

# 量子场论

## 第 11 章 路径积分量子化

### 11.3 节 旋量场的路径积分量子化

余钊焕

中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>


更新日期：2026 年 4 月 29 日




## 11.3 节 旋量场的路径积分量子化

### 11.3.1 小节 Grassmann 数

 本节以 Dirac 旋量场为例讨论旋量场的路径积分量子化


 9.6.1 小节提到，为了与旋量场算符的反对易关系相匹配，旋量场在量子化之前应该用 Grassmann 数表达，而 Grassmann 数是反对易的 c 数

 路径积分方法通过对经典场的泛函积分来实现量子化，泛函积分只涉及 c 数，而不涉及 Hilbert 空间上的算符

 综合以上两点，在路径积分中采用 Grassmann 数来表达旋量场，才能让旋量场得到正确的量子化


 本小节讨论 Grassmann 数的一般性质

# Grassmann 数


 **Grassmann 数**最重要的性质是它的**反对易性**

 对于任意两个 Grassmann 数  $\theta$  和  $\eta$ ，有


$$\theta\eta = -\eta\theta$$


 从而， $\theta$  与自身的乘积满足  $\theta\theta = -\theta\theta$ ，即  $\theta^2 = 0$

 可见，任何一个 Grassmann 数的**平方为零**


 此外，两个 Grassmann 数的乘积  $\theta\eta$  作为**整体**与另一个 Grassmann 数  $\zeta$  **对易**：


$$(\theta\eta)\zeta = -\theta\zeta\eta = \zeta(\theta\eta)$$

 对 Grassmann 数引入**加法**和**数乘**，运算规则与**线性空间中矢量的加法和数乘相同**


 比如，**加法交换律**为  $\theta + \eta = \eta + \theta$ ，**加法结合律**为  $(\theta + \eta) + \zeta = \theta + (\eta + \zeta)$ ，**数乘分配律**为  $(a + b)\theta = a\theta + b\theta$  和  $a(\theta + \eta) = a\theta + a\eta$ ，其中  $a$  和  $b$  是任意复数


# 积分的平移不变性


 为了讨论泛函积分，我们需要引入 **Grassmann 数** 的积分运算

 但是，用 Riemann 和的极限来定义普通积分的方法并不能推广到 Grassmann 数上


 接下来在形式上定义 **Grassmann 数** 的积分，使其具有积分的一些重要性质

 设  $f(\theta)$  是 Grassmann 数  $\theta$  的一个函数，展开成  $\theta$  的幂级数，得  $f(\theta) = a + b\theta$


 由于  $\theta^2 = 0$ ，上式只能包含两项

 将普通的无穷积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$  推广为对 Grassmann 数的积分，有

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a + b\theta)$$

 作变量替换  $z = x + y$ ，则普通的无穷积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$  满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x + y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$$

 第二步把积分变量  $z$  改写为  $x$

 可见，这样的积分具有**平移不变性**，即在  $x \rightarrow x + y$  变换下不变

# Grassmann 数的积分运算

🥜 **平移不变性**对推出 **Gauss 积分公式的变种**至关重要

🍌 因此, 我们希望 **Grassmann 数的积分**也具有**平移不变性**

🧄 为此, 定义  $\int d\theta = 0, \int d\theta \theta = 1$

🥑 这使得  $\int d\theta f(\theta + \eta) = \int d\theta [a + b(\theta + \eta)] = b = \int d\theta (a + b\theta) = \int d\theta f(\theta)$

🥝 即积分  $\int d\theta f(\theta)$  在  $\theta \rightarrow \theta + \eta$  变换下**不变**

🥥 对 Grassmann 数进行**多重积分**时, 我们规定总是**从内层积分开始**计算, 故

$$\int d\theta \int d\eta \eta \theta = 1$$

🍆 而  $\int d\theta \int d\eta \theta \eta = - \int d\theta \int d\eta \eta \theta = -1$

🍎 注意, Grassmann 数的**微分**  $d\theta$  也是 **Grassmann 数**, 有

$$\int d\eta \int d\theta \eta \theta = - \int d\theta \int d\eta \eta \theta = -1$$

# Grassmann 数的微分运算

🍷 接下来引入 **Grassmann 数** 的微分运算

🍪 定义 Grassmann 数的**导数**为  $\frac{d}{d\theta} \theta = 1$

🍌 从而，对  $f(\theta) = a + b\theta$  求导的结果为

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta) = \frac{d}{d\theta} (a + b\theta) = b \frac{d}{d\theta} \theta = b$$

🍌 与  $\int d\theta (a + b\theta) = b$  比较可知，对  $f(\theta)$  **求导**的结果与**积分**是**相同**的

🍌 对多个 Grassmann 数的乘积求导时，约定求导算符  $d/d\theta$  与  $\theta$  **相邻**时才能直接使用  $d\theta/d\theta = 1$ ，故

$$\frac{d}{d\theta} (\theta\eta) = \eta, \quad \frac{d}{d\theta} (\eta\theta) = -\frac{d}{d\theta} (\theta\eta) = -\eta$$


🍌 此外，两个 Grassmann 数**求导算符**之间是**反对易**的，而一个 Grassmann 数**求导算符**与一个和它不相关的 **Grassmann 数**之间也是**反对易**的，即

$$\frac{d}{d\theta} \frac{d}{d\eta} = -\frac{d}{d\eta} \frac{d}{d\theta}, \quad \frac{d}{d\theta} (\eta\theta) = -\eta \frac{d}{d\theta} \theta = -\eta$$

## 多个 Grassmann 变量的微分运算

 对于  $N$  个独立的 Grassmann 变量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ , 有

$$\frac{d}{d\theta_i} \theta_j = \delta_{ij}$$

 当  $N = 2$  时,  $\frac{d}{d\theta}(\theta\eta) = \eta$  和  $\frac{d}{d\eta}(\theta\eta) = -\theta$  意味着

$$\frac{d}{d\theta_i}(\theta_1\theta_2) = \delta_{i1}\theta_2 - \delta_{i2}\theta_1 = \frac{d\theta_1}{d\theta_i} \theta_2 - \theta_1 \frac{d\theta_2}{d\theta_i}$$

 推广到任意  $N$  的情况, 得到

$$\frac{d}{d\theta_i}(\theta_1\theta_2 \cdots \theta_N)$$

$$= \left( \frac{d\theta_1}{d\theta_i} \theta_2 \cdots \theta_N \right) + \left( -\theta_1 \frac{d\theta_2}{d\theta_i} \cdots \theta_N \right) + \cdots + \left[ (-1)^{N-1} \theta_1 \cdots \theta_{N-1} \frac{d\theta_N}{d\theta_i} \right]$$

$$= (\delta_{i1}\theta_2\theta_3 \cdots \theta_N) + (-\delta_{i2}\theta_1\theta_3 \cdots \theta_N) + \cdots + [(-1)^{N-1}\delta_{iN}\theta_1\theta_2 \cdots \theta_{N-1}]$$

 这是导数的乘积法则在 Grassmann 数上的推广

# 复的 Grassmann 数

🍌 由于 Dirac 旋量场是复场，不满足自共轭条件，在相应的路径积分中需要使用复的 Grassmann 数

🍷 对于两个 Grassmann 数  $\theta$  和  $\eta$  乘积的复共轭，规定

$$(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^*$$

🍲 也就是说，作复共轭计算时需要交换两个 Grassmann 数，再分别取其复共轭，这类似于 Hilbert 空间上算符的厄米共轭；上式第二步用到 Grassmann 数的反对易性

🍲 如果 Grassmann 数  $\eta$  满足自共轭条件  $\eta^* = \eta$ ，就称  $\eta$  是实的 Grassmann 数

🍲 复的 Grassmann 数  $\theta$  和  $\theta^*$  可由两个实的 Grassmann 数  $\theta_1$  和  $\theta_2$  构造为

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \quad \theta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2)$$


🍲  $\theta$  与  $\theta^*$  是线性独立的，满足  $\theta^2 = (\theta^*)^2 = 0$ 、 $\theta\theta^* = i\theta_2\theta_1 = -\theta\theta^*$  和积分公式

$$\int d\theta^* d\theta \theta\theta^* = 1$$


# Grassmann 数的 Gauss 积分公式

 对于复数  $b$  和两个复 Grassmann 数  $\theta$ 、 $\tilde{\theta}$ ，将指数函数  $e^{-b\tilde{\theta}^*\theta}$  展开，有

$$e^{-b\tilde{\theta}^*\theta} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b\tilde{\theta}^*\theta)^n}{n!} = 1 - b\tilde{\theta}^*\theta$$

 其中第一步是指数函数的定义

 由于 Grassmann 数的反对易性，上式中  $n > 1$  阶的项都是零

 对  $\theta$  和  $\theta^*$  积分，得

$$\int d\tilde{\theta}^* d\theta e^{-b\tilde{\theta}^*\theta} = \int d\tilde{\theta}^* d\theta (1 - b\tilde{\theta}^*\theta) = b \int d\tilde{\theta}^* d\theta \theta\tilde{\theta}^*$$

 再利用  $\int d\tilde{\theta}^* d\theta \theta\tilde{\theta}^* = 1$ ，推出 Grassmann 数的 Gauss 积分公式


$$\int d\tilde{\theta}^* d\theta e^{-b\tilde{\theta}^*\theta} = b$$

# 内积和 $2N$ 维 Grassmann 数 Gauss 积分

 下面推导**多维的 Grassmann 数 Gauss 积分公式**

 对于两个由  $N$  个**独立的复 Grassmann 数**构成的列矢量  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^T$  和  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N)^T$ ，**内积**定义为


$$(\tilde{\theta}, \theta) \equiv \tilde{\theta}^\dagger \theta = \tilde{\theta}_i^* \theta_i$$

 设  $A$  为  $N$  阶**复方阵**，其矩阵元  $A_{ij}$  为普通复数，将  $A$  乘到列矢量  $\theta$  上，得到列矢量  $A\theta$ ，它与  $\tilde{\theta}$  的**内积**为

$$(\tilde{\theta}, A\theta) = \tilde{\theta}^\dagger A\theta = \tilde{\theta}_i^* A_{ij} \theta_j$$

 对任意的  $N$  阶**复方阵**  $B$ ，考虑  $2N$  维 **Grassmann 数 Gauss 积分**

$$\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)]$$

 **积分测度**定义为  $d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \equiv \prod_{i=1}^N (d\tilde{\theta}_i^* d\theta_i) = (d\tilde{\theta}_1^* d\theta_1)(d\tilde{\theta}_2^* d\theta_2) \cdots (d\tilde{\theta}_N^* d\theta_N)$

# $N = 2$ 的情况

当  $N = 2$  时, 有

$$\begin{aligned}
 & \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)] \\
 &= \exp(-\tilde{\theta}_i^* B_{ij}\theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\tilde{\theta}_i^* B_{ij}\theta_j)^n = 1 - \tilde{\theta}_i^* B_{ij}\theta_j + \frac{1}{2!} (-\tilde{\theta}_i^* B_{ij}\theta_j)^2 \\
 &= 1 - \tilde{\theta}_1^* B_{11}\theta_1 - \tilde{\theta}_2^* B_{22}\theta_2 - \tilde{\theta}_1^* B_{12}\theta_2 - \tilde{\theta}_2^* B_{21}\theta_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_1^* B_{11}\theta_1 \tilde{\theta}_2^* B_{22}\theta_2 + \tilde{\theta}_1^* B_{12}\theta_2 \tilde{\theta}_2^* B_{21}\theta_1 + \tilde{\theta}_2^* B_{21}\theta_1 \tilde{\theta}_1^* B_{12}\theta_2 + \tilde{\theta}_2^* B_{22}\theta_2 \tilde{\theta}_1^* B_{11}\theta_1) \\
 &= 1 - \tilde{\theta}_1^* B_{11}\theta_1 - \tilde{\theta}_2^* B_{22}\theta_2 - \tilde{\theta}_1^* B_{12}\theta_2 - \tilde{\theta}_2^* B_{21}\theta_1 + (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})\theta_1\tilde{\theta}_1^*\theta_2\tilde{\theta}_2^* \\
 &= 1 - \tilde{\theta}_1^* B_{11}\theta_1 - \tilde{\theta}_2^* B_{22}\theta_2 - \tilde{\theta}_1^* B_{12}\theta_2 - \tilde{\theta}_2^* B_{21}\theta_1 + (\det B)\theta_1\tilde{\theta}_1^*\theta_2\tilde{\theta}_2^*
 \end{aligned}$$

在第三步中,  $n \geq 3$  阶的项必定包含  $\theta_i^2$  或  $(\tilde{\theta}_i^*)^2$ , 因而贡献为零

根据 Grassmann 数积分的定义, 上式最后一步中只有最后一项才对 Gauss 积分有贡献, 故  $\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)] = \det B \int d\tilde{\theta}_1^* d\theta_1 d\tilde{\theta}_2^* d\theta_2 \theta_1 \tilde{\theta}_1^* \theta_2 \tilde{\theta}_2^* = \det B$

对  $N = 2$  成立

任意  $N$  的情况

🍊 当  $N = 1$  时,

$$\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)] = \det B$$

退化为  $\int d\tilde{\theta}^* d\theta e^{-b\tilde{\theta}^*\theta} = b$

🍽️ 这让我们有理由推测这个结果是对任意  $N \geq 1$  成立的, 一般论证如下

🍽️ 对任意大于 1 的正整数  $N$ , 有

$$\begin{aligned} \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)] &\supset \frac{1}{N!} (-\tilde{\theta}_i^* B_{ij} \theta_j)^N \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\text{permutations}} (-\tilde{\theta}_{i_1}^* B_{i_1 j_1} \theta_{j_1}) (-\tilde{\theta}_{i_2}^* B_{i_2 j_2} \theta_{j_2}) \cdots (-\tilde{\theta}_{i_N}^* B_{i_N j_N} \theta_{j_N}) \end{aligned}$$


🍦 第一步只保留对 Gauss 积分有贡献的  $n = N$  阶的项

🍽️ 在第二步的每一项中, 为了得到非零的贡献,  $N$  个  $\tilde{\theta}_i^*$  必须各不相同,  $N$  个  $\theta_i$  也必须各不相同, 这意味着  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  和  $(j_1, j_2, \dots, j_N)$  都是  $(1, 2, \dots, N)$  的某种置换, 而第二步中的求和是对所有置换进行的

# $N$ 维 Levi-Civita 符号

 引入  $N$  维 Levi-Civita 符号  $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N}$

 它关于  $N$  个指标是全反对称的, 且  $\varepsilon^{12 \cdots N} = 1$

 根据 Grassmann 数的反对易性, 有

$$\tilde{\theta}_{i_1}^* \tilde{\theta}_{i_2}^* \cdots \tilde{\theta}_{i_N}^* = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} \tilde{\theta}_1^* \tilde{\theta}_2^* \cdots \tilde{\theta}_N^*, \quad \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_N} = \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N} \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_N$$


 从而

$$\exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)]$$

$$\supset \frac{1}{N!} \sum_{\text{permutations}} (-\tilde{\theta}_{i_1}^* B_{i_1 j_1} \theta_{j_1}) (-\tilde{\theta}_{i_2}^* B_{i_2 j_2} \theta_{j_2}) \cdots (-\tilde{\theta}_{i_N}^* B_{i_N j_N} \theta_{j_N})$$

$$= \frac{1}{N!} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \cdots B_{i_N j_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N} (-\tilde{\theta}_1^* \theta_1) (-\tilde{\theta}_2^* \theta_2) \cdots (-\tilde{\theta}_N^* \theta_N)$$

$$= \det B (\theta_1 \tilde{\theta}_1^*) (\theta_2 \tilde{\theta}_2^*) \cdots (\theta_N \tilde{\theta}_N^*)$$

 最后一步用到行列式表达式  $\det B = \frac{1}{N!} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \cdots B_{i_N j_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N}$

## 2N 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式


 于是，将 Gauss 积分表达为

$$\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)]$$


$$= \det B \int (d\tilde{\theta}_1^* d\theta_1)(d\tilde{\theta}_2^* d\theta_2) \cdots (d\tilde{\theta}_N^* d\theta_N)(\theta_1 \tilde{\theta}_1^*)(\theta_2 \tilde{\theta}_2^*) \cdots (\theta_N \tilde{\theta}_N^*)$$

 进而推出 2N 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式

$$\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta)] = \det B$$

 与普通的 2N 维 Gauss 积分公式  $\int d^N v d^N v^* \exp[-(v, Bv)] = \frac{(2\pi)^N}{\det B}$  比较，不

同之处主要是 Grassmann 数 Gauss 积分得到的行列式  $\det B$  并没有出现在分母上

 这个积分公式对  $\tilde{\theta} = \theta$  的情况也是成立的

## 2N 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式的变种

 如果  $B$  是厄米矩阵, 可进一步推出 2N 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式的变种


$$\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta) + (\tilde{\eta}, \theta) + (\tilde{\theta}, \eta)] = \det B \exp[(\tilde{\eta}, B^{-1}\eta)]$$

 **证明**  $B$  矩阵的厄米性意味着  $(B^{-1})^\dagger B = (B^{-1})^\dagger B^\dagger = (BB^{-1})^\dagger = \mathbf{1}$ , 由此得到

$$\begin{aligned} (\tilde{\theta} - B^{-1}\tilde{\eta})^\dagger B(\theta - B^{-1}\eta) &= \tilde{\theta}^\dagger B\theta - \tilde{\eta}^\dagger (B^{-1})^\dagger B\theta - \tilde{\theta}^\dagger BB^{-1}\eta + \tilde{\eta}^\dagger (B^{-1})^\dagger BB^{-1}\eta \\ &= \tilde{\theta}^\dagger B\theta - \tilde{\eta}^\dagger \theta - \tilde{\theta}^\dagger \eta + \tilde{\eta}^\dagger B^{-1}\eta \end{aligned}$$

 引入  $\zeta \equiv \theta - B^{-1}\eta$  和  $\tilde{\zeta} \equiv \tilde{\theta} - B^{-1}\tilde{\eta}$ , 有

$$(\tilde{\theta}, B\theta) - (\tilde{\eta}, \theta) - (\tilde{\theta}, \eta) = \tilde{\theta}^\dagger B\theta - \tilde{\eta}^\dagger \theta - \tilde{\theta}^\dagger \eta = \tilde{\zeta}^\dagger B\zeta - \tilde{\eta}^\dagger B^{-1}\eta = (\tilde{\zeta}, B\zeta) - (\tilde{\eta}, B^{-1}\eta)$$

 作变量替换  $\theta \rightarrow \zeta$  和  $\tilde{\theta} \rightarrow \tilde{\zeta}$ , 利用 Grassmann 数积分的平移不变性, 推出

$$\int d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta \exp[-(\tilde{\theta}, B\theta) + (\tilde{\eta}, \theta) + (\tilde{\theta}, \eta)] = \int d^N \tilde{\zeta}^* d^N \zeta \exp[-(\tilde{\zeta}, B\zeta) + (\tilde{\eta}, B^{-1}\eta)]$$

 根据 2N 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式作出以上积分, 就得以证明 

## 11.3.2 小节 生成泛函和 Feynman 传播子

☀️ **Grassmann 场**  $\theta(x)$  是时空坐标  $x^\mu$  的函数，它在**每个时空点**处的取值都是一个独立的 **Grassmann 数**

☀️ 对  $\theta(x)$  的**泛函导数**定义为 
$$\frac{\delta}{\delta\theta(x)} \theta(y) = \delta^{(4)}(x - y)$$

🌙 这是分立 Grassmann 数的求导关系  $\frac{d}{d\theta_i} \theta_j = \delta_{ij}$  在**连续极限**下的推广


☁️ Grassmann 数的泛函求导算符与 Grassmann 数一样，具有**反对易性**，故

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \theta(x_1) = -\theta(x_1) \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}, \quad \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \frac{\delta}{\delta\theta(x_1)} = -\frac{\delta}{\delta\theta(x_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}$$


☁️ 在**高阶泛函导数**计算中，**内层求导运算先执行**，如

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta\eta(x_2)\delta\theta(x_1)} [\theta(x)\eta(x)] &\equiv \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \frac{\delta}{\delta\theta(x_1)} [\theta(x)\eta(x)] = \delta^{(4)}(x_1 - x) \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \eta(x) \\ &= \delta^{(4)}(x_1 - x)\delta^{(4)}(x_2 - x) \end{aligned}$$


# 复合函数的求导

 利用四维  $\delta$  函数的挑选性, 有


$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)} \int d^4y \eta(y)\theta(y) = \int d^4y \frac{\delta\eta(y)}{\delta\eta(x)} \theta(y) = \int d^4y \delta^{(4)}(x-y)\theta(y) = \theta(x)$$

 进而推出

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \left[ \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right]^2 = \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \left[ \int d^4y d^4z \eta(y)\theta(y)\eta(z)\theta(z) \right] \\ &= \int d^4y d^4z \frac{\delta\eta(y)}{\delta\eta(x)} \theta(y)\eta(z)\theta(z) + \int d^4y d^4z \eta(y)\theta(y) \frac{\delta\eta(z)}{\delta\eta(x)} \theta(z) \\ &= \int d^4y d^4z \delta^{(4)}(x-y)\theta(y)\eta(z)\theta(z) + \int d^4y d^4z \eta(y)\theta(y)\delta^{(4)}(x-z)\theta(z) \\ &= \int d^4z \theta(x)\eta(z)\theta(z) + \int d^4y \eta(y)\theta(y)\theta(x) = 2\theta(x) \int d^4y \eta(y)\theta(y) \end{aligned}$$

 其中第二步用了**乘积法则**; 结果与利用**复合函数的链式法则**计算的结果一致

# 指数复合函数的求导

 将上式进一步**推广**，得到

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)} \left[ \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right]^n = n\theta(x) \left[ \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

 于是

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \exp \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right] &= \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ni\theta(x) \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right]^{n-1} = i\theta(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right]^{n-1} \\ &= i\theta(x) \exp \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right] \end{aligned}$$

 而

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\theta(x)} \exp \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right] &= \frac{\delta}{\delta\theta(x)} \exp \left[ -i \int d^4y \theta(y)\eta(y) \right] \\ &= -i\eta(x) \exp \left[ -i \int d^4y \theta(y)\eta(y) \right] = -i\eta(x) \exp \left[ i \int d^4y \eta(y)\theta(y) \right] \end{aligned}$$

 以上两式也与利用**复合函数**的**链式法则**计算得到的结果相同

## 多点关联函数的生成泛函

● 对于接下来要出现在**路径积分**表达式中的 **Dirac 旋量场**  $\psi(x)$ ，每个分量  $\psi_a(x)$  都是 **Grassmann 场**

● 考虑由 **Dirac 旋量场**  $\psi(x)$  构造的**拉氏量**  $\mathcal{L}(x)$ ，**多点关联函数的生成泛函**定义为

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)] \right\}$$

● 上式对 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  及其 Dirac 共轭场  $\bar{\psi}(x)$  进行**泛函积分**

● **泛函测度**定义为  $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_{a=1}^4 (\mathcal{D}\bar{\psi}_a \mathcal{D}\psi_a)$ ，其中  $\mathcal{D}\bar{\psi}_a \mathcal{D}\psi_a$  (此处不采用 Einstein

求和约定) 是积分测度  $d^N \tilde{\theta}^* d^N \theta = \prod_{i=1}^N (d\tilde{\theta}_i^* d\theta_i)$  在**连续极限**下的推广

● 由于  $\bar{\psi}_a(x) = \psi_b^\dagger(x) (\gamma^0)_{ba}$  与  $\psi_a^\dagger(x)$  只相差一个**么正变换**，**积分测度**  $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi$  与  $\mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi$  是**等价的**

●  $\eta(x)$  和  $\bar{\eta}(x)$  是**外源**，其中  $\eta(x)$  是 Dirac 旋量场， $\bar{\eta}(x)$  是相应的 Dirac 共轭场，它们的每个分量都是 **Grassmann 场**

# 对生成泛函求泛函导数

- 对生成泛函求高阶泛函导数并取  $\bar{\eta} = \eta = 0$ ，可以得到多点关联函数
- 为了给出两点关联函数的表达式，先对  $Z[\bar{\eta}, \eta]$  求一次泛函导数，得

$$\frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} Z[\bar{\eta}, \eta] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \bar{\psi}_b(x_2) \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right]$$

- 再求一次泛函导数，推出

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} \frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} Z[\bar{\eta}, \eta] \\ &= -\mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \bar{\psi}_b(x_2) \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\ &= -\mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \bar{\psi}_b(x_2) \psi_a(x_1) \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \end{aligned}$$

## 两点 and 四点关联函数

🌙 由归一化条件  $Z[0,0] = 1$  得  $\mathcal{N} = [\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i \int d^4x \mathcal{L})]^{-1}$

☀️ 从而，可以将**两点关联函数**表达为

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \exp(i \int d^4x \mathcal{L})}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i \int d^4x \mathcal{L})} \\ &= \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} \frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} Z[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \end{aligned}$$

🌟 类似地，关于  $\psi_a(x_1)$ 、 $\bar{\psi}_b(x_2)$ 、 $\bar{\psi}_c(x_3)$  和  $\psi_d(x_4)$  的**四点关联函数**为

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T[\psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2) \bar{\psi}_c^H(x_3) \psi_d^H(x_4)] | 0 \rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(x_2) \bar{\psi}_c(x_3) \psi_d(x_4) \exp(i \int d^4x \mathcal{L})}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i \int d^4x \mathcal{L})} \\ &= \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} \frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} \frac{\delta}{-i \delta \eta_c(x_3)} \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_d(x_4)} Z[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \end{aligned}$$

🍎 这个四点关联函数通过 **LSZ 约化公式**对应于散射过程  $\psi \bar{\psi} \rightarrow \psi \bar{\psi}$  的 **T 矩阵元**

## 四维 Euclid 空间中的 Dirac 矩阵


 对于自由的 Dirac 旋量场，拉氏量为

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

 接下来作 Wick 转动，转到 Euclid 空间


 将四维 Euclid 空间中的 Dirac 矩阵定义为

$$\gamma_E^4 = \gamma^0, \quad \gamma_E^i \equiv -i\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3$$

 则  $\gamma_E^4$  和  $\gamma_E^i$  都是厄米矩阵，且

$$\{\gamma_E^i, \gamma_E^j\} = \{-i\gamma^i, -i\gamma^j\} = -2g^{ij} = 2\delta^{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\{\gamma_E^4, \gamma_E^4\} = \{\gamma^0, \gamma^0\} = 2g^{00} = 2\delta^{44}, \quad \{\gamma_E^i, \gamma_E^4\} = \{-i\gamma^i, \gamma^0\} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

 可见， $\gamma_E^\mu$  满足反对易关系

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

## 四维 Euclid 空间中的自由生成泛函

🏐 根据  $\partial_{E,\mu} = \left( \nabla, -i \frac{\partial}{\partial x^0} \right)$ , 有

$$\gamma_E^\mu \partial_{E,\mu} = \gamma_E^i \partial_{E,i} + \gamma_E^4 \partial_{E,4} = -i\gamma^i \partial_i - i\gamma^0 \partial_0 = -i\gamma^\mu \partial_\mu$$

🏊 从而, 四维 Euclid 空间中的自由拉氏量表达为

$$\mathcal{L}_{0,E} = -\bar{\psi} \gamma_E^\mu \partial_{E,\mu} \psi - m\bar{\psi} \psi$$

👤 由于  $d^4x = -i d^4x_E$ , 相应的自由生成泛函是

$$Z_{0,E}[\bar{\eta}, \eta] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int d^4x_E (\bar{\psi} \gamma_E^\mu \partial_{E,\mu} \psi + m\bar{\psi} \psi - \bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta) \right]$$

# Dirac 旋量场的内积

对于四维 Euclid 空间上的 Dirac 旋量场  $\eta(x_E)$  和  $\psi(x_E)$ ，内积定义为


$$(\eta, \psi) \equiv \int d^4 x_E d^4 y_E \bar{\eta}(x_E) \psi(y_E) = \int d^4 x_E d^4 y_E \bar{\eta}_a(x_E) \psi_a(y_E)$$

其中第二步将旋量指标显明写出来


如果  $\Gamma(x_E, y_E)$  既是以空间坐标  $x_E$  和  $y_E$  作为行列指标的连续方阵，又是旋量空间上的四阶方阵，就可以进一步引入内积

$$\begin{aligned} (\eta, \Gamma\psi) &\equiv \int d^4 x_E d^4 y_E \bar{\eta}(x_E) \Gamma(x_E, y_E) \psi(y_E) \\ &= \int d^4 x_E d^4 y_E \bar{\eta}_a(x_E) \Gamma_{ab}(x_E, y_E) \psi_b(y_E) \end{aligned}$$

# 自由生成泛函的内积形式

 **自由生成泛函**中涉及到的积分可作以下转换：

$$\begin{aligned}
 & \int d^4 x_E (\bar{\psi} \gamma_E^\mu \partial_{E,\mu} \psi + m \bar{\psi} \psi) \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E [\bar{\psi}(x_E) \gamma_E^\mu \partial_{y_E,\mu} \psi(y_E) + m \bar{\psi}(x_E) \psi(y_E)] \delta^{(4)}(x_E - y_E) \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E \{ \bar{\psi}(x_E) \gamma_E^\mu \partial_{y_E,\mu} [\psi(y_E) \delta^{(4)}(x_E - y_E)] \\
 & - \bar{\psi}(x_E) \gamma_E^\mu [\partial_{y_E,\mu} \delta^{(4)}(x_E - y_E)] \psi(y_E) + m \bar{\psi}(x_E) \psi(y_E) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \} \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E \bar{\psi}(x_E) [(-\gamma_E^\mu \partial_{y_E,\mu} + m) \delta^{(4)}(x_E - y_E)] \psi(y_E) = (\psi, B\psi)
 \end{aligned}$$

 其中第三步**丢弃**对积分没有贡献的一个**全散度项**，而**连续方阵**

$$B(x_E, y_E) \equiv (-\gamma_E^\mu \partial_{y_E,\mu} + m) \delta^{(4)}(x_E - y_E)$$

也是**旋量空间**上的**四阶方阵**，它是**厄米**的。由此将**自由生成泛函**改写为

$$Z_{0,E}[\bar{\eta}, \eta] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-(\psi, B\psi) + (\eta, \psi) + (\bar{\psi}, \bar{\eta})]$$

# Grassmann 数泛函 Gauss 积分公式

✎ 将  $2N$  维 Grassmann 数 Gauss 积分公式及其变种推广到泛函积分的情况

✎ 得到 **Grassmann 数泛函 Gauss 积分公式**

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-(\psi, B\psi)] = \det B$$

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-(\psi, B\psi) + (\eta, \psi) + (\psi, \eta)] = \det B \exp[(\eta, B^{-1}\eta)]$$

✎ 据此作出**自由生成泛函**中的泛函积分，得到

$$Z_{0,E}[\bar{\eta}, \eta] = \mathcal{N}_0 \det B \exp[(\eta, B^{-1}\eta)]$$

✎ 归一化条件  $Z_{0,E}[0, 0] = 1$  给出  $\mathcal{N}_0 = (\det B)^{-1}$ ，故


$$Z_{0,E}[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left[ \int d^4x_E d^4y_E \bar{\eta}(x_E) B^{-1}(x_E, y_E) \eta(y_E) \right]$$

# $B(x_E, y_E)$ 的 Fourier 变换


 接下来计算  $B^{-1}(x_E, y_E)$  的具体形式。由

$$\begin{aligned} B(x_E, y_E) &= (-\gamma_E^\mu \partial_{y_E, \mu} + m) \delta^{(4)}(x_E - y_E) = (-\gamma_E^\mu \partial_{y_E, \mu} + m) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)} \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} (-i \gamma_E^\mu p_{E, \mu} + m) e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)} \end{aligned}$$

 可见,  $B(x_E, y_E)$  的 Fourier 变换是  $\tilde{B}(p_E) = -i \gamma_E^\mu p_{E, \mu} + m$


 注意到

$$\begin{aligned} (i \gamma_E^\nu p_{E, \nu} + m)(-i \gamma_E^\mu p_{E, \mu} + m) &= \gamma_E^\mu \gamma_E^\nu p_{E, \mu} p_{E, \nu} + m^2 \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_E^\mu \gamma_E^\nu + \gamma_E^\nu \gamma_E^\mu) p_{E, \mu} p_{E, \nu} + m^2 \\ &= \delta^{\mu\nu} p_{E, \mu} p_{E, \nu} + m^2 = p_E^2 + m^2 \end{aligned}$$


  $\tilde{B}(p_E)$  的逆矩阵是


$$\tilde{B}^{-1}(p_E) = (-i \gamma_E^\mu p_{E, \mu} + m)^{-1} = \frac{i \gamma_E^\mu p_{E, \mu} + m}{p_E^2 + m^2}$$

# Euclid 空间中 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

  $\tilde{B}^{-1}(p_E)$  的 Fourier 逆变换  $B^{-1}(x_E, y_E)$  是  $B(x_E, y_E)$  的逆矩阵, 也是 Euclid 空间中 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子  $S_F^E(x_E - y_E)$ , 故

$$\begin{aligned} S_F^E(x_E - y_E) &\equiv B^{-1}(x_E, y_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \tilde{B}^{-1}(p_E) e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)} \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_E^\mu p_{E,\mu} + m}{p_E^2 + m^2} e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)} \end{aligned}$$

 下面将它转换到 Minkowski 时空中


 根据  $p_E \equiv \mathbf{p}$ ,  $p_E^4 \equiv -ip^0$ ,  $\gamma_E^4 = \gamma^0$  和  $\gamma_E^i \equiv -i\gamma^i$ , 有


$$\gamma_E^\mu p_{E,\mu} = \gamma_E^4 p_E^4 + \gamma_E^i p_E^i = -i\gamma^0 p^0 - i\gamma^i p^i = -i(\gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})$$

# Minkowski 时空中 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

 再利用  $p_E^2 = -p^2$  和  $p_E \cdot x_E = p^0 x^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ , 得

$$\begin{aligned} S_F^E(x_E - y_E) &= \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_E^4 \frac{i\gamma_E^\mu p_{E,\mu} + m}{p_E^2 + m^2} e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} (-i dp^0) \frac{\gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m}{-p^2 + m^2} e^{-i[p^0(x^0 - y^0) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp^0 \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)} \end{aligned}$$

 最后一步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$

 进一步, 参考实标量场 Feynman 传播子的推导过程, 将 Minkowski 时空中 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子表达为

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}$$


 这与正则量子化方法得到的结果一致

# Minkowski 时空中的生成泛函

 借助解析延拓，将 Euclid 空间中的生成泛函

$$Z_{0,E}[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left[ \int d^4x_E d^4y_E \bar{\eta}(x_E) B^{-1}(x_E, y_E) \eta(y_E) \right]$$

 转换到 Minkowski 时空中

 作替换  $d^4x_E d^4y_E \rightarrow id^4x id^4y$ 、 $\bar{\eta}(x_E) \rightarrow \bar{\eta}(x)$ 、 $\eta(y_E) \rightarrow \eta(y)$  和  $B^{-1}(x_E, y_E) = S_F^E(x_E - y_E) \rightarrow S_F(x - y)$ ，得到自由 Dirac 旋量场的生成泛函

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left[ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) \right]$$

## 生成泛函的泛函导数

👉 利用复合函数的链式法则，对自由生成泛函求一阶泛函导数，有

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} Z_0[\bar{\eta}, \eta] &= \frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} \exp \left[ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}_c(x) S_{F,cd}(x-y) \eta_d(y) \right] \\
 &= \left[ \int d^4x d^4y \bar{\eta}_c(x) S_{F,cd}(x-y) \frac{\delta \eta_d(y)}{-i \delta \eta_b(x_2)} \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 &= \left[ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_c(x) S_{F,cd}(x-y) \delta_{bd} \delta^{(4)}(x_2 - y) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 &= \left[ i \int d^4x \bar{\eta}_c(x) S_{F,cb}(x - x_2) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} Z_0[\bar{\eta}, \eta] &= \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} \exp \left[ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}_c(x) S_{F,cd}(x-y) \eta_d(y) \right] \\
 &= \left[ - \int d^4x d^4y \frac{\delta \bar{\eta}_c(x)}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} S_{F,cd}(x-y) \eta_d(y) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 &= \left[ i \int d^4x d^4y \delta_{ac} \delta^{(4)}(x_1 - x) S_{F,cd}(x-y) \eta_d(y) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 &= \left[ i \int d^4y S_{F,ad}(x_1 - y) \eta_d(y) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta]
 \end{aligned}$$

# 自由理论的两点关联函数



求二阶泛函导数，得

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_a(x_1)} \frac{\delta}{-i\delta\eta_b(x_2)} Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 = & \left[ \int d^4x \delta_{ac} \delta^{(4)}(x_1 - x) S_{F,cb}(x - x_2) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 & - \left[ i \int d^4x \bar{\eta}_c(x) S_{F,cb}(x - x_2) \right] \left[ i \int d^4y S_{F,ad}(x_1 - y) \eta_d(y) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 = & S_{F,ab}(x_1 - x_2) Z_0[\bar{\eta}, \eta] \\
 & + \left[ i \int d^4y S_{F,ad}(x_1 - y) \eta_d(y) \right] \left[ i \int d^4x \bar{\eta}_c(x) S_{F,cb}(x - x_2) \right] Z_0[\bar{\eta}, \eta]
 \end{aligned}$$



自由 Dirac 旋量场理论中的**两点关联函数**为


$$\langle 0 | T[\psi_a^H(x_1) \bar{\psi}_b^H(x_2)] | 0 \rangle_{\text{free}} = \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_a(x_1)} \frac{\delta}{-i\delta\eta_b(x_2)} Z_0[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = S_{F,ab}(x_1 - x_2)$$



它等于 **Feynman 传播子**，这与**正则量子化方法**的结论相同

## 11.3.3 小节 Yukawa 理论

 本小节讨论**路径积分方法**对**旋量场相互作用**的处理方式

 以 **Yukawa 理论**为例, 设**实标量场**  $\phi(x)$  和 **Dirac 旋量场**  $\psi(x)$  构成的**拉氏量**为


$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \kappa \phi \bar{\psi} \psi$$

 其中**拉氏量**的**自由部分**是

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_\psi \bar{\psi} \psi$$

 利用**泛函导数**, 将**多点关联函数的生成泛函**表达为


$$\begin{aligned} & Z[J, \bar{\eta}, \eta] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int_x (\mathcal{L} + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( -i\kappa \int_x \frac{\delta}{i\delta J_x} \frac{\delta}{-i\delta \eta_x} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_x} \right) \exp \left[ i \int_x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\ &= \tilde{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -i\kappa \int_x \frac{\delta}{i\delta J_x} \frac{\delta}{-i\delta \eta_x} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_x} \right)^n Z_0[J, \bar{\eta}, \eta] \end{aligned}$$


 其中  $\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$ ,  $\eta_x \equiv \eta(x)$ ,  $\bar{\eta}_x \equiv \bar{\eta}(x)$

# 自由生成泛函和外源 Feynman 规则

 自由理论的生成泛函表达为

$$\begin{aligned}
 Z_0[J, \bar{\eta}, \eta] &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int_x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\
 &= \exp \left[ - \int_{x,y} \left( \frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + \bar{\eta}_x S_{xy} \eta_y \right) \right] \\
 &= \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right)
 \end{aligned}$$

 其中  $S_{xy} \equiv S_F(x-y)$ ，第三步改用 Feynman 图表示

 实标量场外源的 Feynman 规则与  $\phi^4$  理论相同，即  $J \circ \text{---} = i \int d^4x J(x)$

 Dirac 旋量场的外源  $\eta$  和  $\bar{\eta}$  的 Feynman 规则分别是

$$\eta \circ \text{---} = i \int d^4x \eta(x), \quad \text{---} \circ \bar{\eta} = i \int d^4x \bar{\eta}(x)$$

# 泛函求导的 Feynman 图表示



Feynman 传播子和 Yukawa 相互作用顶点采用原先的位置空间 Feynman 规则：

$$x \bullet \text{---} \bullet y = D_F(x-y), \quad y \bullet \text{---} \bullet x = S_F(x-y), \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = -i\kappa \int d^4x$$



从而，用 Feynman 图将

$$\frac{\delta}{-i \delta \eta_b(x_2)} Z_0[0, \bar{\eta}, \eta] = \left[ i \int d^4x \bar{\eta}_c(x) S_{F,cb}(x-x_2) \right] Z_0[0, \bar{\eta}, \eta]$$

$$\frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_a(x_1)} Z_0[0, \bar{\eta}, \eta] = \left[ i \int d^4y S_{F,ad}(x_1-y) \eta_d(y) \right] Z_0[0, \bar{\eta}, \eta]$$

表示成

$$\frac{\delta}{-i \delta \eta_2} \exp \left( \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right) = (x_2 \bullet \text{---} \circ \bar{\eta}) \exp \left( \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right)$$

$$\frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_1} \exp \left( \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right) = (\eta \circ \text{---} \bullet x_1) \exp \left( \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right)$$



其中  $\eta_i \equiv \eta(x_i)$ ,  $\bar{\eta}_i \equiv \bar{\eta}(x_i)$

# Feynman 图泛函求导法则

 用 Feynman 图将

$$\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_a(x_1)} \frac{\delta}{-i\delta\eta_b(x_2)} Z_0[0, \bar{\eta}, \eta] = S_{F,ab}(x_1 - x_2) Z_0[0, \bar{\eta}, \eta]$$

$$+ \left[ i \int d^4y S_{F,ad}(x_1 - y) \eta_d(y) \right] \left[ i \int d^4x \bar{\eta}_c(x) S_{F,cb}(x - x_2) \right] Z_0[0, \bar{\eta}, \eta]$$

表示成

$$\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_1} \frac{\delta}{-i\delta\eta_2} \exp\left(\eta \circ \longrightarrow \circ \bar{\eta}\right)$$

$$= \left( x_2 \bullet \longrightarrow \bullet x_1 + \begin{array}{c} \eta \circ \longrightarrow \bullet x_1 \\ x_2 \bullet \longrightarrow \circ \bar{\eta} \end{array} \right) \exp\left(\eta \circ \longrightarrow \circ \bar{\eta}\right)$$

 根据 11.2.4 小节中的 **Feynman 图泛函求导法则**，用  $\frac{\delta}{i\delta J(x)}$  求泛函导数相当于


将 Feynman 图中的一个**外源**  $J$  换成时空点  $x$ 。类似地，以上结果表明，

- 用  $\frac{\delta}{-i\delta\eta(x)}$  求泛函导数，相当于将 Feynman 图中一个**外源**  $\eta$  换成时空点  $x$
- 用  $\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)}$  求泛函导数，相当于将 Feynman 图中一个**外源**  $\bar{\eta}$  换成时空点  $x$

$\kappa^1$  阶展开式

 接下来计算生成泛函的微扰展开式。根据

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_x} \exp\left(J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta}\right) \\ &= (\eta \circ \text{---} \bullet x) \exp\left(J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta}\right) \\ &= \frac{\delta}{-i\delta\eta_x} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_x} \exp\left(J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta}\right) \\ &= \left( \left( \text{circle with arrow and dot } x \right) + \eta \circ \text{---} \bullet x \text{---} \circ \bar{\eta} \right) \exp\left(J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta}\right) \end{aligned}$$

 推出  $\kappa^1$  阶的展开式




$$\begin{aligned} & -i\kappa \int_x \frac{\delta}{i\delta J_x} \frac{\delta}{-i\delta\eta_x} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_x} \exp\left(J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta}\right) \\ &= \left( \left( \text{circle with arrow and dot } x \right) \text{---} \circ J + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \\ \circ \text{---} \\ \eta \circ \text{---} \end{array} \bullet x \text{---} \circ J \right) \exp\left(J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta}\right) \end{aligned}$$

# 进一步求导

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_y} \left[ -i\kappa \int_x \frac{\delta}{i\delta J_x} \frac{\delta}{-i\delta\eta_x} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_x} \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right) \right] \\
 &= \left( \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet y \\ \circlearrowleft [x] \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet y \\ \bullet x \text{---} \circ J \\ \bullet y \end{array} + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet y \\ \eta \circ \text{---} \bullet x \\ \bar{\eta} \circ \text{---} \bullet x \end{array} \circ \text{---} \circ J \right) \\
 & \quad \times \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right) \\
 & \frac{\delta}{-i\delta\eta_y} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_y} \left[ -i\kappa \int_x \frac{\delta}{i\delta J_x} \frac{\delta}{-i\delta\eta_x} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_x} \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right) \right] \\
 &= \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft [y] \\ \circlearrowleft [x] \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet y \text{---} \circ \bar{\eta} \\ \circlearrowleft [x] \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} \circlearrowleft [y] \\ \bullet x \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet x \\ \bullet y \text{---} \circ \bar{\eta} \\ \bullet x \text{---} \circ J \end{array} \right) \\
 & \quad + \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft [y] \\ \eta \circ \text{---} \bullet x \\ \bar{\eta} \circ \text{---} \bullet x \end{array} \circ \text{---} \circ J + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet y \\ \bullet y \text{---} \circ \bar{\eta} \\ \bullet x \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} \eta \circ \text{---} \bullet y \text{---} \circ \bar{\eta} \\ \eta \circ \text{---} \bullet x \\ \bar{\eta} \circ \text{---} \bullet x \end{array} \circ \text{---} \circ J \right) \\
 & \quad \times \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$\kappa^2$  阶展开式

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\kappa}{2!} \int_y \frac{\delta}{i\delta J_y} \frac{\delta}{-i\delta\eta_y} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_y} \left[ -i\kappa \int_x \frac{\delta}{i\delta J_x} \frac{\delta}{-i\delta\eta_x} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_x} \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right) \right] \\
& = \left[ \begin{array}{l} \text{Diagram 1: } x \text{ and } y \text{ with self-loops and a dashed line between them.} \\ \text{Diagram 2: } y \text{ with a self-loop and a dashed line to } J, \text{ and } x \text{ with a self-loop and a dashed line to } J. \\ \text{Diagram 3: } x \text{ and } y \text{ with self-loops and a dashed line between them.} \\ \text{Diagram 4: } J \text{ with a dashed line to } y \text{ and } x \text{ with a self-loop and a dashed line to } J. \end{array} \right. \\
& + \left[ \begin{array}{l} \text{Diagram 5: } x \text{ and } y \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta} \text{ and a dashed line between them.} \\ \text{Diagram 6: } y \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta} \text{ and a dashed line to } J, \text{ and } x \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta} \text{ and a dashed line to } J. \end{array} \right. \\
& + \frac{1}{2!} \left( \begin{array}{l} \text{Diagram 7: } x \text{ with a self-loop and a dashed line to } y, \text{ and } y \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta}. \\ \text{Diagram 8: } y \text{ with a self-loop and a dashed line to } x, \text{ and } x \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta}. \\ \text{Diagram 9: } x \text{ and } y \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta} \text{ and a dashed line between them.} \\ \text{Diagram 10: } x \text{ and } y \text{ with external lines } \eta, \bar{\eta} \text{ and a dashed line between them.} \end{array} \right) \\
& \times \exp \left( J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} \right)
\end{aligned}$$

  对称性因子为 2，对应于 1/2! 因子  
 成对出现的 Feynman 图具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，合为一项后抵消 1/2! 因子


# 展开到 $\kappa^2$ 阶的生成泛函

于是，将生成泛函展开到  $\kappa^2$  阶的结果为

$$\begin{aligned}
 & Z[J, \bar{\eta}, \eta] \\
 = & \left[ 1 + \text{bubble}(x) \text{---} J + \text{triangle}(\eta, \bar{\eta}, x) \text{---} J \right. \\
 & + \text{bubble}(y) \text{---} J + \text{bubble}(x) \text{---} J + J \text{---} \text{bubble}(y, x) \text{---} J + \text{box}(\eta, \bar{\eta}, x, y) + \text{triangle}(\eta, \bar{\eta}, y) \text{---} J \\
 & + \text{triangle}(\eta, \bar{\eta}, x) \text{---} J + \text{triangle}(\eta, \bar{\eta}, y) \text{---} J + \text{triangle}(\eta, \bar{\eta}, x) \text{---} J + \text{triangle}(\eta, \bar{\eta}, y) \text{---} J \\
 & \left. + \mathcal{O}(\kappa^3) \right] \exp(J \text{---} J + \eta \text{---} \bar{\eta})
 \end{aligned}$$


其中所有的气泡图已被  $\tilde{\mathcal{N}}$  所抵消

# 连通关联函数的生成泛函


 利用  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ ，推出连通关联函数的生成泛函

$$iW[J, \bar{\eta}, \eta] = \ln Z[J, \bar{\eta}, \eta]$$

$$\begin{aligned}
 &= J \circ \text{---} \circ J + \eta \circ \text{---} \circ \bar{\eta} + \text{---} \circ x \text{---} \circ J + \text{---} \circ x \text{---} \circ \bar{\eta} \\
 &+ J \circ \text{---} \circ y \text{---} \circ x \text{---} \circ J + \text{---} \circ x \text{---} \circ y \text{---} \circ \bar{\eta} + \text{---} \circ x \text{---} \circ y \text{---} \circ \bar{\eta} \\
 &+ \eta \circ \text{---} \circ x \text{---} \circ y \text{---} \circ \bar{\eta} + \text{---} \circ x \text{---} \circ y \text{---} \circ J + \text{---} \circ y \text{---} \circ \bar{\eta} + \text{---} \circ x \text{---} \circ y \text{---} \circ J + \text{---} \circ y \text{---} \circ \bar{\eta} \\
 &+ \mathcal{O}(\kappa^3)
 \end{aligned}$$

 上式只包含完全连通图；实际上，可以用顶点、外源、传播子的图形元素作适当拼接来得到这些 Feynman 图

# 实标量场的单点函数和两点连通关联函数

 实标量场的真空期待值  $\langle 0 | \phi^H(x_1) | 0 \rangle$  称为单点函数，它仅涉及一个外点，因而只能包含完全连通图。实标量场的单点函数为

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi^H(x_1) | 0 \rangle &= \frac{\delta}{i \delta J_1} (iW[J, \bar{\eta}, \eta]) \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} = \frac{\delta}{i \delta J_1} \left( \text{Diagram: a circle with a dot at } x \text{ and a dashed line to } J \right) + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \text{Diagram: a circle with a dot at } x \text{ and a dashed line to } x_1 + \mathcal{O}(\kappa^3) \end{aligned}$$

 用下标  $c$  代表关联函数中的完全连通部分，则实标量场的两点连通关联函数为

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)] | 0 \rangle_c &= \frac{\delta}{i \delta J_1} \frac{\delta}{i \delta J_2} (iW[J, \bar{\eta}, \eta]) \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \\ &= \frac{\delta}{i \delta J_1} \frac{\delta}{i \delta J_2} \left( \text{Diagram: } J \text{---} J + \text{Diagram: } J \text{---} \text{circle with dots } y, x \text{---} J \right) + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \text{Diagram: } x_1 \text{---} x_2 + \text{Diagram: } x_1 \text{---} \text{circle with dots } y, x \text{---} x_2 + \mathcal{O}(\kappa^3) \end{aligned}$$

 上式是实标量场的完整传播子

## Dirac 旋量场的两点连通关联函数

 Dirac 旋量场的两点连通关联函数为

$$\langle 0 | T[\psi^H(x_1) \bar{\psi}^H(x_2)] | 0 \rangle_c = \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_1} \frac{\delta}{-i \delta \eta_2} (iW[J, \bar{\eta}, \eta]) \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}_1} \frac{\delta}{-i \delta \eta_2} \left( \eta \circ \longrightarrow \circ \bar{\eta} + \begin{array}{c} \text{loop at } x \\ \eta \circ \longrightarrow \bullet \text{---} \bullet \longrightarrow \circ \bar{\eta} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad x \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop at } y \\ \eta \circ \longrightarrow \bullet \text{---} \bullet \longrightarrow \circ \bar{\eta} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad y \end{array} \right) + \mathcal{O}(\kappa^3)$$

$$= x_2 \bullet \longrightarrow \bullet x_1 + \begin{array}{c} \text{loop at } x \\ x_2 \bullet \longrightarrow \bullet \text{---} \bullet \longrightarrow \bullet x_1 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad x \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop at } y \\ x_2 \bullet \longrightarrow \bullet \text{---} \bullet \longrightarrow \bullet x_1 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad y \end{array} + \mathcal{O}(\kappa^3)$$

 上式是 Dirac 旋量场的完整传播子

# 三点连通关联函数

关于  $\phi(x_1)$ 、 $\psi(x_2)$  和  $\bar{\psi}(x_3)$  的三点连通关联函数为

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\psi^H(x_2)\bar{\psi}^H(x_3)] | 0 \rangle_c &= \frac{\delta}{i\delta J_1} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_2} \frac{\delta}{-i\delta\eta_3} (iW[J, \bar{\eta}, \eta]) \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \\ &= \frac{\delta}{i\delta J_1} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_2} \frac{\delta}{-i\delta\eta_3} \left( \begin{array}{c} \eta \\ \circ \searrow \\ \bullet \text{---} \circ J \\ \nearrow \circ \\ \bar{\eta} \end{array} \right) + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \begin{array}{c} x_3 \\ \bullet \searrow \\ \bullet \text{---} \bullet x_1 + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ \nearrow \bullet \\ x_2 \end{array} \end{aligned}$$

它通过 LSZ 约化公式联系着  $\phi \rightarrow \psi\bar{\psi}$  衰变过程和  $\psi\bar{\psi} \rightarrow \phi$  融合过程



# 四点关联函数与散射过程

$$\langle 0 | T[\psi^H(x_1)\bar{\psi}^H(x_2)\bar{\psi}^H(x_3)\psi^H(x_4)] | 0 \rangle_c$$

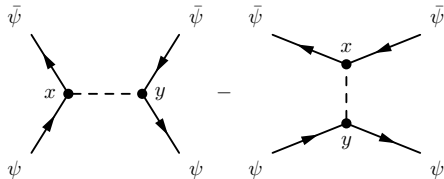
$$= - \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \mathcal{O}(\kappa^3)$$

可以看到， $\kappa^2$  阶两幅拓扑不等价的 Feynman 图之间**相对符号为负**

根据 10.3 节中写出来的 **LSZ 约化公式**，可以将这个四点关联函数转化为**散射过程**  $\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi\bar{\psi}$  的 **T 矩阵元**


从而，这个散射过程的两幅拓扑不等价的 Feynman 图之间**相对符号为负**

这个结果与 7.1.2 小节利用**正则量子化方法**得到的结果**一致**




此外，也可通过 **LSZ 约化公式**将这个关联函数转化为散射过程  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$  和  $\bar{\psi}\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\bar{\psi}$  的 **T 矩阵元**；实际上，以上三个散射过程彼此之间具有**交叉对称性**

## 另一种四点连通关联函数

 关于  $\phi(x_1)$ 、 $\phi(x_2)$ 、 $\psi(x_3)$  和  $\bar{\psi}(x_4)$  的**四点连通关联函数**为

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\psi^H(x_3)\bar{\psi}^H(x_4)] | 0 \rangle_c &= \frac{\delta}{i\delta J_1} \frac{\delta}{i\delta J_2} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_3} \frac{\delta}{-i\delta \eta_4} (iW[J, \bar{\eta}, \eta]) \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \\ &= \frac{\delta}{i\delta J_1} \frac{\delta}{i\delta J_2} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_3} \frac{\delta}{-i\delta \eta_4} \left( \begin{array}{c} \eta \\ \circ \quad \nearrow \quad x \\ \quad \quad \downarrow \quad y \\ \bar{\eta} \quad \circ \quad \nwarrow \quad J \end{array} \right) + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \dots = (-i\kappa)^2 \int_{x,y} (S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y2}D_{x1} + S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y1}D_{x2}) + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \begin{array}{c} x_4 \quad \bullet \quad \nearrow \quad x \\ \quad \quad \downarrow \quad y \\ x_3 \quad \bullet \quad \nwarrow \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_4 \quad \bullet \quad \nearrow \quad x \\ \quad \quad \downarrow \quad y \\ x_3 \quad \bullet \quad \nwarrow \quad x_2 \end{array} + \mathcal{O}(\kappa^3) \end{aligned}$$

 它在  $\kappa^2$  阶包含两幅拓扑不等价的 Feynman 图，两者之间的**相对符号**为**正**

 利用 **LSZ 约化公式**，可以将这个关联函数转化为散射过程  $\psi\bar{\psi} \rightarrow \phi\phi$ 、 $\phi\phi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 、 $\psi\phi \rightarrow \psi\phi$  和  $\bar{\psi}\phi \rightarrow \bar{\psi}\phi$  的 **T 矩阵元**