

# 量子场论

## 第 11 章 路径积分量子化

### 11.2 节 标量场的路径积分量子化 (下)

余钊焕


中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>


更新日期: 2026 年 4 月 26 日



## 11.2.4 小节 微扰展开和 Feynman 图

 本小节讨论**相互作用理论**的微扰展开。以**实标量场**的  $\phi^4$  理论为例，**拉氏量**为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$


 由泛函导数公式  $\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[ i \int d^4 y J(y)\phi(y) \right] = i\phi(x) \exp \left[ i \int d^4 y J(y)\phi(y) \right]$

 将**生成泛函**表达成


$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4 x \left[ \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi \right] \right\} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 x \left[ \frac{\delta}{i\delta J(x)} \right]^4 \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \int d^4 x \left[ \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \right] \right\} \\ &= \tilde{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 x \left[ \frac{\delta}{i\delta J(x)} \right]^4 \right\} Z_0[J] \end{aligned}$$

 其中  $\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$ ，而  $Z_0[J]$  是**自由理论**的**生成泛函**

# 一阶泛函导数

 前面已推出


$$Z_0[J] = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right)$$

 这里采用以下缩写记号：

$$\int_{x,y} \equiv \int d^4x d^4y, \quad J_x \equiv J(x), \quad D_{xy} \equiv D_F(x-y) = D_F(y-x) = D_{yx}$$

 对生成泛函求一阶泛函导数，得

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{i\delta J_x} Z_0[J] &= \frac{\delta}{i\delta J_x} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z,y} J_z D_{zy} J_y\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z,y} J_z D_{zy} J_y\right) \left(-\frac{1}{2i} \int_{z,y} \delta_{xz} D_{zy} J_y - \frac{1}{2i} \int_{z,y} J_z D_{zy} \delta_{xy}\right) \\ &= Z_0[J] \left(\frac{i}{2} \int_y D_{xy} J_y + \frac{i}{2} \int_z J_z D_{zx}\right) = \left(i \int_y D_{xy} J_y\right) Z_0[J] \end{aligned}$$

 其中  $\delta_{xy} \equiv \delta^{(4)}(x-y)$  是四维  $\delta$  函数的缩写记号

# 高阶泛函导数

 求二阶泛函导数，推出

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J_x}\right)^2 Z_0[J] = \left[ D_{xx} + \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 \right] Z_0[J]$$

 求三阶泛函导数，有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{i\delta J_x}\right)^3 Z_0[J] &= \left[ D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right) + 2 \left( i \int_y D_{xy} J_y \right) D_{xx} + \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^3 \right] Z_0[J] \\ &= \left[ 3D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right) + \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^3 \right] Z_0[J] \end{aligned}$$

 求四阶泛函导数，得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{i\delta J_x}\right)^4 Z_0[J] &= \left[ 3(D_{xx})^2 + 3D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 + 3 \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 D_{xx} \right. \\ &\quad \left. + \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^4 \right] Z_0[J] \\ &= \left[ 3(D_{xx})^2 + 6D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 + \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^4 \right] Z_0[J] \end{aligned}$$

## Feynman 图

👤 于是，生成泛函作微扰展开至  $\lambda^1$  阶的结果为

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \tilde{\mathcal{N}} \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int_x \left( \frac{\delta}{i\delta J_x} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] Z_0[J] \\
 &= \tilde{\mathcal{N}} \left\{ 1 - i\lambda \int_x \left[ \frac{1}{8} (D_{xx})^2 + \frac{1}{4} D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 + \frac{1}{24} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^4 \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} Z_0[J] \\
 &= \tilde{\mathcal{N}} \left[ 1 + \text{loop} + \text{tadpole} + \text{cross} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \\
 &\quad \times \exp \left( J \text{---} \circ J \right)
 \end{aligned}$$

🛍️ 用小圆圈表示外源  $J(x)$ ，并引入它的 Feynman 规则

$$J \text{---} \circ = i \int d^4x J(x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{cross} &= -i\lambda \int d^4x \\
 x \text{---} \bullet \text{---} \bullet y &= D_F(x-y)
 \end{aligned}$$

👤 顶点和 Feynman 传播子则直接采用原先的位置空间 Feynman 规则

## 对称性因子

$$-i\lambda \int_x \left[ \frac{1}{8} (D_{xx})^2 + \frac{1}{4} D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 + \frac{1}{24} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^4 \right]$$

🧢 第一幅图是气泡图，它的对称性因子是 8

🕶️ 在第二幅图中，两端连接同一顶点的内线贡献的对称性因子为 2

👕 对外源  $J(x)$  的全时空积分意味着第二幅图中用两个小圆圈表示的外源是全同的，因此从顶点连接到小圆圈上的两条内线也是全同的，贡献的对称性因子是 2

👖 最终第二幅图的对称性因子为  $2 \cdot 2 = 4$

👜 在第三幅图中，从顶点连接到小圆圈上的四条内线是全同，对称性因子为  $4! = 24$

👟 这些对称性因子恰好解释了分数因子  $1/8$ 、 $1/4$  和  $1/24$

# $Z_0[J]$ 的 Feynman 图表示

🕶️ 前面还用到  $Z_0[J]$  的 Feynman 图表示

$$Z_0[J] = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right) = \exp\left(J \circ \text{---} \circ J\right)$$

👔 其中指数上 Feynman 图的对称性因子是 2

🧤 相应地,  $\frac{\delta}{i\delta J_x} Z_0[J] = \left(i \int_y D_{xy} J_y\right) Z_0[J]$  表示为

$$\frac{\delta}{i\delta J_x} \exp\left(J \circ \text{---} \circ J\right) = \left(x \bullet \text{---} \circ J\right) \exp\left(J \circ \text{---} \circ J\right)$$

# 归一化常数与气泡图

🧠 注意到  $Z_0[0] = 1$ ,  $Z[J]$  的归一化条件给出

$$\begin{aligned}
 1 &= Z[0] = \tilde{\mathcal{N}} \left[ 1 - i\lambda \int_x \frac{1}{8} (D_{xx})^2 + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] Z_0[0] \\
 &= \tilde{\mathcal{N}} \left[ 1 + \text{bubble diagram} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right]
 \end{aligned}$$

💣 这里取外源  $J = 0$ , 使得与外源有关的 Feynman 图都不会出现, 导致上式方括号中能够出现的 Feynman 图都是气泡图

💣 考虑到微扰论中所有阶的贡献, 则上式大方括号中的项包含了所有的气泡图

💣 于是, 归一化常数满足

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{N}} &= \left[ 1 - i\lambda \int_x \frac{1}{8} (D_{xx})^2 + \mathcal{O}(\lambda^2) \right]^{-1} = 1 + i\lambda \int_x \frac{1}{8} (D_{xx})^2 + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 &= 1 - \text{bubble diagram} + \mathcal{O}(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

## 生成泛函与连通图

🎓 将归一化常数  $\tilde{\mathcal{N}}$  的表达式代入生成泛函，得

$$Z[J] = \left\{ 1 - i\lambda \int_x \left[ \frac{1}{4} D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 + \frac{1}{24} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^4 \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} Z_0[J]$$

$$= \left[ 1 + \begin{array}{c} \text{bubble diagram} \\ \text{cross diagram} \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \exp \left( J \circ \text{---} \circ J \right)$$

🧐 实际上， $Z[J]$  中所有的气泡图都被  $\tilde{\mathcal{N}}$  抵消掉了

📖 因此，上式中剩下的 Feynman 图都属于连通图，它们将外源连接起来，但不包含气泡图

## 两点关联函数和缩写记号

🍪 接下来借助生成泛函计算两点关联函数和四点关联函数

🍪 两点关联函数表达为

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)] | 0 \rangle = \left. \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \right|_{J=0}$$

🍪 这里进一步采用以下缩写记号：

$$J_i \equiv J(x_i)$$

$$D_{ix} \equiv D_F(x_i - x) = D_F(x - x_i) \equiv D_{xi}$$

$$D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j) = D_{ji}$$

## 一阶泛函导数

 对生成泛函求一阶泛函导数，得


$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta}{i\delta J_1} Z[J] \\
 = & \left\{ i \int_y D_{1y} J_y - i\lambda \int_x \left[ \frac{1}{2} D_{xx} D_{x1} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right) + \frac{1}{4} D_{xx} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 \left( i \int_y D_{1y} J_y \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{6} D_{x1} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^3 + \mathcal{O}(J^4) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} Z_0[J] \\
 = & \left\{ x_1 \bullet \text{---} \circ J + \left[ \begin{array}{c} \text{---} \circ J \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \circ x \text{---} \circ J \\ | \\ \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \bullet \text{---} \circ J \\ | \\ J \text{---} \circ x \text{---} \circ J \\ | \\ J \text{---} \circ x \text{---} \circ J \end{array} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \begin{array}{c} J \text{---} \circ J \\ | \\ J \text{---} \circ x \text{---} \circ J \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \circ J \end{array} + \mathcal{O}(J^4) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} \exp \left( J \text{---} \circ J \right)
 \end{aligned}$$


 上式方括号中的  $\mathcal{O}(J^4)$  包含具有 4 个及更多个外源  $J$  因子的项，它们与接下来的讨论无关，因而没有显明写出来


## Feynman 图的泛函求导法则

 观察以上计算过程，可以归纳出 **Feynman 图泛函求导法则**：


用  $\frac{\delta}{i\delta J(x)}$  求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个**外源**  $J$  换成**时空点**  $x$


 这里的**时空点**  $x$  要么对应于**外点**，要么对应于**顶点**

 如果一个 Feynman 图具有**对称性因子**  $s$  和  $n$  个**全同外源**  $J$ ，则**外源**对  $s$  贡献的因子是  $n!$ ，而相应代数表达式中包含一个  $1/s$  **因子**

 **求一次泛函导数**之后，Feynman 图只剩下  $n - 1$  个**全同外源**  $J$ ，它们对对称性因子的贡献是  $(n - 1)!$ ，因而**对称性因子**变成  $s/n$

 求泛函导数时每个  $J$  的**贡献相同**，由**乘积法则**给出  $n$  个**相同**的 Feynman 图之和

 将这些 Feynman 图合并，给出一个**因子**  $n$ ，它使代数表达式中的因子变成  $n/s$ ，而这正是求导后 Feynman 图的**对称性因子**的**倒数**

 因此，**求导**后的每幅 Feynman 图上都不需要乘以额外的数值因子

## 二阶泛函导数

🍪 再求一次泛函导数，得

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} &= \frac{\delta}{i \delta J_2} \left( \frac{\delta}{i \delta J_1} Z[J] \right) \\
 &= \left\{ D_{12} + \left( i \int_y D_{1y} J_y \right) \left( i \int_y D_{2y} J_y \right) \right. \\
 &\quad - i \lambda \int_x \left[ \frac{1}{2} D_{xx} D_{x1} D_{x2} + \frac{1}{2} D_{xx} D_{x1} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right) \left( i \int_y D_{2y} J_y \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} D_{xx} D_{x2} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right) \left( i \int_y D_{1y} J_y \right) + \frac{1}{4} D_{xx} D_{12} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} D_{x1} D_{x2} \left( i \int_y D_{xy} J_y \right)^2 + \mathcal{O}(J^3) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} Z_0[J]
 \end{aligned}$$



# $\lambda^1$ 阶的两点关联函数

🍷 取外源  $J = 0$ ，得到两点关联函数展开至  $\lambda^1$  阶的结果

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \Big|_{J=0} = D_{12} - \frac{i\lambda}{2} \int_x D_{xx} D_{x1} D_{x2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$= x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 + \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} x + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

🔍 这个结果与 10.5.1 小节中利用正则量子化方法得到的结果一致

🍷 注意，此处并没有将拉氏量中的裸质量参数分解为物理质量参数和质量重整化常数  $\delta m^2$  之和，因而没有出现  $\delta m^2$  贡献的两点关联函数

## 三阶泛函导数


现在，利用 **Feynman 图泛函求导法则求泛函导数**，推出

$$\frac{1}{i^3} \frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} x_3 \bullet \text{---} \circ J & x_2 \bullet \text{---} \circ J & x_2 \bullet \text{---} \bullet x_3 \\ x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \circ J \end{array} \\ + \left[ \begin{array}{ccc} x_3 \bullet \text{---} \circ J & x_2 \bullet \text{---} \circ J & x_2 \bullet \text{---} \bullet x_3 \\ x_1 \bullet \text{---} \bullet x & x_1 \bullet \text{---} \bullet x & x_1 \bullet \text{---} \circ J \end{array} \right. \\ \quad \begin{array}{ccc} x_1 \bullet \text{---} \circ J & x_1 \bullet \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 \\ x_2 \bullet \text{---} \bullet x & x_2 \bullet \text{---} \circ J & x_3 \bullet \text{---} \bullet x \end{array} \\ \quad \left. + \begin{array}{ccc} x_3 \bullet & \bullet & J \\ & x & \\ x_1 \bullet & \bullet & x_2 \end{array} \right] + \mathcal{O}(J^2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \Big\} \exp \left( J \circ \text{---} \circ J \right)$$


方括号里面的  $\mathcal{O}(J^2)$  包含具有 **2 个及更多个  $J$  因子**的项

# $\lambda^1$ 阶的四点关联函数


 再求一次泛函导数，取  $J = 0$ ，得到四点关联函数展开至  $\lambda^1$  阶的结果


$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{i^4} \left. \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4} \right|_{J=0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{ccc}
 x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\
 x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4
 \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

 这个结果与 10.5.2 小节中利用正则量子化方法得到的结果一致

# 正则量子化与路径积分量子化

 可见，从正则量子化和路径积分量子化导出来的 Feynman 图方法是一样的，Feynman 规则也相同

 这样的 Feynman 图方法可直接应用于多点关联函数、 $T$  矩阵元和不变振幅  $i\mathcal{M}$  的计算

## 11.2.5 小节 连通关联函数

前面给出的**四点关联函数** Feynman 图都是**连通图**，但其中只有最后一行的 Feynman 图是**完全连通图**，它将所有外点都**彼此**连接起来，即保证任意两个外点都是相连的；其它连通图都**不是**完全连通的，称为**非完全连通图**

根据 10.5.2 小节的讨论，只有**完全连通图**才会贡献到散射过程的  $T$  矩阵元


因此，真正与**散射过程**相关的是**关联函数**中与**完全连通图**对应的部分，这部分称为**连通关联函数** (connected correlation function)，也称为**连通 Green 函数**


将实标量场  $\phi^4$  理论的  $n$  点**连通关联函数**记作  $G_c^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$


**四点连通关联函数**表达为

$$G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_3 \quad \bullet \quad x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_1 \quad \bullet \quad x_2 \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$


# 生成泛函与非完全连通图

 对于多点关联函数的生成泛函  $Z[J]$  来说，完全连通图指的是将所有外源都彼此连接在一起的图

 当  $n \geq 4$  时， $n$  点关联函数中出现很多非完全连通图，根源在于其生成泛函  $Z[J]$  中就包含了很多非完全连通图

 将自由生成泛函的 Feynman 图表示式展开，有

$$\begin{aligned}
 Z_0[J] &= \exp\left(J \circ \text{---} \circ J\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right)^k \\
 &= 1 + J \circ \text{---} \circ J + \frac{J \circ \text{---} \circ J \quad J \circ \text{---} \circ J}{J \circ \text{---} \circ J \quad J \circ \text{---} \circ J} + \dots
 \end{aligned}$$

 注意，在  $k$  阶的 Feynman 图中，存在  $k$  个不相连的全同子图，它们贡献一个对称性因子  $k!$ ，这恰好解释了第三步通项中的分数因子  $1/k!$


# 生成泛函中的非完全连通图

**中** 从而，生成泛函展开为

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \left[ 1 + \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] Z_0[J] \\
 &= 1 + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \dots
 \end{aligned}$$

The diagrams in the expansion are:
 

- Diagram 1: A vertex  $x$  with two external legs labeled  $J$  and a dashed loop attached to the vertex.
- Diagram 2: A vertex  $x$  with four external legs labeled  $J$ , arranged in a cross shape.
- Diagram 3: Two separate vertices, each with two external legs labeled  $J$ .
- Diagram 4: Two separate vertices, each with two external legs labeled  $J$ .
- Diagram 5: A vertex  $x$  with two external legs labeled  $J$  and a dashed loop attached to the vertex.
- Diagram 6: A vertex  $x$  with two external legs labeled  $J$  and a dashed loop attached to the vertex.
- Diagram 7: A vertex  $x$  with two external legs labeled  $J$  and a dashed loop attached to the vertex.
- Diagram 8: A vertex  $x$  with four external legs labeled  $J$ , arranged in a cross shape.
- Diagram 9: A vertex  $x$  with four external legs labeled  $J$ , arranged in a cross shape.

 可见， $Z[J]$  的展开式中包含了大量非完全连通图，利用 Feynman 图泛函求导法则计算  $n \geq 4$  时的  $n$  点关联函数，就会得到很多非完全连通图

# 连通图的分解

♣ 由于任意一个**非完全连通图**可以分解为若干个**完全连通图**的乘积，**生成泛函**  $Z[J]$  中任意一个**连通 Feynman 图**  $D_{\{n_i\}}$  可以表达为

$$D_{\{n_i\}} = \frac{1}{s_D} \prod_i (C_i)^{n_i}$$

♠ 其中  $C_i$  代表一种**完全连通图**，而  $D_{\{n_i\}}$  中  $C_i$  的**数量**为  $n_i$

♥  $\prod_i$  则将  $D$  中所有种类的完全连通图都乘起来

♣ **完全连通图**  $C_i$  已经包含了相应的**对称性因子**，而  $s_D$  代表  $D_{\{n_i\}}$  中**额外的对称性因子**

♦ 由于  $n_i$  个**全同的完全连通图**  $C_i$  贡献的对称性因子为  $n_i!$ ，有  $s_D = \prod_i n_i!$


♣ 这里，我们用所有  $n_i$  的集合  $\{n_i\} = \{n_1, n_2, \dots\}$  作为下标来标记**连通 Feynman 图**  $D_{\{n_i\}}$ ；当所有  $n_i$  都等于 0 时， $D_{\{n_i\}} = 1$

# $Z[J]$ 与 $W[J]$

 生成泛函  $Z[J]$  是由所有的  $D_{\{n_i\}}$  组成的，表达为

$$Z[J] = \sum_{\{n_i\}} D_{\{n_i\}} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i \frac{(C_i)^{n_i}}{n_i!} = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{(C_i)^{n_i}}{n_i!} = \prod_i \exp(C_i) = \exp\left(\sum_i C_i\right)$$

 其中第三步利用乘法分配律交换了求和与连乘的次序

 将上式改写为

$$Z[J] = \exp(iW[J])$$

 其中

$$W[J] \equiv \frac{1}{i} \sum_i C_i$$

包含了所有的完全连通图

# $iW[J]$ 的 Feynman 图展开式

🌲 根据  $Z[J] = \exp(iW[J])$ ，有

$$iW[J] = \ln Z[J]$$

$$= \ln \exp \left( J \circ \text{---} \circ J \right) + \ln \left[ 1 + \begin{array}{c} \text{---} \circ J \\ | \\ \text{---} \circ x \\ | \\ \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} J \circ \text{---} \circ J \\ | \quad | \\ \text{---} \circ x \\ | \quad | \\ J \circ \text{---} \circ J \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right]$$

$$= J \circ \text{---} \circ J + \begin{array}{c} \text{---} \circ J \\ | \\ \text{---} \circ x \\ | \\ \text{---} \circ J \end{array} + \begin{array}{c} J \circ \text{---} \circ J \\ | \quad | \\ \text{---} \circ x \\ | \quad | \\ J \circ \text{---} \circ J \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

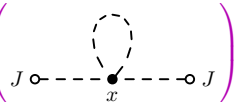
🏰 其中第二步用到**对数函数的 Taylor 展开式**

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

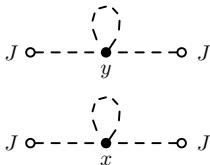
# 非完全连通图的抵消

🍊 从表面上看，对数函数展开式中的高阶项会给出非完全连通图，但是这些非完全连通图会彼此抵消，以保证  $iW[J]$  中只包含完全连通图

🐟 比如，上一页  $iW[J]$  展开式第三行第二幅 Feynman 图和对数函数展开式第二项  $-\frac{x^2}{2}$  贡献的


$$-\frac{1}{2} \left( \text{Feynman diagram with a loop} \right)^2$$


会跟  $\lambda^2$  阶 Feynman 图




相互抵消


# 连通关联函数的生成泛函

  $iW[J]$  只包含**完全连通图**，对它求  $n$  阶泛函导数并取  $J=0$ ，可以得到  $n$  点**连通关联函数**，即

$$G_c^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n (iW[J])}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

 取  $n=4$ ，就能够利用上式和  $iW[J]$  的 Feynman 图展开式推出

$$G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_3 \quad \bullet \quad x_4 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \quad x \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ x_1 \quad \bullet \quad x_2 \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

 于是，可以将  $iW[J]$  展开为

$$iW[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_n)$$

 因此，我们称  $W[J]$  为**连通关联函数的生成泛函**

## 11.2.6 小节 复标量场

 从现在开始，我们以**多点关联函数的生成泛函**为**出发点**来讨论**路径积分量子化**

 对于由**复标量场**  $\phi(x)$  构造的**拉氏量**  $\mathcal{L}(x)$ ，将**多点关联函数的生成泛函**定义为

$$Z[J^\dagger, J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J^\dagger(x)\phi(x) + \phi^\dagger(x)J(x)] \right\}$$

  $J^\dagger(x)$  和  $J(x)$  是**复的外源**，彼此互为**复共轭**，计算中应将它们当作**两个独立变量**

 生成泛函的**归一化条件**是  $Z[0, 0] = 1$

 由于上式右边的场和外源是**经典函数**， $\dagger$  **符号**实际上代表的是**复共轭**

 涉及  $n$  个  $\phi$  场和  $m$  个  $\phi^\dagger$  场的  $n+m$  **点关联函数**在**路径积分量子化**中表达为

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\phi^H(x_1) \cdots \phi^H(x_n) \phi^{H\dagger}(y_1) \cdots \phi^{H\dagger}(y_m)] | 0 \rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \phi^\dagger(y_1) \cdots \phi^\dagger(y_m) \exp(i \int d^4x \mathcal{L})}{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp(i \int d^4x \mathcal{L})} \\ &= \frac{1}{i^{n+m}} \frac{\delta^{n+m} Z[J^\dagger, J]}{\delta J^\dagger(x_1) \cdots \delta J^\dagger(x_n) \delta J(y_1) \cdots \delta J(y_m)} \Big|_{J^\dagger=J=0} \end{aligned}$$

# 自由复标量场

🏍️ 对于自由的复标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为

$$\mathcal{L}_0 = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

🐎 作 Wick 转动，得到四维 Euclid 空间中的拉氏量

$$\mathcal{L}_{0,E} = -(\partial_E^\mu \phi^\dagger) \partial_{E,\mu} \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$


🚚 以及生成泛函

$$Z_{0,E}[J^\dagger, J] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \left\{ - \int d^4 x_E [(\partial_E^\mu \phi^\dagger) \partial_{E,\mu} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi - J^\dagger \phi - \phi^\dagger J] \right\}$$

# 自由生成泛函的泛函 Gauss 积分形式

 对于四维 Euclid 空间上的复值函数  $f(x_E)$  和  $g(x_E)$ ，内积定义为


$$(f, g) \equiv \int d^4 x_E f^\dagger(x_E) g(x_E)$$

 自由生成泛函中涉及到的积分可化为

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_E [(\partial_{E,\mu}^\mu \phi^\dagger) \partial_{E,\mu} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi] \\ &= \int d^4 x_E d^4 y_E \phi^\dagger(x_E) [(\partial_{x_E,\mu}^\mu \partial_{y_E,\mu} + m^2) \delta^{(4)}(x_E - y_E)] \phi(y_E) = (\phi, B\phi) \end{aligned}$$

 其中


$$\begin{aligned} B(x_E, y_E) &\equiv (\partial_{x_E,\mu}^\mu \partial_{y_E,\mu} + m^2) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \\ (\phi, B\phi) &\equiv \int d^4 x_E d^4 y_E \phi^\dagger(x_E) B(x_E, y_E) \phi(y_E) \end{aligned}$$

 从而，将自由生成泛函改写为泛函 Gauss 积分的形式


$$Z_{0,E}[J^\dagger, J] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp[-(\phi, B\phi) + (J, \phi) + (\phi, J)]$$

# $N$ 维复值矢量空间


 考虑  $N$  维复值空间

  $N$  维复值列矢量  $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$  和  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$  的内积定义为

$$(v, u) \equiv v^\dagger u = v_i^* u_i$$


 将  $N$  阶复方阵  $A$  乘到列矢量  $u$  上, 得到列矢量  $Au$ , 它与  $v$  的内积是

$$(v, Au) = v^\dagger Au = v_i^* A_{ij} u_j$$

  $B$  是  $N$  阶正定厄米矩阵, 则  $B^\dagger = B$ , 且其本征值  $b_1, b_2, \dots, b_N$  都是正实数

 通过一个  $N$  阶幺正矩阵  $U$ , 可将  $B$  对角化, 得到对角矩阵

$$\tilde{B} = UBU^\dagger = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$$


 引入  $\tilde{v} \equiv Uv$ , 利用  $U^\dagger U = \mathbf{1}$  推出


$$(v, Bv) = v^\dagger Bv = v^\dagger U^\dagger UBU^\dagger Uv = \tilde{v}^\dagger \tilde{B} \tilde{v} = \sum_{i=1}^N b_i |\tilde{v}_i|^2$$


## 2N 维积分体积元

 考虑 **2N 维 Gauss 积分**  $\int d^N v d^N v^* \exp[-(v, Bv)]$


 其中  $d^N v = dv_1 dv_2 \cdots dv_N$ ,  $d^N v^* = dv_1^* dv_2^* \cdots dv_N^*$

 此处需要对各个复变量  $v_i$  和  $v_i^*$  的整个复平面进行积分


 将  $v_i$  分解为**实部**  $v_{R,i}$  和**虚部**  $v_{I,i}$ ,  $v_i \equiv v_{R,i} + i v_{I,i}$ , 则  $dv_i dv_i^* = |\mathcal{J}| dv_{R,i} dv_{I,i}$

 其中 **Jacobi 行列式**为  $\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial v_{R,i}} & \frac{\partial v_i}{\partial v_{I,i}} \\ \frac{\partial v_i^*}{\partial v_{R,i}} & \frac{\partial v_i^*}{\partial v_{I,i}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = 2i$

 故  $|\mathcal{J}| = 2$ , 于是  $dv_i dv_i^* = 2 dv_{R,i} dv_{I,i}$

 可见,  $\int dv_i dv_i^*$  相当于在  $v_i$  的复平面上积分两次, 这意味着

$$d^N v d^N v^* = \prod_{i=1}^N (dv_i dv_i^*) = \prod_{i=1}^N (2 dv_{R,i} dv_{I,i}) = 2^N d^N v_R d^N v_I$$


  $v_R = (v_{R,1}, v_{R,2}, \cdots, v_{R,N})^T$  和  $v_I = (v_{I,1}, v_{I,2}, \cdots, v_{I,N})^T$  是 **N 维实值列向量**


# 实正交变换


 将幺正矩阵  $U$  分解为  $U = V + iW$ ，其中  $V$  和  $W$  是两个  $N$  阶实方阵


  $U$  的幺正性意味着

$$\mathbf{1} = U^\dagger U = (V^T - iW^T)(V + iW) = V^T V + W^T W + i(V^T W - W^T V)$$

 故  $V^T V + W^T W = \mathbf{1}$ ， $V^T W - W^T V = \mathbf{0}$


 由于  $v = v_R + i v_I$ ，有  $\tilde{v}_R + i \tilde{v}_I \equiv \tilde{v} = U v = V v_R - W v_I + i(W v_R + V v_I)$

 上式等价于  $\begin{pmatrix} \tilde{v}_R \\ \tilde{v}_I \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} v_R \\ v_I \end{pmatrix}$ ，其中  $O \equiv \begin{pmatrix} V & -W \\ W & V \end{pmatrix}$

  $2N$  阶实方阵  $O$  满足

$$O^T O = \begin{pmatrix} V^T & W^T \\ -W^T & V^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & -W \\ W & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^T V + W^T W & -V^T W + W^T V \\ -W^T V + V^T W & W^T W + V^T V \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$


 可见， $O$  是实正交矩阵，满足  $|\det O| = 1$

 于是  $d^N \tilde{v} d^N \tilde{v}^* = 2^N d^N \tilde{v}_R d^N \tilde{v}_I = 2^N |\det O| d^N v_R d^N v_I = d^N v d^N v^*$

## 2N 维 Gauss 积分


 作变量替换  $v \rightarrow \tilde{v}$ ，将 2N 维 Gauss 积分化为

$$\begin{aligned}
 & \int d^N v d^N v^* \exp[-(v, Bv)] = \int d^N \tilde{v} d^N \tilde{v}^* \exp\left(-\sum_{i=1}^N b_i |\tilde{v}_i|^2\right) \\
 & = 2^N \int d^N \tilde{v}_R d^N \tilde{v}_I \exp\left[-\sum_{i=1}^N b_i (\tilde{v}_{R,i}^2 + \tilde{v}_{I,i}^2)\right] \\
 & = 2^N \left[ \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{R,i} \exp(-b_i \tilde{v}_{R,i}^2) \right] \left[ \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{I,i} \exp(-b_i \tilde{v}_{I,i}^2) \right] \\
 & = 2^N \left( \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{b_i}} \right) \left( \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{b_i}} \right) = \prod_{i=1}^N \frac{2\pi}{b_i}
 \end{aligned}$$

 其中第一步用到  $(v, Bv) = \sum_{i=1}^N b_i |\tilde{v}_i|^2$

 第四步用到一维 Gauss 积分公式  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-b\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$


## 2N 维 Gauss 积分公式及其变种

 再利用

$$\prod_{i=1}^N b_i = \det \tilde{B} = \det(UBU^\dagger) = \det(U^\dagger UB) = \det B$$

 推出 2N 维 Gauss 积分公式


$$\int d^N v d^N v^* \exp[-(v, Bv)] = \frac{(2\pi)^N}{\det B}$$

 这是 N 维 Gauss 积分公式  $\int d^N v \exp\left[-\frac{1}{2}(v, Bv)\right] = (2\pi)^{N/2} (\det B)^{-1/2}$   
在复数域上的推广

 讲义中进一步推出 2N 维 Gauss 积分公式的变种

$$\int d^N v d^N v^* \exp[-(v, Bv) + (u, v) + (v, u)] = \frac{(2\pi)^N}{\det B} \exp[(u, B^{-1}u)]$$

# 泛函 Gauss 积分公式

 推广  $2N$  维 Gauss 积分公式及其变种，得到**泛函 Gauss 积分公式**及其变种：


$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp[-(\phi, B\phi)] = (\det B)^{-1}$$

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp[-(\phi, B\phi) + (J, \phi) + (\phi, J)] = (\det B)^{-1} \exp[(J, B^{-1}J)]$$

 据此作出**自由生成泛函**中的泛函积分，得到

$$Z_{0,E}[J^\dagger, J] = \mathcal{N}_0 (\det B)^{-1} \exp \left[ \int d^4x_E d^4y_E J^\dagger(x_E) B^{-1}(x_E, y_E) J(y_E) \right]$$

 **归一化条件**  $Z_{0,E}[0, 0] = 1$  给出  $\mathcal{N}_0 = \det B$

 **连续方阵**  $B(x_E, y_E) = (\partial_{x_E}^\mu \partial_{y_E, \mu} + m^2) \delta^{(4)}(x_E - y_E)$  与**实标量场**情况相同

 因此，**四维 Euclid 空间**中**复标量场**的**Feynman 传播子**仍然表达为

$$D_F^E(x_E - y_E) \equiv B^{-1}(x_E, y_E) = \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + m^2} e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)}$$


# 复标量场的 Feynman 传播子

 转换到 Minkowski 时空，复标量场的 Feynman 传播子依然表达成


$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

 自由复标量场的生成泛函为

$$Z_0[J^\dagger, J] = \exp \left[ - \int d^4 x d^4 y J^\dagger(x) D_F(x-y) J(y) \right]$$

 自由复标量场理论中的两点关联函数为

$$\langle 0 | T[\phi^H(x) \phi^{H\dagger}(y)] | 0 \rangle_{\text{free}} = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[J^\dagger, J]}{\delta J^\dagger(x) \delta J(y)} \Big|_{J^\dagger=J=0} = D_F(x-y)$$

 它等于 Feynman 传播子，这与正则量子化方法的结论相同