, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)$ **不在** $k_j^2 = m^2$ 的**极点**上

Ward 恒等式

👉 因此，将 $\tilde{G}_0^{\mu_1 \cdots \mu_p}(q_1, \cdots, q_i - p, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)$ 和 $\tilde{G}_0^{\mu_1 \cdots \mu_p}(q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_j + p, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)$ 乘以因子

$$\left[\prod_{i=1}^n (q_i^2 - m_f^2) \right] \left[\prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_f^2) \right] \left(\prod_{k=1}^p l_k^2 \right)$$

之后，会得到零

👉 可见，Ward-Takahashi 恒等式右边对散射矩阵元没有贡献

👉 对应到不变振幅上，这样的结果就给出 Ward 恒等式

$$p_\mu M^\mu(p; q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) = 0$$

👉 M^μ 是在不变振幅 $\mathcal{M}$ 中移除 p^μ 对应的光子极化矢量或传播子之后剩下的部分

Ward 恒等式

🍪 因此，将 $\tilde{G}_0^{\mu_1 \cdots \mu_p}(q_1, \cdots, q_i - p, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)$ 和 $\tilde{G}_0^{\mu_1 \cdots \mu_p}(q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_j + p, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p)$ 乘以因子

$$\left[\prod_{i=1}^n (q_i^2 - m_f^2) \right] \left[\prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_f^2) \right] \left(\prod_{k=1}^p l_k^2 \right)$$

之后，会得到零

🍪 可见，Ward-Takahashi 恒等式右边对散射矩阵元没有贡献

🍲 对应到不变振幅上，这样的结果就给出 Ward 恒等式

$$p_\mu M^\mu(p; q_1, \cdots, q_n; k_1, \cdots, k_m; l_1, \cdots, l_p) = 0$$

🍲 M^μ 是在不变振幅 $\mathcal{M}$ 中移除 p^μ 对应的光子极化矢量或传播子之后剩下的部分

🍷 因为 Schwinger-Dyson 方程是非微扰的精确方程，所以 Ward-Takahashi 恒等式和 Ward 恒等式也是非微扰的精确恒等式

🍷 如果作微扰展开，那么它们在微扰论每一阶都精确成立