量 子 场 论

第 11 章　路径积分量子化

11.4 节　量子电动力学的路径积分量子化

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2026 年 4 月 30 日

11.4 节 量子电动力学的路径积分量子化

11.4.1 小节 电磁场的路径积分量子化

本节研究**量子电动力学路径积分量子化**，相关讨论可推广到**一般 $\mathrm{U}(1)$ 规范理论**

对于**自由**的**电磁场** $A^\mu(x)$，**拉氏量**由场强张量 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 表达为

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

多点关联函数的生成泛函定义为

$$Z_0[K] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A \, \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \, [\mathcal{L}_0(x) + K^\mu(x) A_\mu(x)] \right\}$$

外源 $K^\mu(x)$ 是一个实的 Lorentz 矢量场，**泛函测度**为 $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^0 \mathcal{D}A^1 \mathcal{D}A^2 \mathcal{D}A^3$

将拉氏量改写为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} A_\nu \partial^2 A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\nu (A_\mu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2} A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu
\end{aligned}$$

四维 Euclid 空间

- $\mathcal{L}_0$ 中两个全散度项对全时空积分没有贡献，因而

$$Z_0[K] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2}(A_\mu \partial^2 A^\mu - A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu) + K^\mu A_\mu \right] \right\}$$

- 作 Wick 转动，转到四维 Euclid 空间
- 电磁场 $A_\mathrm{E}^\mu = (\mathbf{A}_\mathrm{E}, A_\mathrm{E}^4)$ 和外源 $K_\mathrm{E}^\mu = (\mathbf{K}_\mathrm{E}, K_\mathrm{E}^4)$ 的分量定义为

$$\mathbf{A}_\mathrm{E} \equiv \mathbf{A}, \quad A_\mathrm{E}^4 \equiv \mathrm{i}A^0, \quad \mathbf{K}_\mathrm{E} \equiv \mathbf{K}, \quad K_\mathrm{E}^4 \equiv \mathrm{i}K^0$$

- 利用 $\partial_\mathrm{E}^i = \partial_{\mathrm{E},i} = \partial_i = -\partial^i$ $(i = 1, 2, 3)$ 和 $\partial_\mathrm{E}^4 = \partial_{\mathrm{E},4} = -\mathrm{i}\partial_0 = -\mathrm{i}\partial^0$，推出

$$\partial^2 = \partial_0^2 - \nabla^2 = -\partial_{\mathrm{E},4}^2 - \nabla_\mathrm{E}^2 = -\partial_\mathrm{E}^2$$

$$A_\mu \partial^2 A^\mu = A_{\mathrm{E},\mu} \partial_\mathrm{E}^2 A_\mathrm{E}^\mu, \quad A_\mu \partial^\mu = A_{\mathrm{E},\mu} \partial_\mathrm{E}^\mu, \quad \partial^\nu A_\nu = \partial_\mathrm{E}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}, \quad K^\mu A_\mu = -K_\mathrm{E}^\mu A_{\mathrm{E},\mu}$$

- 从而将 Euclid 空间中的自由生成泛函表达为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A \exp\left\{ \int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E} \left[\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E},\mu} \partial_\mathrm{E}^2 A_\mathrm{E}^\mu - A_{\mathrm{E},\mu} \partial_\mathrm{E}^\mu \partial_\mathrm{E}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}) - K_\mathrm{E}^\mu A_{\mathrm{E},\mu} \right] \right\}$$

改写积分

下面将上式中的**积分**改写为**内积**的形式，有

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4 x_\mathrm{E}\, (A_{\mathrm{E},\mu}\partial_\mathrm{E}^2 A_\mathrm{E}^\mu - A_{\mathrm{E},\mu}\partial_\mathrm{E}^\mu \partial_\mathrm{E}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}) \\
={}& \int \mathrm{d}^4 x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4 y_\mathrm{E}\, [A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^2 A_\mathrm{E}^\mu(y_\mathrm{E}) - A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu \partial_{y_\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})]\, \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}) \\
={}& \int \mathrm{d}^4 x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4 y_\mathrm{E}\, \{A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E},\nu}[\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu A_\mathrm{E}^\mu(y_\mathrm{E})\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})] \\
&\quad - A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})[\partial_{y_\mathrm{E},\nu}\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})]\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu A_\mathrm{E}^\mu(y_\mathrm{E}) - A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu[\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})] \\
&\quad + A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})[\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})]\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\} \\
={}& \int \mathrm{d}^4 x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4 y_\mathrm{E}\, \{-A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu[\partial_{y_\mathrm{E},\nu}\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})A_\mathrm{E}^\mu(y_\mathrm{E})] \\
&\quad + A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})[\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \partial_{y_\mathrm{E},\nu}\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})]A_\mathrm{E}^\mu(y_\mathrm{E}) + A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu[\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})] \\
&\quad - A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})[\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \partial_{y_\mathrm{E}}^\mu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})]A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\} \\
={}& -\int \mathrm{d}^4 x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4 y_\mathrm{E}\, A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) \left[-\left(\delta^{\mu\nu}\partial_{y_\mathrm{E}}^2 - \partial_{y_\mathrm{E}}^\mu \partial_{y_\mathrm{E}}^\nu\right)\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})\right] A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}) \\
={}& -\int \mathrm{d}^4 x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4 y_\mathrm{E}\, A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E}) A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})
\end{aligned}
$$

第二、三步用了分部积分，第三、四步丢弃对 $\mathrm{d}^4 y_\mathrm{E}$ 积分没有贡献的**全散度项**

连续方阵

上式中的连续方阵定义为

$$B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E}) \equiv -\left(\delta^{\mu\nu}\partial^2_{y_\mathrm{E}} - \partial^\mu_{y_\mathrm{E}}\partial^\nu_{y_\mathrm{E}}\right)\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})$$

它同时也是**四维 Euclid 矢量空间**上的**四阶方阵**，以 μ 和 ν 分别作为行列指标

$B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})$ 既是关于 x_E 和 y_E **对称**的，又是关于 μ 和 ν **对称**的

引入**内积**

$$(A_\mathrm{E},BA_\mathrm{E}) \equiv \int d^4x_\mathrm{E}\, d^4y_\mathrm{E}\, A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})\,A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})$$

$$(K_\mathrm{E},A_\mathrm{E}) \equiv \int d^4x_\mathrm{E}\, K^\mu_\mathrm{E}(x_\mathrm{E})A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$$

将**自由生成泛函**改写为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\, \exp\left[-\frac{1}{2}(A_\mathrm{E},BA_\mathrm{E}) + (-K_\mathrm{E},A_\mathrm{E})\right]$$

泛函 Gauss 积分公式

- 推广 11.2.3 小节中的公式

$$\int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi)\right] = (\det B)^{-1/2}$$

$$\int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) + (J, \phi)\right] = (\det B)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}\,(J, B^{-1}J)\right]$$

- 得到**泛函 Gauss 积分公式**

$$\int \mathcal{D}A \, \exp\left[-\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E}}, BA_{\mathrm{E}})\right] = (\det B)^{-1/2}$$

$$\int \mathcal{D}A \, \exp\left[-\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E}}, BA_{\mathrm{E}}) + (-K_{\mathrm{E}}, A_{\mathrm{E}})\right] = (\det B)^{-1/2} \, \exp\left[\frac{1}{2}(K_{\mathrm{E}}, B^{-1}K_{\mathrm{E}})\right]$$

- 原则上，利用上式可以作出自由生成泛函 $Z_{0,\mathrm{E}}[K]$ 中的泛函积分
- 但是，此处 B **矩阵**的**逆矩阵** B^{-1} 是**不存在**的，原因如下

连续方阵的不可逆性

- 将连续方阵化为

$$B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E}) = -\left(\delta^{\mu\nu}\partial^2_{y_\mathrm{E}} - \partial^\mu_{y_\mathrm{E}}\partial^\nu_{y_\mathrm{E}}\right)\delta^{(4)}(x_\mathrm{E} - y_\mathrm{E})$$
$$= -\left(\delta^{\mu\nu}\partial^2_{y_\mathrm{E}} - \partial^\mu_{y_\mathrm{E}}\partial^\nu_{y_\mathrm{E}}\right)\int \frac{\mathrm{d}^4 p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^4 p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\,(\delta^{\mu\nu}p^2_\mathrm{E} - p^\mu_\mathrm{E}p^\nu_\mathrm{E})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}$$

- 可见，$B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E})$ 的 **Fourier 变换**为 $\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E}) = \delta^{\mu\nu}p^2_\mathrm{E} - p^\mu_\mathrm{E}p^\nu_\mathrm{E}$
- 它是 Euclid 矢量空间上的四阶方阵
- 由**本征方程** $\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})\,p_{\mathrm{E},\nu} = (\delta^{\mu\nu}p^2_\mathrm{E} - p^\mu_\mathrm{E}p^\nu_\mathrm{E})\,p_{\mathrm{E},\nu} = p^2_\mathrm{E}p^\mu_\mathrm{E} - p^2_\mathrm{E}p^\mu_\mathrm{E} = 0 \cdot p^\mu_\mathrm{E}$ 可知，0 是**矩阵** $\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})$ 的一个**本征值**
- 因而 $\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})$ 是**奇异矩阵**，其**行列式为零**，是**不可逆**的
- 由于 $\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})$ 是不可逆矩阵，其 **Fourier 逆变换** $B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E})$ 也是**不可逆矩阵**

规范对称性

由于 $B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E})$ 不可逆，自由生成泛函 $Z_{0,\mathrm{E}}[K]$ 的泛函积分不能得到适当结果

导致这个问题的根源在于规范对称性

回顾 4.4.2 小节和 8.1 节，拉氏量 $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 具有规范对称性，即它在规范变换

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu\theta(x)$$

的作用下不会改变

转到四维 Euclid 空间，上式化为

$$-A'_{\mathrm{E},i}(x_\mathrm{E}) = -A_{\mathrm{E},i}(x_\mathrm{E}) - \frac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},i}\theta(x_\mathrm{E}), \quad -\mathrm{i}A'_{\mathrm{E},4}(x_\mathrm{E}) = -\mathrm{i}A_{\mathrm{E},4}(x_\mathrm{E}) - \frac{\mathrm{i}}{e}\,\partial_{\mathrm{E},4}\theta(x_\mathrm{E})$$

即

$$A'_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) = A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) + \frac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E})$$

Fourier 变换

- 对 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 作 **Fourier 变换**，得

$$\tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_\mathrm{E}) \equiv \int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}} A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$$

- 从而，$A'_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 的 **Fourier 变换**是

$$\begin{aligned}\tilde{A}'_{\mathrm{E},\mu}(p_\mathrm{E}) &\equiv \int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}} A'_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) = \int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}} \left[A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) + \frac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E})\right] \\ &= \tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_\mathrm{E}) + \frac{1}{e}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\{\partial_{\mathrm{E},\mu}[\mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}}\theta(x_\mathrm{E})] - (\partial_{\mathrm{E},\mu}\mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}})\theta(x_\mathrm{E})\} \\ &= \tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_\mathrm{E}) - \frac{ip_{\mathrm{E},\mu}}{e}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}}\theta(x_\mathrm{E}) = \tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_\mathrm{E}) - \frac{\mathrm{i}}{e}\,p_{\mathrm{E},\mu}\tilde{\theta}(p_\mathrm{E})\end{aligned}$$

- 其中第四步**丢弃**一个对积分没有贡献的**全散度项**

- 而 $\tilde{\theta}(p_\mathrm{E}) \equiv \int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{ip_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}}\theta(x_\mathrm{E})$ 是 $\theta(x_\mathrm{E})$ 的 **Fourier 变换**

作用量

将**自由生成泛函**改写成

$$Z_{0,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A \, \exp\left[-S_\mathrm{E} + (-K_\mathrm{E}, A_\mathrm{E})\right]$$

其中 S_E 是 Euclid 空间中的**作用量**，表达为

$$\begin{aligned} S_\mathrm{E} &= \frac{1}{2}(A_\mathrm{E}, BA_\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\, A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E}) A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4} A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) \left(\delta^{\mu\nu}p_\mathrm{E}^2 - p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\nu\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})} A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4} \tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(-p_\mathrm{E}) \tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E}) \tilde{A}_{\mathrm{E},\nu}(p_\mathrm{E}) \end{aligned}$$

第四步对 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 和 $A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})$ 作 **Fourier 变换**

纯规范构型

- 对于**任意标量函数** $\theta(x_\mathrm{E})$，可通过**规范变换**从 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})=0$ 得到矢量场构型

$$A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})=\frac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E})$$

- 这种场构型称为**纯规范** (pure gauge) **构型**
- 纯规范构型与 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})=0$ 是**规范等价**的
- 纯规范构型的 **Fourier 变换**是 $\tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_\mathrm{E})=-\frac{\mathrm{i}}{e}\,p_{\mathrm{E},\mu}\tilde{\theta}(p_\mathrm{E})$
- 将上式代入作用量，利用**本征方程** $\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})\,p_{\mathrm{E},\nu}=0\cdot p_\mathrm{E}^\mu$，推出

$$S_\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathrm{i}}{e}\,p_{\mathrm{E},\mu}\tilde{\theta}(-p_\mathrm{E})\,\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})\left[-\frac{\mathrm{i}}{e}\,p_{\mathrm{E},\nu}\tilde{\theta}(p_\mathrm{E})\right]=0$$

- 可见，任何**纯规范构型**对作用量 S_E 的贡献都是**零**，从而对**自由生成泛函**中的 $\exp(-S_\mathrm{E})$ **因子**贡献为 1
- 这意味着，在计算自由生成泛函时，对**所有纯规范构型**的**泛函积分**具有**严重的发散行为**，因为 $\exp(-S_\mathrm{E})$ 因子**不再**能够提供通常的 **Gauss 指数压低**

📁 由规范变换 $A'_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}) = A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}) + \dfrac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_{\mathrm{E}})$ 可知，**纯规范构型** $\dfrac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_{\mathrm{E}})$ 正是 $A'_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})$ 与 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})$ 之差，因而是**规范等价性**的体现

✉️ **标量函数** $\theta(x_{\mathrm{E}})$ 的无穷多种取法意味着在物理上**规范等价**的场构型有**无穷多种**

📮 泛函积分对所有的电磁场构型进行积分，从而包含了**无穷多种规范等价**的场构型的贡献，这导致自由生成泛函**不具有良好的定义**

Faddeev-Popov 方法

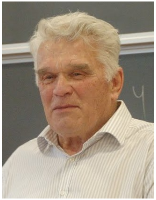
由规范变换 $A'_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) = A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E}) + \frac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E})$ 可知，**纯规范构型** $\frac{1}{e}\,\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E})$ 正是 $A'_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 与 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 之差，因而是**规范等价性**的体现

标量函数 $\theta(x_\mathrm{E})$ 的无穷多种取法意味着在物理上**规范等价**的场构型有**无穷多种**

泛函积分对所有的电磁场构型进行积分，从而包含了**无穷多种规范等价**的场构型的贡献，这导致自由生成泛函**不具有良好的定义**

为了解决这个问题，我们需要在泛函积分中**避免**对规范等价的场构型进行重复计算，即采用某种**规范条件**来约束场构型

接下来介绍将规范条件融入到泛函积分计算中的方法，即 **Faddeev-Popov 方法**



Ludvig Faddeev (1934–2017)

Victor Popov (1937–1994)

规范固定函数和泛函 δ 函数

- 设**规范固定函数** $G(A)$ 是**电磁场** $A^\mu(x)$ 的函数，$G(A)=0$ 给出一个**规范条件**
- 比如，$G(A)=\partial_\mu A^\mu$ 就对应于 **Lorenz 规范条件** $\partial_\mu A^\mu=0$
- 为了在泛函积分中引入规范条件 $G(A)=0$，需要用到泛函 δ 函数
- 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是时空坐标 x^μ 的函数，**泛函 δ 函数** $\delta_\mathrm{F}[f(x)]$ 是所有时空点 x 处的 δ 函数 $\delta[f(x)]$ 的乘积，满足 $\delta_\mathrm{F}[f(x)]=\delta_\mathrm{F}[-f(x)]$ 和

$$\boxed{\int \mathcal{D}f\,\delta_\mathrm{F}[f(x)]=1}$$

- 对于 $f(x)$ 的泛函 $F[f(x)]$，有

$$\boxed{\int \mathcal{D}f\,F[f(x)]\,\delta_\mathrm{F}[f(x)-g(x)]=F[g(x)]}$$

- 以上两式是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\delta(x)=1$ 和 $f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\delta(x-y)$ 的推广

泛函行列式

于是，

$$\int \mathcal{D}G\, \delta_{\mathrm{F}}[G(A)] = 1$$

设 $A_\mu^\theta(x)$ 是由场构型 $A_\mu(x)$ 经过**规范变换**

$$A_\mu^\theta(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu\theta(x)$$

得到的场构型

将 $G(A^\theta)$ 看作**规范变换参数** $\theta(x)$ 的**泛函**，推出

$$\int \mathcal{D}\theta\ \det\left[\frac{\delta G(A^\theta)}{\delta\theta}\right] \delta_{\mathrm{F}}[G(A^\theta)] = 1$$

其中 $\det\{\delta G[A^\theta(x)]/\delta\theta(y)\}$ 是以时空坐标 x 和 y 作为行列指标的**泛函行列式**

它考虑了**对 $\mathcal{D}G$ 作泛函积分**与**对 $\mathcal{D}\theta$ 作泛函积分**之间的差异

从离散到连续

可以按以下方式理解上一页的表达式

设 N **维列矢量** $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^{\mathrm{T}}$ 是 N **维列矢量** $u = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}$ 的**函数**，记作 $v(u)$，则 N **维** δ **函数** $\delta^{(N)}(v)$ 满足

$$1 = \int \mathrm{d}^N v \, \delta^{(N)}(v) = \int \mathrm{d}^N u \, \det\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right) \delta^{(N)}[v(u)]$$

第二步作变量替换 $v \to u$，将对 v 的 N 重积分改写成对 u 的 N 重积分

而 $\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right)$ 是相应的 **Jacobi 行列式**

向**连续极限**推广，就得到

$$\int \mathcal{D}\theta \, \det\left[\frac{\delta G(A^\theta)}{\delta\theta}\right] \delta_{\mathrm{F}}[G(A^\theta)] = 1$$

$Z_0[0]$

取**外源** $K^\mu = 0$，将**自由生成泛函**表达为

$$Z_0[0] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}$$

其中**作用量泛函**是

$$S[A] = \int d^4x\, \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\int d^4x\, (A_\mu \partial^2 A^\mu - A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu)$$

插入 $1 = \int \mathcal{D}\theta\, \det\left[\frac{\delta G(A^\theta)}{\delta\theta}\right] \delta_F[G(A^\theta)]$，得

$$Z_0[0] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]} \int \mathcal{D}\theta\, \det\left[\frac{\delta G(A^\theta)}{\delta\theta}\right] \delta_F[G(A^\theta)]$$

规范固定函数对应的泛函行列式

现在，考虑**规范固定函数**

$$G[A(x)] = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$$

其中 $\omega(x)$ 是任意的**标量函数**

它给出的**规范条件**是 $\partial^\mu A_\mu = \omega$，这是 Lorenz 规范条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 的推广

由 $A_\mu^\theta(x) = A_\mu(x) - e^{-1}\,\partial_\mu\theta(x)$ 得

$$G(A^\theta) = \partial^\mu A_\mu^\theta - \omega = \partial^\mu A_\mu - \frac{1}{e}\,\partial^2\theta - \omega$$

再根据**泛函导数**的**定义**推出

$$\frac{\delta G[A^\theta(x)]}{\delta\theta(y)} = -\frac{1}{e}\,\partial_x^2\,\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = -\frac{1}{e}\,\partial_x^2\delta^{(4)}(x-y)$$

因此**泛函行列式** $D \equiv \det\left\{\frac{\delta G[A^\theta(x)]}{\delta\theta(y)}\right\} = \det\left[-\frac{1}{e}\,\partial_x^2\delta^{(4)}(x-y)\right]$ 是与 $A^\mu(x)$、$\theta(x)$ 和 $\omega(x)$ 均**无关**的**无穷大常数**

排除规范等价的场构型

由此将 $Z_0[0]$ 化为

$$Z_0[0] = \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta_F[G(A^\theta)] = \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A^\theta\, e^{iS[A^\theta]}\, \delta_F[G(A^\theta)]$$

$$= \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta_F[G(A)] = \mathcal{N}_0 D \left(\int \mathcal{D}\theta\right) \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta_F(\partial^\mu A_\mu - \omega)$$

- 第二步作变量替换 $A_\mu \to A_\mu^\theta$，由 $A_\mu^\theta(x) = A_\mu(x) - e^{-1}\,\partial_\mu\theta(x)$ 得 $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\theta$，而**规范对称性**意味着 $S[A] = S[A^\theta]$
- 现在第二步中的被积泛函是 A_μ^θ 的泛函，可以将**泛函积分变量** A_μ^θ 改写成 A_μ，得到第三步的结果
- 第四步用到 $G[A(x)] = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$
- 由于被积泛函与 $\theta(x)$ 无关，**泛函积分** $\int \mathcal{D}\theta$ 给出一个**无穷大常数**，它包含**所有规范变换参数** $\theta(x)$ 对路径积分的**贡献**
- 对 $\mathcal{D}A$ 的积分受到**规范条件** $\partial^\mu A_\mu = \omega$ 的**约束**，**排除**了**规范等价**的**场构型**的**贡献**

$Z_{0,\xi}[0]$

- 上述 $Z_0[0]$ 表达式对**任意** $\omega(x)$ 都是成立的
- 为了进一步得到便于使用的生成泛函，我们以 $\exp\left[-\mathrm{i}\int d^4x\,\frac{\omega^2(x)}{2\xi}\right]$ 为**权重**对 $\omega(x)$ 进行泛函积分，其中 ξ 为**实常数**
- 这个权重函数是 Euclid 空间中**以 $\omega(x)=0$ 为中心**、**ξ 为宽度参数**的 **Gauss 权重函数** $\exp[-\int d^4x_E\,\omega^2(x_E)/(2\xi)]$ 在 Minkowski 时空中的**解析延拓**
- 也就是说，引入**以 ξ 为参数**的**生成泛函**

$$\begin{aligned}
Z_{0,\xi}[0] &\equiv \mathcal{N}_\xi \int \mathcal{D}\omega\,\exp\left(-\mathrm{i}\int d^4x\,\frac{\omega^2}{2\xi}\right) Z_0[0] \\
&= \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D\left(\int \mathcal{D}\theta\right)\int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}A\,e^{\mathrm{i}S[A]}\exp\left(-\mathrm{i}\int d^4x\,\frac{\omega^2}{2\xi}\right)\delta_F(\partial^\mu A_\mu-\omega) \\
&= \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D\left(\int \mathcal{D}\theta\right)\int \mathcal{D}A\,\exp\left(\mathrm{i}\int d^4x\,\mathcal{L}_0\right)\exp\left[-\mathrm{i}\int d^4x\,\frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}\right]
\end{aligned}$$

- 其中 $\mathcal{N}_\xi$ 是一个归一化常数
- 第三步利用 $\int \mathcal{D}f\,F[f(x)]\,\delta_F[g(x)-f(x)] = F[g(x)]$ 对 $\mathcal{D}\omega$ 进行积分

适当的自由生成泛函

将生成泛函 $Z_{0,\xi}[0]$ 改写为

$$\begin{aligned} Z_{0,\xi}[0] &= \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D \left(\int \mathcal{D}\theta\right) \int \mathcal{D}A \, \exp\left(\mathrm{i}\int d^4x\, \mathcal{L}_0\right) \exp\left[-\mathrm{i}\int d^4x\, \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}\right] \\ &= \mathcal{N}_{0,\xi} \int \mathcal{D}A \, \exp\left(\mathrm{i}\int d^4x\, \mathcal{L}_1\right) \end{aligned}$$

第二步中的**常数**定义为 $\mathcal{N}_{0,\xi} \equiv \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta$，而

$$\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

是**等效**的**拉氏量**，可见，这里的处理方法等价于 4.4.2 小节中的**规范固定方法**

上式中的第二项是依赖于**规范固定参数** ξ 的**规范固定项**

添上外源 K^μ，将**适当**的**自由生成泛函**定义为

$$\boxed{Z_{0,\xi}[K] \equiv \mathcal{N}_{0,\xi} \int \mathcal{D}A \, \exp\left\{\mathrm{i}\int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + K^\mu A_\mu\right]\right\}}$$

四维 Euclid 空间

转到四维 Euclid 空间，自由生成泛函为

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_{0,\xi}\int \mathcal{D}A\,\exp\left(\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\left\{\frac{1}{2}\left[A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^2 A_{\mathrm{E}}^{\mu} - A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{\mathrm{E}}^{\nu}A_{\mathrm{E},\nu} - \frac{1}{\xi}(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}A_{\mathrm{E},\mu})^2\right] - K_{\mathrm{E}}^{\mu}A_{\mu}^{\mathrm{E}}\right\}\right)$$

作分部积分，推出

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}A_{\mathrm{E},\mu})^2 &= -\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\\
&= -\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\{\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}[A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]\\
&\qquad - \partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\}\\
&= -\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\{-\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}[A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})]\\
&\qquad + A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})[\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\}\\
&= -\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\left[\frac{1}{\xi}\,\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\right]A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\\
&= -\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\left[-\frac{1}{\xi}\,\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\right]A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})
\end{aligned}$$

连续方阵

结合前文推出的

$$\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,(A_{\mathrm{E},\mu}\partial_\mathrm{E}^2 A_\mathrm{E}^\mu - A_{\mathrm{E},\mu}\partial_\mathrm{E}^\mu\partial_\mathrm{E}^\nu A_{\mathrm{E},\nu})$$

$$= -\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\left[-\left(\delta^{\mu\nu}\partial_{y_\mathrm{E}}^2 - \partial_{y_\mathrm{E}}^\mu\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu\right)\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})\right]A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})$$

得到

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_{0,\xi}\int \mathcal{D}A\,\exp\left[-\frac{1}{2}(A_\mathrm{E}, B_\xi A_\mathrm{E}) + (-K_\mathrm{E}, A_\mathrm{E})\right]$$

其中连续方阵定义为

$$B_\xi^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E}) \equiv -\left[\delta^{\mu\nu}\partial_{y_\mathrm{E}}^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu\right]\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})$$

Fourier 变换

将**连续方阵**改写为

$$B_\xi^{\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E}) = -\left[\delta^{\mu\nu}\partial_{y_\mathrm{E}}^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu\right]\int\frac{\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}$$
$$= \int\frac{\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\left[\delta^{\mu\nu}p_\mathrm{E}^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\nu\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}$$

可见，$B_\xi^{\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})$ 的 **Fourier 变换**是 $\tilde{B}_\xi^{\mu\nu}(p_\mathrm{E}) = \delta^{\mu\nu}p_\mathrm{E}^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\nu$

它的**逆矩阵**为 $\tilde{B}_\xi^{-1,\mu\nu}(p_\mathrm{E}) = \frac{1}{p_\mathrm{E}^2}\left[\delta^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\nu}{p_\mathrm{E}^2}\right]$

这可以通过下式检验：

$$\tilde{B}_\xi^{-1,\mu\rho}(p_\mathrm{E})\tilde{B}_{\xi,\rho\nu}(p_\mathrm{E}) = \left[\delta^{\mu\rho} - (1-\xi)\frac{p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\rho}{p_\mathrm{E}^2}\right]\left[\delta_{\rho\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{p_{\mathrm{E},\rho}p_{\mathrm{E},\nu}}{p_\mathrm{E}^2}\right]$$
$$= \delta^\mu{}_\nu + \frac{-\xi+1}{\xi}\frac{p_\mathrm{E}^\mu p_{\mathrm{E},\nu}}{p_\mathrm{E}^2} + \frac{-\xi+\xi^2}{\xi}\frac{p_\mathrm{E}^\mu p_{\mathrm{E},\nu}}{p_\mathrm{E}^2} - \frac{(1-\xi)^2}{\xi}\frac{p_\mathrm{E}^\mu p_{\mathrm{E},\nu}}{p_\mathrm{E}^2} = \delta^\mu{}_\nu$$

Euclid 空间中电磁场的 Feynman 传播子

$\tilde{B}_\xi^{-1,\mu\nu}(p_\mathrm{E})$ 的 **Fourier 逆变换** $B_\xi^{-1,\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})$ 是 $B_\xi^{\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})$ 的**逆矩阵**，也是 **Euclid 空间**中**电磁场的 Feynman 传播子** $\Delta_{\mathrm{F,E}}^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})$，即

$$\Delta_{\mathrm{F,E}}^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}) \equiv B_\xi^{-1,\mu\nu}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E}) = \int \frac{d^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\,\tilde{B}_\xi^{-1,\mu\nu}(p_\mathrm{E})\,e^{-ip_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}$$
$$= \int \frac{d^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{p_\mathrm{E}^2}\left[\delta^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\nu}{p_\mathrm{E}^2}\right]e^{-ip_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}$$

利用泛函 Gauss 积分公式，作出**自由生成泛函**中的泛函积分，得到

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K] = -\mathcal{N}_{0,\xi}\int\mathcal{D}A\,\exp\left[-\frac{1}{2}(A_\mathrm{E},B_\xi A_\mathrm{E})+(-K_\mathrm{E},A_\mathrm{E})\right]$$
$$= \mathcal{N}_{0,\xi}(\det B_\xi)^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}(K_\mathrm{E},B_\xi^{-1}K_\mathrm{E})\right]$$

归一化条件 $Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[0]=1$ 给出 $\mathcal{N}_{0,\xi}=(\det B_\xi)^{1/2}$，故

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K] = \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x_\mathrm{E}\,d^4y_\mathrm{E}\,K_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\Delta_{\mathrm{F,E}}^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})K_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\right]$$

Minkowski 时空中电磁场的 Feynman 传播子

- 转换到 **Minkowski 时空**中，**电磁场的 Feynman 传播子**表达为

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\left[g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}$$

- 它是**偶函数**，且关于 μ 和 ν 是**对称**的：$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(y-x)=\Delta_{\mathrm{F}}^{\nu\mu}(x-y)$
- **规范固定参数** ξ 的不同取值对应于**不同**的**规范**
- 对于 **Feynman 规范**，$\xi=1$，有

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}$$

- 另一种常用的规范是 **Landau 规范**，它对应于 $\xi\to0$，Feynman 传播子为

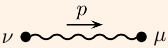
$$\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\left(g^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}$$

电磁场的生成泛函和内线规则

借助解析延拓，将 Euclid 空间中的自由生成泛函转换到 Minkowski 时空中，得到

$$\boxed{Z_{0,\xi}[K] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,K_\mu(x)\Delta_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x-y)K_\nu(y)\right]}$$

Feynman 传播子 $\Delta_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x-y)$ 的 Fourier 变换给出动量空间中光子内线的 Feynman 规则：



$$= \frac{-\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\left[g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]$$

规范固定参数 ξ 的取值体现在上式方括号中的 $\xi p^\mu p^\nu/p^2$ 项上

根据 8.6.1 小节的讨论，Ward 恒等式表明，在不变振幅计算中将光子内线的贡献换成相应的四维动量 p^μ 或 p^ν，给出的结果为零

从而，$\xi p^\mu p^\nu/p^2$ 项在不变振幅计算中的贡献为零

于是，相关的不变振幅是规范不变量，不会受到 ξ 取值的影响

11.4.2 小节　旋量 QED

第 8 章讨论了描述**带电费米子**如何参与**电磁相互作用**的**量子电动力学**

本小节介绍在**路径积分量子化**中对它的处理方法

为简单起见，除**电磁场** $A^\mu(x)$ 之外，只引进一种**带电费米子** f，它对应于一个 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$，相应的**旋量 QED 拉氏量**为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - Q_f e A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

其中**拉氏量**的**自由部分** $\mathcal{L}_0$ 已包含**规范固定项**，表达为

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_f\bar{\psi}\psi$$

多点关联函数的生成泛函

由于外源 $K^\mu(x)$ 的各个分量**相互独立**，有

$$\frac{\delta}{\delta K^\mu(x)} K^\nu(y) = \delta^\nu{}_\mu \delta^{(4)}(x-y)$$

多点关联函数的生成泛函表达为

$$\begin{aligned} Z[K,\bar\eta,\eta] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_x (\mathcal{L} + K^\mu A_\mu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta)\right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left(-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu_{ab}\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_{a,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_{b,x}}\right) \\ &\quad\times \exp\left[\mathrm{i}\int_x (\mathcal{L}_0 + K^\nu A_\nu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta)\right] \\ &= \tilde{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu_{ab}\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_{a,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_{b,x}}\right)^n Z_0[K,\bar\eta,\eta] \end{aligned}$$

其中下标 a 和 b 是旋量指标，$\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$，$K^\mu_x \equiv K^\mu(x)$

自由生成泛函和外源 Feynman 规则

上式中的**自由生成泛函**表达成

$$
\begin{aligned}
Z_0[K,\bar{\eta},\eta] &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_x (\mathcal{L}_0 + K^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right] \\
&= \exp\left[-\int_{x,y}\left(\frac{1}{2}K_{\mu,x}\Delta^{\mu\nu}_{xy}K_{\nu,x} + \bar{\eta}_x S_{xy}\eta_y\right)\right]
\end{aligned}
$$

$= \exp\Big(K$  $K \;+\; \eta$  $\bar{\eta}\Big)$

其中 $\Delta^{\mu\nu}_{xy} \equiv \Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{F}}(x-y)$，第三步改用 **Feynman 图**表示

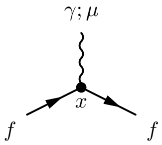
电磁场外源 K^μ 的 Feynman 规则为

$K;\mu$  $= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, K^\mu(x)$

Feynman 图泛函求导法则

电磁场的**传播子**和 **QED 顶点**的位置空间 Feynman 规则为

$$= \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$$



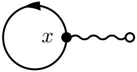
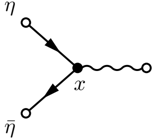
$$= -\mathrm{i}Q_f e \int \mathrm{d}^4 x\, \gamma^\mu$$

与**外源** K^μ 相关的 **Feynman 图泛函求导法则**是

> 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个**外源** K^μ 换成时空点 x，而 μ 是 x 点处电磁场的 **Lorentz 指标**

连通关联函数的生成泛函

在微扰论中，将生成泛函展开到 e^1 阶，得

$Z[K,\bar\eta,\eta] = \Big[\, 1 +$  $K +$  $K + \mathcal{O}(e^2) \Big]$

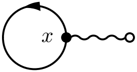
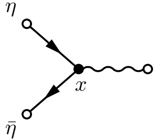
$\times \exp\Big(K$  $K + \eta$  $\bar\eta \Big)$

这里的 Feynman 图结构类似于 11.3.3 小节中 Yukawa 理论在 κ^1 阶的结构

$Z[K,\bar\eta,\eta]$ 中 e^2 阶的 Feynman 图结构则类似于 Yukawa 理论在 κ^2 阶的结构，此处不再详细讨论

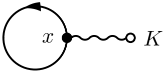
相应地，连通关联函数的生成泛函表达为

$\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta] = \ln Z[K,\bar\eta,\eta]$

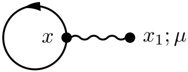
$= K$  $K + \eta$  $\bar\eta +$  $K +$  $K + \mathcal{O}(e^2)$

电磁场的单点函和两点连通关联函数

从而，**电磁场**的**单点函数**为

$$\langle 0|\, A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)\,|0\rangle = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}(\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta])\Big|_{K=\bar\eta=\eta=0} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\left(\right.$$


$$\left.\right) + \mathcal{O}(e^2)$$

$$=$$


$$+\,\mathcal{O}(e^2)$$

其中 $K_i^\mu \equiv K^\mu(x_i)$

电磁场的**两点连通关联函数**是

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)A^{\mathrm{H},\nu}(x_2)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_2^\nu}(\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta])\Big|_{K=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_2^\nu}\left(\right.$$


$$\left.\right) + \mathcal{O}(e^2) =$$


$$+\,\mathcal{O}(e^2)$$

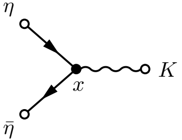
三点连通关联函数

关于 $A^\mu(x_1)$、$\psi(x_2)$ 和 $\bar\psi(x_3)$ 的**三点连通关联函数**为

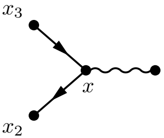
$$\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)\psi^{\mathrm{H}}(x_2)\bar\psi^{\mathrm{H}}(x_3)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}(\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta])\Big|_{K=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\left(\quad\right) + \mathcal{O}(e^2)$$



$$= \qquad + \mathcal{O}(e^2)$$



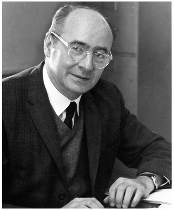
Furry 定理

尽管前面给出了电磁场单点函数 $\langle 0|\, A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)\,|0\rangle$，但具体计算得到的结果为零，这实际上是 Furry 定理的特例

Furry 定理说，QED 中奇数个电磁场的关联函数为零，即

$$\boxed{\langle 0|\, \mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle = 0}$$

对奇数 n 成立



Wendell H. Furry
(1907–1984)

这是 QED 的电荷共轭对称性引起的，证明如下

电磁场算符的 C 变换为 $C^{-1}A^{\mathrm{H},\mu}(x)C = -A^{\mathrm{H},\mu}(x)$，利用 $C\,|0\rangle = |0\rangle$，推出

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle \\
=\ &\langle 0|\, \mathsf{T}[C^{-1}A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)CC^{-1}A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)C\cdots C^{-1}A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)C]\,|0\rangle \\
=\ &(-1)^n\,\langle 0|\, \mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle \\
=\ &-\langle 0|\, \mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle
\end{aligned}$$

最后一步用到奇数 n 导致的 $(-1)^n = -1$。于是，n 为奇数时得到要证明的公式

11.4.3 小节 标量 QED

如果一个复标量场 $\phi(x)$ 携带电荷 Q_ϕ，那么它描述的正标量玻色子 ϕ 和反标量玻色子 $\bar{\phi}$ 分别携带电荷 Q_ϕ 和 $-Q_\phi$

它们参与电磁相互作用，相应的相互作用理论称为标量 QED

标量 QED 的拉氏量为

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi}$$

其中协变导数是 $D_\mu \phi = (\partial_\mu + \mathrm{i} Q_\phi e A_\mu)\phi$，相应地，$(D_\mu \phi)^\dagger = (\partial_\mu - \mathrm{i} Q_\phi e A_\mu)\phi^\dagger$

对电磁场 $A_\mu(x)$ 和复标量场 $\phi(x)$ 作 $\mathrm{U}(1)$ 规范变换

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \theta, \quad \phi'(x) = e^{\mathrm{i} Q_\phi \theta(x)} \phi(x)$$

则 $[D_\mu \phi(x)]' = e^{\mathrm{i} Q_\phi \theta(x)} D_\mu \phi(x)$，即 $D_\mu \phi(x)$ 的 $\mathrm{U}(1)$ 规范变换形式与 $\phi(x)$ 相同

这使得拉氏量 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{U}(1)$ 规范变换下保持不变

因此，标量 QED 具有 $\mathrm{U}(1)$ 规范对称性，是一种 $\mathrm{U}(1)$ 规范理论

规范相互作用项

将拉氏量中复标量场的**协变动能项**展开，得

$$\begin{aligned}(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi &= (\partial^\mu - \mathrm{i}Q_\phi eA^\mu)\phi^\dagger(\partial_\mu + \mathrm{i}Q_\phi eA_\mu)\phi \\ &= (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - \mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi + \mathrm{i}Q_\phi eA^\mu(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi + Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi \\ &= (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - \mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi + Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi\end{aligned}$$

上式第一项是 $\phi(x)$ 的**动能项**，另外两项是**规范相互作用项**

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = -\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi + Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi}$$

$\mathcal{L}_{\text{int}}$ 描述复标量玻色子 ϕ 的**电磁相互作用**

注意，两个相互作用项在**微扰论**中的**阶不同**，上式第一项是 e^1 **阶**用三个场表达的**三线性相互作用项**，而第二项是 e^2 **阶**用四个场表达的**四线性相互作用项**

电磁流

- 拉氏量 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{U}(1)$ 整体变换 $\phi'(x) = e^{iQ_\phi\theta}\phi(x)$ 的作用下不变，它具有 $\mathrm{U}(1)$ 整体对称性，相应的无穷小 $\mathrm{U}(1)$ 整体变换是 $\bar{\delta}\phi = \delta\phi = iQ_\phi\theta\phi$ 和 $\bar{\delta}\phi^\dagger = \delta\phi^\dagger = -iQ_\phi\theta\phi^\dagger$
- Noether 流表达为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\bar{\delta}\phi + \bar{\delta}\phi^\dagger\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} = (D^\mu\phi)^\dagger iQ_\phi\theta\phi - iQ_\phi\theta\phi^\dagger D^\mu\phi \\ &= -iQ_\phi\theta[-(D^\mu\phi)^\dagger\phi + \phi^\dagger D^\mu\phi] \end{aligned}$$

- 将电磁流定义为

$$\begin{aligned} J^\mu_{\mathrm{EM}} &\equiv -\frac{e}{\theta}\,j^\mu = iQ_\phi e[\phi^\dagger(\partial_\mu + iQ_\phi eA_\mu)\phi - (\partial_\mu - iQ_\phi eA_\mu)\phi^\dagger\phi] \\ &= iQ_\phi e(\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi + 2iQ_\phi eA_\mu\phi^\dagger\phi) \end{aligned}$$

- Noether 定理意味着电磁流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}} = 0$
- 此处标量 QED 的电磁流 J^μ_{EM} 同时依赖于复标量场 $\phi(x)$ 和电磁场 $A^\mu(x)$
- 这与旋量 QED 不同，旋量场的电磁流 $J^\mu_{\mathrm{EM}} = Q_f e\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_f$ 并不依赖于电磁场

电磁场的运动方程

- 为了得到**电磁场**的运动方程，对**拉氏量** $\mathcal{L}$ 求导，得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial A_\nu} = -\mathrm{i}Q_\phi e\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\nu}\phi + 2Q_\phi^2 e^2 A^\nu \phi^\dagger\phi = -J^\nu_{\text{EM}}$$

- **Euler-Lagrange 方程**给出

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu_{\text{EM}}$$

- 故**电磁场**的**经典运动方程**为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu_{\text{EM}}$$

- 这是以**电磁流** J^ν_{EM} 为**源**的 **Maxwell 方程**

复标量场的运动方程

为了得到复标量场的运动方程，对拉氏量 $\mathcal{L}$ 求导，得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} = D^\mu\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} = -\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\partial_\mu\phi + Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu\phi - m^2\phi = -\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu D_\mu\phi - m^2\phi$$

Euler-Lagrange 方程给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} = \partial_\mu D^\mu\phi + \mathrm{i}Q_\phi eA^\mu D_\mu\phi + m^2\phi = D_\mu D^\mu\phi + m^2\phi$$

故复标量场的经典运动方程为

$$\boxed{(D^2 + m^2)\phi = 0}$$

上式相当于把 **Klein-Gordon 方程** $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$ 中的普通导数换成协变导数

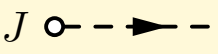
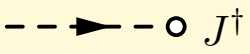
自由生成泛函

- 接下来讨论**标量 QED** 的**路径积分量子化**
- 在**拉氏量**中加入**规范固定项**，得到 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 - \mathrm{i}Q_\phi e A^\mu \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi + Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi$
- **拉氏量**的**自由部分**为 $\mathcal{L}_0 = -\dfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \dfrac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial^\mu \phi)^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$
- 引入**自由生成泛函**

$$
\begin{aligned}
Z_0[K, J^\dagger, J] &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\phi^\dagger\ \exp\left[\mathrm{i} \int_x (\mathcal{L}_0 + K^\mu A_\mu + J^\dagger \phi + \phi^\dagger J)\right] \\
&= \exp\left[-\int_{x,y} \left(\frac{1}{2} K_{\mu,x} \Delta_{xy}^{\mu\nu} K_{\nu,x} + J_x^\dagger D_{xy} J_y\right)\right]
\end{aligned}
$$

$= \exp\Big($  $\Big)$

- 位置空间中**复标量场**的**内线规则**为 y  $x = D_{\mathrm{F}}(x-y)$
- **外源** J 和 $J^\dagger$ 的 Feynman 规则是

 $= \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x\, J(x)\,,$  $= \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x\, J^\dagger(x)$

多点关联函数的生成泛函

多点关联函数的生成泛函是

$$
\begin{aligned}
Z[K,J^\dagger,J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\ \exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L}_1+K^\mu A_\mu+J^\dagger\phi+\phi^\dagger J)\right]\\
&= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\ \exp\left\{\mathrm{i}\int_x(-\mathrm{i}Q_\phi e)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{i}\int_x Q_\phi^2e^2\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right\}\exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L}_0+K^\mu A_\mu+J^\dagger\phi+\phi^\dagger J)\right]\\
&= \tilde{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{Q_\phi e\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{i}Q_\phi^2e^2\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right\}^n Z_0[K,J^\dagger,J]
\end{aligned}
$$

其中 $\tilde{\mathcal{N}}\equiv\mathcal{N}/\mathcal{N}_0$

上式花括号中第一项来自拉氏量中**三线性相互作用项** $-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi$ 的贡献，第二项来自**四线性相互作用项** $Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi$ 的贡献

$\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}$ 表示对用**泛函导数算符** $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}$ 求导得到的函数求**时空导数**

三线性相互作用项的贡献

🐯 在**生成泛函**的 $n=1$ 阶，**三线性相互作用项**的贡献为

$$Q_\phi e \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \right) \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} \right] Z_0[K, J^\dagger, J]$$

$$= Q_\phi e \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \right) \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} \right]$$

$$\times \exp\left[-\int_{z,y} \left(\frac{1}{2} K_{\rho,z} \Delta_{zy}^{\rho\sigma} K_{\sigma,y} + J_z^\dagger D_{zy} J_y \right) \right]$$

$$= Q_\phi e \int_x \left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\mu\nu} K_{\nu,y} \right) \left[\left(\int_y \mathrm{i} J_y^\dagger D_{yx} \right) \left(\int_y \mathrm{i}\, \frac{\partial D_{xy}}{\partial x^\mu} J_y \right) \right.$$

$$\left. - \left(\int_y \mathrm{i} J_y^\dagger \frac{\partial D_{yx}}{\partial x^\mu} \right) \left(\int_y \mathrm{i} D_{xy} J_y \right) \right] Z_0[K, J^\dagger, J]$$

🐱 我们需要根据上式的结构指定**三线性顶点**的 **Feynman 规则**

Feynman 传播子的导数

🐮 上式中复标量场 Feynman 传播子的导数化为

$$\frac{\partial D_{xy}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}p_\mu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$

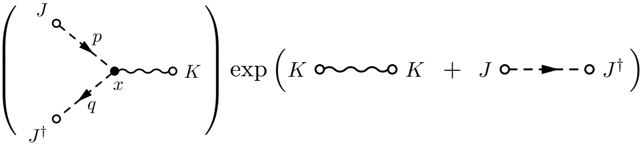
$$\frac{\partial D_{yx}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(y-x)} = \int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(\mathrm{i}q_\mu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(y-x)}$$

🐼 可见，用 $\partial/\partial x^\mu$ 对 D_{xy} 求导，相当在被积函数中添加一个 $-\mathrm{i}p^\mu$ 因子

🐻 用 $\partial/\partial x^\mu$ 对 D_{yx} 求导，相当在被积函数中添加一个 $\mathrm{i}q^\mu$ 因子

🐻‍❄️ 用 Feynman 图表达，有

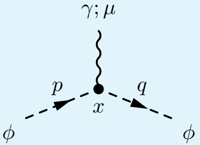
$$Q_\phi e\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger}\right]Z_0[K,J^\dagger,J]$$

$=$ 

🐨 其中第一幅 Feynman 图中标注了两条复标量场内线的四维动量 p 和 q，它们是相应 Feynman 传播子表达式中的积分变量

位置空间中三线性顶点 Feynman 规则

于是，**位置空间**中合适的**三线性顶点 Feynman 规则**是



$$= -\mathrm{i}Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x\,(p_\mu + q_\mu)$$

上图中标注的 γ 和 ϕ 是**粒子名称**

注意，$\partial D_{xy}/\partial x^\mu$ 对上式右边的贡献为 $-\mathrm{i}p^\mu$，而 $-\partial D_{yx}/\partial x^\mu$ 的贡献为 $-\mathrm{i}q^\mu$

在使用这条顶点规则时，应将上式右边的 p^μ 和 q^μ **放入相应传播子的被积函数中**

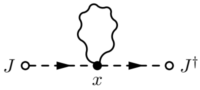
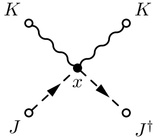
与外源 J 和 $J^\dagger$ 相关的 **Feynman 图泛函求导法则**是

- 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的**外源** J 换成时空点 x
- 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的**外源** $J^\dagger$ 换成时空点 x

四线性相互作用项的贡献

- 另一方面，在**生成泛函**的 $n=1$ **阶**，**四线性相互作用项**的贡献为

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_x^{\mu}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} Z_0[K,J^\dagger,J] \\
={}& \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\nu,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} \exp\left[-\int_{z,y}\left(\frac{1}{2}K_{\rho,z}\Delta_{zy}^{\rho\sigma}K_{\sigma,y} + J_z^\dagger D_{zy} J_y\right)\right] \\
={}& \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \left\{ \left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\nu\sigma}K_{\sigma,y}\right)\left(\int_y \mathrm{i}J_y^\dagger D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right) \right. \\
& \left. \times \exp\left[-\int_{z,y}\left(\frac{1}{2}K_{\rho,z}\Delta_{zy}^{\rho\sigma}K_{\sigma,y} + J_z^\dagger D_{zy} J_y\right)\right] \right\} \\
={}& 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int_x \left[\frac{1}{2}\Delta_{xx}^{\mu\nu}\left(\int_y \mathrm{i}J_y^\dagger D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right)\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\mu\rho}K_{\rho,y}\right)\left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\nu\sigma}K_{\sigma,y}\right)\left(\int_y \mathrm{i}J_y^\dagger D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right)\right] Z_0[K,J^\dagger,J]
\end{aligned}
$$

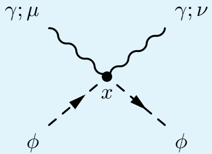
= ( + ) exp ( + )

位置空间中四线性顶点 Feynman 规则

注意，上式最后一步中第一、二幅 Feynman 图的对称性因子都是 2

因此，我们特意在倒数第二步中提出一个因子 2 到积分之外，让方括号中的两项均含有一个因子 $1/2$ 以解释对称性因子

由此归纳出来位置空间中的四线性顶点 Feynman 规则为

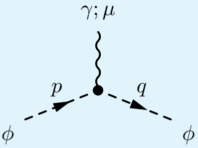


$$= 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int \mathrm{d}^4x$$

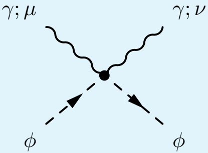
这个顶点规则中出现因子 2 的原因是四线性相互作用项 $Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi$ 包含 2 个全同的电磁场

动量空间中三线性和四线性顶点的 Feynman 规则

去掉位置空间顶点规则的时空坐标记号和时空坐标积分，就得到动量空间中三线性和四线性顶点的 Feynman 规则：



$$= -\mathrm{i}Q_\phi e(p_\mu + q_\mu)\,,$$



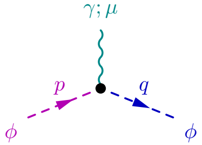
$$= 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu}$$

在这两个顶点的 Feynman 图中，拉氏量相互作用项中的 $\phi(x)$ 对应于指向顶点的虚线头，而 $\phi^\dagger(x)$ 对应于背向顶点的虚线头

在三线性顶点的 Feynman 图中，标记出来的四维动量 p 和 q 是与相应线头连接的复标量玻色子外线或内线上的动量，p 和 q 的方向由线上箭头给出

时空导数算符对顶点规则的贡献

将



$$= -\mathrm{i}Q_\phi e(p_\mu + q_\mu) = Q_\phi e(-\mathrm{i}p_\mu - \mathrm{i}q_\mu)$$

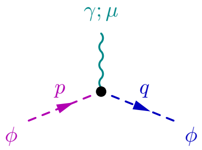
与拉氏量中的**三线性相互作用项** $-\mathrm{i}Q_\phi e A^\mu \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi = -\mathrm{i}Q_\phi e A^\mu [\phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger)\phi]$ 比较可知，

- 对于**指向顶点**的**四维动量** p，相互作用项中对场的**时空导数算符** ∂_μ 在动量空间 Feynman 规则中贡献一个 $-\mathrm{i}p_\mu$ **因子**
- 对于**背向顶点**的**四维动量** q，相互作用项中对场的**时空导数算符** ∂_μ 在动量空间 Feynman 规则中贡献一个 $\mathrm{i}q_\mu$ **因子**

这是一个**普遍规律**，可用于**快速推导**相互作用项的动量空间 Feynman 规则

快速推导三线性顶点

- 快速推导顶点规则的流程如下
- 首先，三线性相互作用项 $-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu[\phi^\dagger\partial_\mu\phi-(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi]$ 由三个场 $A^\mu(x)$、$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 构成，它们分别对应于一个波浪线头、一个指向顶点的虚线头和一个背向顶点的虚线头，由此画出顶点 Feynman 图的圆点和三个线头
- 由于相互作用项中出现了对场的时空导数，因而 Feynman 规则与动量有关，在两个虚线头上标注指向顶点的动量 p 和背向顶点的动量 q，根据上述规律，$\phi^\dagger\partial_\mu\phi$ 给出 $-\mathrm{i}p_\mu$，$(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi$ 给出 $\mathrm{i}q_\mu$
- 于是，将三线性相互作用项中三个场剥离，得到 $-\mathrm{i}Q_\phi e(-\mathrm{i}p_\mu-\mathrm{i}q_\mu)$，再乘以 i，就得到三线性顶点表达式 $-\mathrm{i}Q_\phi e(p_\mu+q_\mu)$

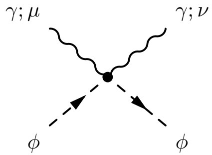


$$= -\mathrm{i}Q_\phi e(p_\mu+q_\mu)$$

快速推导四线性顶点

🐐 其次，四线性相互作用项 $Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger\phi = Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \phi^\dagger\phi$ 由四个场 $A^\mu(x)$、$A^\nu(x)$、$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 构成，它们分别对应于两个波浪线头、一个指向顶点的虚线头和一个背向顶点的虚线头，由此画出顶点 Feynman 图的圆点和四个线头

🐑 将四线性相互作用项中的四个场剥离，乘以 i，再乘以两个全同电磁场的排列数 $2!$，就得到四线性顶点表达式 $2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu}$



$= 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu}$

标量 QED 的正则量子化

🦙 以上是对**标量 QED 路径积分量子化**的讨论

🦘 实际上，也可以使用**正则量子化方法**处理**标量 QED**，详细讨论见 **Greiner & Reinhardt**, *Field Quantization* (1996) 第 8 章中的 Example 8.6

🐪 **标量 QED** 的**三线性相互作用项**中包含对复标量场的**时空导数**，这导致复标量场的**共轭动量密度**与**自由复标量场理论不同**，使得**相互作用绘景**中的相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1^{\mathrm{I}}$ 包含一个**非协变项** $Q_\phi^2 e^2 \phi^{\mathrm{I}\dagger}\phi^{\mathrm{I}}(A^{\mathrm{I},0})^2$

🐫 这个**非协变项**在**微扰论各阶**中的贡献会被对**复标量场 Feynman 传播子**求**时空导数**引起的**非协变项**所**精确抵消**，从而**不影响**最终的物理结果

🦏 但是，这种情况导致**标量 QED** 的**正则量子化**处理比较繁琐

三线性相互作用贡献的 T 矩阵元

- 尽管如此，真正对物理结果有贡献的三线性和四线性协变相互作用项所对应的顶点规则仍可通过正则量子化方法来推导

- 比如，相互作用绘景中的三线性相互作用项为 $-\mathrm{i}Q_\phi e A^{\mathrm{I},\mu}\phi^{\mathrm{I}\dagger}\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi^{\mathrm{I}}$，它对 e^1 阶 $\mathrm{i}T$ 算符的贡献是

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}\{A^{\mathrm{I},\mu}(x)[\phi^{\mathrm{I}\dagger}(x)\partial_\mu\phi^{\mathrm{I}}(x) - \partial_\mu\phi^{\mathrm{I},\dagger}(x)\phi^{\mathrm{I}}(x)]\}$$

- 接下来省略场算符右上角处表示相互作用绘景的记号 I

- 考虑初态包含 1 个正标量玻色子和 1 个光子，$|i\rangle = |\mathbf{p}^+;\mathbf{k},\lambda\rangle$，末态包含 1 个正标量玻色子，$\langle f| = \langle\mathbf{q}^+|$，相应的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{q}^+|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|\mathbf{p}^+;\mathbf{k},\lambda\rangle \\
={}& Q_\phi e\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q}^+|\,\mathsf{N}\{A^\mu(x)[\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) - \partial_\mu\phi^\dagger(x)\phi(x)]\}\,|\mathbf{p}^+;\mathbf{k},\lambda\rangle \\
={}& Q_\phi e\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q}^+|\,[\phi^{\dagger(-)}(x)\partial_\mu\phi^{(+)}(x) - \partial_\mu\phi^{\dagger(-)}(x)\phi^{(+)}(x)]A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+;\mathbf{k},\lambda\rangle
\end{aligned}$$

正负能解时空导数对初末态的作用

仿照 7.4 节中的计算过程，推出

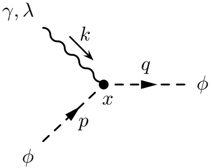
$$
\begin{aligned}
\partial_\mu\phi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+\rangle &= \partial_\mu \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\,a_\mathbf{q}e^{-iq\cdot x}\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a_\mathbf{p}^\dagger\,|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{-iq_\mu\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-iq\cdot x}[a_\mathbf{q},a_\mathbf{p}^\dagger]\,|0\rangle \\
&= \int d^3q\,\frac{-iq_\mu\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-iq\cdot x}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = -ip_\mu e^{-ip\cdot x}\,|0\rangle \\
\langle\mathbf{q}^+|\,\partial_\mu\phi^{\dagger(-)} &= \partial_\mu \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\langle 0|\,\sqrt{2E_\mathbf{q}}\,a_\mathbf{q}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{ip_\mu\sqrt{E_\mathbf{q}}}{\sqrt{E_\mathbf{p}}}\,e^{ip\cdot x}\,\langle 0|\,[a_\mathbf{q},a_\mathbf{p}^\dagger] \\
&= \int d^3p\,\frac{ip_\mu\sqrt{E_\mathbf{q}}}{\sqrt{E_\mathbf{p}}}\,e^{ip\cdot x}\,\langle 0|\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \langle 0|\,iq_\mu e^{iq\cdot x}
\end{aligned}
$$

再结合 $\overbracket{A^\mu(x)\,|\mathbf{p}},\lambda\rangle \equiv A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)e^{-ip\cdot x}\,|0\rangle$

T 矩阵元和不变振幅

得到

$$\langle \mathbf{q}^+ |\, \mathrm{i}T_1^{(1)} \,| \mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda \rangle =$$

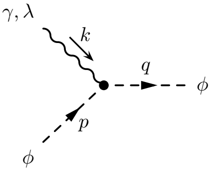


$$= Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+ | \, [\phi^{\dagger(-)}(x)\partial_\mu\phi^{(+)}(x) - \partial_\mu\phi^{\dagger(-)}(x)\phi^{(+)}(x)] A^{\mu(+)}(x) \, | \mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda \rangle$$

$$= Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x \, [\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}(-\mathrm{i}p_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}) - \mathrm{i}q_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}] \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$$

$$= -\mathrm{i}Q_\phi e \, (p_\mu + q_\mu) \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - q)$$

不变振幅为 $\mathrm{i}\mathcal{M} =$



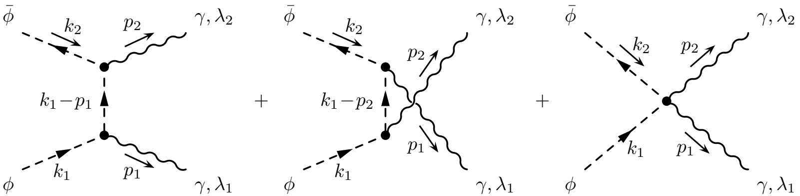
$$= -\mathrm{i}Q_\phi e \, (p_\mu + q_\mu) \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$$

以此归纳出位置空间和动量空间中的三线性顶点规则，结果与前面一致

$\phi\bar{\phi} \to \gamma\gamma$ 湮灭过程

考虑一对正反标量玻色子**湮灭**成一对光子的过程 $\phi\bar{\phi} \to \gamma\gamma$，它的**领头阶**是 e^2 **阶**，具有三幅**拓扑不等价**的 Feynamn 图，相应的**不变振幅**为

$i\mathcal{M} =$



$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}Q_\phi e(2k_1 - p_1)_\mu \frac{\mathrm{i}}{(k_1 - p_1)^2 - m_\phi^2}(-\mathrm{i}Q_\phi e)(k_1 - p_1 - k_2)_\nu \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\varepsilon^{\nu *}(\mathbf{p}_2, \lambda_1) \\
&\quad -\mathrm{i}Q_\phi e(2k_1 - p_2)_\nu \frac{\mathrm{i}}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2}(-\mathrm{i}Q_\phi e)(k_1 - p_2 - k_2)_\mu \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\varepsilon^{\nu *}(\mathbf{p}_2, \lambda_1) \\
&\quad + 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\varepsilon^{\nu *}(\mathbf{p}_2, \lambda_1) \\
&= \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 M_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\varepsilon^{\nu *}(\mathbf{p}_2, \lambda_1)
\end{aligned}
$$

其中 $M_{\mu\nu} \equiv -\dfrac{(2k_1 - p_1)_\mu (k_1 - p_1 - k_2)_\nu}{(k_1 - p_1)^2 - m_\phi^2} - \dfrac{(k_1 - p_2 - k_2)_\mu (2k_1 - p_2)_\nu}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} + 2g_{\mu\nu}$

Ward 恒等式

- 作为规范对称性的体现，Ward 恒等式对标量 QED 的各种过程成立
- 接下来验证 Ward 恒等式 $p_1^\mu M_{\mu\nu} = 0$ 对 $\phi\bar{\phi} \to \gamma\gamma$ 领头阶振幅是成立的
- 由能动量守恒关系 $k_1 + k_2 = p_1 + p_2$ 和质壳条件 $p_1^2 = p_2^2 = 0$、$k_1^2 = k_2^2 = m_\phi^2$ 得

$$\begin{aligned}
(k_1 - p_1)^2 - m_\phi^2 &= k_1^2 + p_1^2 - 2k_1 \cdot p_1 - m_\phi^2 = -2k_1 \cdot p_1 \\
(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2 &= k_1^2 + p_2^2 - 2k_1 \cdot p_2 - m_\phi^2 = -2k_1 \cdot p_2
\end{aligned}$$

- 从 $m_\phi^2 - 2k_1 \cdot p_2 = (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2 = m_\phi^2 - 2k_2 \cdot p_1$ 推出 $k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1$
- 结合 $p_1 \cdot (k_1 - p_2 - k_2) = p_1 \cdot (p_1 - 2k_2) = -2k_2 \cdot p_1$ 和 $2k_1 - p_2 = k_1 + p_1 - k_2$
- 得到 Ward 恒等式

$$\begin{aligned}
p_1^\mu M_{\mu\nu} &= -\frac{p_1 \cdot (2k_1 - p_1)(k_1 - p_1 - k_2)_\nu}{-2k_1 \cdot p_1} - \frac{p_1 \cdot (k_1 - p_2 - k_2)(2k_1 - p_2)_\nu}{-2k_1 \cdot p_2} + 2p_{1\nu} \\
&= -\frac{2k_1 \cdot p_1 (k_1 - p_1 - k_2)_\nu}{-2k_1 \cdot p_1} - \frac{-2k_2 \cdot p_1 (k_1 + p_1 - k_2)_\nu}{-2k_2 \cdot p_1} + 2p_{1\nu} \\
&= (k_1 - p_1 - k_2)_\nu - (k_1 + p_1 - k_2)_\nu + 2p_{1\nu} = 0
\end{aligned}$$

Ward 恒等式讨论

- 如果 $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ 中**缺少任意一幅 Feynman 图**的贡献，**Ward 恒等式将不再成立**
- 也就是说，规范对称性意味着**不变振幅** $i\mathcal{M}$ 中的**三幅 Feynman 图**必须在 e^2 **阶**同时存在
- 如果在**标量 QED** 的拉氏量中**移除四线性相互作用项** $Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi$，理论就**不再具有规范对称性**
- 在**振幅层面**上，这体现为 $i\mathcal{M}$ 中**缺少第三幅 Feynman 图**的贡献，导致 **Ward 恒等式不成立**