

量子场论

第 11 章 路径积分量子化

11.2 节 标量场的路径积分量子化 (上)

余钊焕

中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>


更新日期: 2026 年 4 月 30 日



11.2 节 标量场的路径积分子化


11.2.1 小节 Feynman 核

 本节将**路径积分方法**推广到**标量场**的量子理论中


 考虑**实标量场** $\phi(x)$ 构成的系统，相应的**广义坐标**是每个空间点 x 处的**场** $\phi(x, t)$ ，因而系统具有**无穷多个连续的自由度**

 在 **Heisenberg 绘景**中将**哈密顿量算符**写成

$$H(\phi^H, \pi^H) = \int d^3x \mathcal{H}(\phi^H, \pi^H)$$


 其中 $\pi^H(x, t)$ 是**共轭动量密度**。参考 6.1.1 小节，假设**哈密顿量密度**的形式为

$$\mathcal{H}(\phi^H, \pi^H) = \frac{1}{2}(\pi^H)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi^H)^2 + V(\phi^H)$$

 $V(\phi^H)$ 是包含了实标量场**质量项**的**势能密度**


 比如，在 ϕ^4 理论中，有 $V(\phi^H) = \frac{1}{2} m^2(\phi^H)^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi^H)^4$

场构型和瞬时本征态


 转到 **Schrödinger 绘景**, $\phi^S(\mathbf{x}) = e^{-iHt} \phi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt}$, $\pi^S(\mathbf{x}) = e^{-iHt} \pi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt}$

 **哈密顿量密度**表达为


$$\mathcal{H}(\phi^S, \pi^S) = e^{-iHt} \mathcal{H}(\phi^H, \pi^H) e^{iHt} = \frac{1}{2} (\pi^S)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi^S)^2 + V(\phi^S)$$

 设**场算符** $\phi^S(\mathbf{x})$ 和**正则共轭场算符** $\pi^S(\mathbf{x})$ 的本征态为 $|\phi\rangle$ 和 $|\pi\rangle$, 满足**本征方程**

$$\phi^S(\mathbf{x}) |\phi\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi\rangle, \quad \pi^S(\mathbf{x}) |\pi\rangle = \pi(\mathbf{x}) |\pi\rangle$$


 其中本征值 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $\pi(\mathbf{x})$ 分别是 $|\phi\rangle$ 和 $|\pi\rangle$ 对应的**场构型** (field configuration, 即场的分布) 和**正则共轭场构型**

场构型和瞬时本征态


 转到 **Schrödinger 绘景**, $\phi^S(\mathbf{x}) = e^{-iHt} \phi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt}$, $\pi^S(\mathbf{x}) = e^{-iHt} \pi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt}$

 **哈密顿量密度**表达为

$$\mathcal{H}(\phi^S, \pi^S) = e^{-iHt} \mathcal{H}(\phi^H, \pi^H) e^{iHt} = \frac{1}{2} (\pi^S)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi^S)^2 + V(\phi^S)$$


 设**场算符** $\phi^S(\mathbf{x})$ 和**正则共轭场算符** $\pi^S(\mathbf{x})$ 的本征态为 $|\phi\rangle$ 和 $|\pi\rangle$, 满足**本征方程**

$$\phi^S(\mathbf{x}) |\phi\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi\rangle, \quad \pi^S(\mathbf{x}) |\pi\rangle = \pi(\mathbf{x}) |\pi\rangle$$

 其中本征值 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $\pi(\mathbf{x})$ 分别是 $|\phi\rangle$ 和 $|\pi\rangle$ 对应的**场构型** (field configuration, 即场的分布) 和**正则共轭场构型**

 引入 $|\phi, t\rangle \equiv e^{iHt} |\phi\rangle$, 则

$$\phi^H(\mathbf{x}, t) |\phi, t\rangle = e^{iHt} \phi^S(\mathbf{x}) e^{-iHt} e^{iHt} |\phi\rangle = e^{iHt} \phi^S(\mathbf{x}) |\phi\rangle = \phi(\mathbf{x}) e^{iHt} |\phi\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi, t\rangle$$

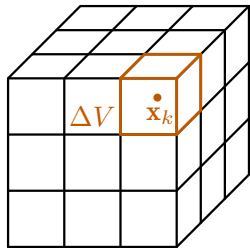
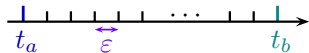
 即 $|\phi, t\rangle$ 是**场算符** $\phi^H(\mathbf{x}, t)$ 在 t 时刻的**瞬时本征态**, 其本征值 $\phi(\mathbf{x})$ 是与 t 无关的**场构型**

Feynman 核和离散化

🐻 从而, **Feynman 核**

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \langle \phi_b | e^{-iHt_b} e^{iHt_a} | \phi_a \rangle = \langle \phi_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | \phi_a \rangle$$

表示从 t_a 时刻场构型 $\phi_a(\mathbf{x})$ 跃迁到 t_b 时刻场构型 $\phi_b(\mathbf{x})$ 的**概率振幅**



Feynman 核和离散化

🐱 从而, **Feynman 核**

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \langle \phi_b | e^{-iHt_b} e^{iHt_a} | \phi_a \rangle = \langle \phi_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | \phi_a \rangle$$

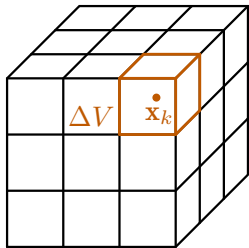
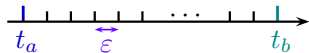
表示从 t_a 时刻场构型 $\phi_a(\mathbf{x})$ 跃迁到 t_b 时刻场构型 $\phi_b(\mathbf{x})$ 的**概率振幅**

🦄 为了讨论**场的泛函积分**, 我们需要先把**时间**和**空间离散化**, 再取**连续极限**, 这类类似于上一节和 2.2 节的讨论


🐎 具体来说, 将时间间隔 $[t_a, t_b]$ 等分成 N 个长度为 ϵ 的**小间隔**, 各**分点时刻**为 t_n ($n = 0, 1, \dots, N$)

🦌 进一步, 将**每个时刻**的场限制在一个**有限的空间体积** V 里面, 然后把 V 分隔成 K 个**大小相等**的**体积元** ΔV , 每个体积元的**中心坐标**为 \mathbf{x}_k ($k = 1, 2, \dots, K$)


🦒 **连续极限**的取法是先令 $K \rightarrow \infty$, 再令 $V \rightarrow \infty$, 最后令 $N \rightarrow \infty$




本征态张量积


 在 t_n 时刻，记场算符 $\phi^H(\mathbf{x}, t_n)$ 的本征态为 $|\phi_n, t_n\rangle$ ，满足

$$\phi^H(\mathbf{x}, t_n) |\phi_n, t_n\rangle = \phi_n(\mathbf{x}) |\phi_n, t_n\rangle$$


 只要 ΔV 足够小，连续的场算符 $\phi^H(\mathbf{x}, t_n)$ 就能用 K 个分立的算符 $\phi^H(\mathbf{x}_k, t_n)$ 来代表，它们是各个体积元中的广义坐标算符

 设 $|\phi_{n,k}, t_n\rangle$ 为 t_n 时刻第 k 个体积元内算符 $\phi^H(\mathbf{x}_k, t_n)$ 的本征态，本征值为 $\phi_{n,k} = \phi_n(\mathbf{x}_k)$ ，满足本征方程和完备性关系

$$\phi^H(\mathbf{x}_k, t_n) |\phi_{n,k}, t_n\rangle = \phi_{n,k} |\phi_{n,k}, t_n\rangle, \quad \int d\phi_{n,k} |\phi_{n,k}, t_n\rangle \langle \phi_{n,k}, t_n| = \mathbb{I}$$

 于是，可将 $|\phi_n, t_n\rangle$ 近似为 K 个体积元内的本征态的张量积

$$|\phi_n, t_n\rangle \simeq |\phi_{n,1}, t_n\rangle \otimes |\phi_{n,2}, t_n\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_{n,K}, t_n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

 其中 $n = 0$ 和 $n = N$ 分别对应于 $t_a = t_0$ 和 $t_b = t_N$ 时刻的瞬时本征态


$$|\phi_a, t_a\rangle \simeq |\phi_{0,1}, t_0\rangle \otimes |\phi_{0,2}, t_0\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_{0,K}, t_0\rangle$$

$$|\phi_b, t_b\rangle \simeq |\phi_{N,1}, t_N\rangle \otimes |\phi_{N,2}, t_N\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_{N,K}, t_N\rangle$$

完备性关系

 从而，相邻时刻本征态的内积为

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n+1}, t_{n+1} | \phi_n, t_n \rangle &\simeq \langle \phi_{n+1,1}, t_{n+1} | \phi_{n,1}, t_n \rangle \langle \phi_{n+1,2}, t_{n+1} | \phi_{n,2}, t_n \rangle \\ &\quad \times \cdots \langle \phi_{n+1,K}, t_{n+1} | \phi_{n,K}, t_n \rangle \\ &= \prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle \end{aligned}$$


 对完备性关系 $\int d\phi_{n,k} |\phi_{n,k}, t_n\rangle \langle \phi_{n,k}, t_n| = \mathbb{I}$ 两边作张量积，推出

$$\int \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) |\phi_{n,1}, t_n\rangle \langle \phi_{n,1}, t_n| \otimes |\phi_{n,2}, t_n\rangle \langle \phi_{n,2}, t_n| \otimes \cdots \otimes |\phi_{n,K}, t_n\rangle \langle \phi_{n,K}, t_n| = \mathbb{I}$$

 这等价于 $|\phi_n, t_n\rangle$ 的完备性关系 $\int d^K \phi_n |\phi_n, t_n\rangle \langle \phi_n, t_n| = \mathbb{I}$


 其中 K 重积分元 $d^K \phi_n = \prod_{k=1}^K d\phi_{n,k}$


离散化的 Feynman 核

 利用完备性关系 $\int d^K \phi_n |\phi_n, t_n\rangle \langle \phi_n, t_n| = \mathbb{I}$ ，在 Feynman 核 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$ 中


插入 $N - 1$ 个分点时刻的本征态完备集，让这些时刻从右至左由小到大排列，得到

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle \\ \simeq & \int d^K \phi_{N-1} \cdots \int d^K \phi_2 \int d^K \phi_1 \langle \phi_N, t_N | \phi_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle \langle \phi_1, t_1 | \phi_0, t_0 \rangle \\ \simeq & \int \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{N-1,k} \right) \cdots \int \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{2,k} \right) \int \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{1,k} \right) \\ & \times \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{N,k}, t_N | \phi_{N-1,k}, t_{N-1} \rangle \right) \cdots \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{2,k}, t_2 | \phi_{1,k}, t_1 \rangle \right) \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{1,k}, t_1 | \phi_{0,k}, t_0 \rangle \right) \\ = & \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle \right) \end{aligned}$$


 第二步用到 $\langle \phi_{n+1}, t_{n+1} | \phi_n, t_n \rangle = \prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle$


 注意，取连续极限之后，这里的近似表达式将变成精确结果


Schrödinger 绘景中的本征态

 在第 k 个体积元中，将 Schrödinger 绘景里的场算符和共轲动量密度算符分别记作 $\phi_k^S \equiv \phi^S(\mathbf{x}_k)$ 和 $\pi_k^S \equiv \pi^S(\mathbf{x}_k)$ ，相应的本征方程是


$$\phi_k^S |\phi_{n,k}\rangle = \phi_{n,k} |\phi_{n,k}\rangle, \quad \pi_k^S |\pi_{n,k}\rangle = \pi_{n,k} |\pi_{n,k}\rangle$$

 其中 $|\phi_{n,k}\rangle = e^{-iHt_n} |\phi_{n,k}, t_n\rangle$ ，而 $|\pi_{n,k}\rangle$ 是 π_k^S 的本征态


 参考 2.2 节的讨论，第 k 个体积元中的广义动量算符应该是 π_k^S 乘以体积 ΔV

 推广 $\int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p| = \mathbb{I}$ 和 $\langle q|p\rangle = e^{ipq}$ ，得到 $|\pi_{n,k}\rangle$ 的完备性关系


$$\int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} |\pi_{n,k}\rangle \langle \pi_{n,k}| = \mathbb{I}$$

 以及广义动量本征态 $|\pi_{n,k}\rangle$ 与广义坐标本征态 $|\phi_{n',k}\rangle$ 的内积


$$\langle \phi_{n',k} | \pi_{n,k} \rangle = \exp(i\Delta V \pi_{n,k} \phi_{n',k})$$

 其中 n 与 n' 可以不相等

体积元内相邻时刻的跃迁振幅

 第 k 个体积元中的哈密顿量算符近似为 $H_k(\phi_k^S, \pi_k^S) \simeq \Delta V \mathcal{H}(\phi_k^S, \pi_k^S)$ ，相邻时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的跃迁振幅是

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle &= \langle \phi_{n+1,k} | e^{-iH_k(\phi_k^S, \pi_k^S)\epsilon} | \phi_{n,k} \rangle \\ &= \langle \phi_{n+1,k} | \phi_{n,k} \rangle - i\epsilon \Delta V \langle \phi_{n+1,k} | \mathcal{H}(\phi_k^S, \pi_k^S) | \phi_{n,k} \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

 利用 $\int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} |\pi_{n,k}\rangle \langle \pi_{n,k}| = \mathbb{I}$ 和 $\langle \phi_{n',k} | \pi_{n,k} \rangle = \exp(i\Delta V \pi_{n,k} \phi_{n',k})$ ，将上式第一项化为

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n+1,k} | \phi_{n,k} \rangle &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \langle \phi_{n+1,k} | \pi_{n,k} \rangle \langle \pi_{n,k} | \phi_{n,k} \rangle \\ &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \exp[i\Delta V \pi_{n,k} (\phi_{n+1,k} - \phi_{n,k})] \end{aligned}$$

 由本征方程 $\phi_k^S | \phi_{n,k} \rangle = \phi_{n,k} | \phi_{n,k} \rangle$ 和 $\pi_k^S | \pi_{n,k} \rangle = \pi_{n,k} | \pi_{n,k} \rangle$ 推出

$$\begin{aligned} \langle \pi_{n,k} | \mathcal{H}(\phi_k^S, \pi_k^S) | \phi_{n,k} \rangle &= \langle \pi_{n,k} | \left[\frac{1}{2} (\pi_k^S)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_k^S)^2 + V(\phi_k^S) \right] | \phi_{n,k} \rangle \\ &= \langle \pi_{n,k} | \mathcal{H}(\phi_{n,k}, \pi_{n,k}) | \phi_{n,k} \rangle \end{aligned}$$

体积元内相邻时刻跃迁振幅的极限

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{n+1,k} | \mathcal{H}(\phi_k^S, \pi_k^S) | \phi_{n,k} \rangle &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \langle \phi_{n+1,k} | \pi_{n,k} \rangle \langle \pi_{n,k} | \mathcal{H}(\phi_k^S, \pi_k^S) | \phi_{n,k} \rangle \\
 &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \langle \phi_{n+1,k} | \pi_{n,k} \rangle \langle \pi_{n,k} | \mathcal{H}(\phi_{n,k}, \pi_{n,k}) | \phi_{n,k} \rangle \\
 &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \langle \phi_{n+1,k} | \pi_{n,k} \rangle \langle \pi_{n,k} | \phi_{n,k} \rangle \mathcal{H}_{n,k} \\
 &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} e^{i\Delta V \pi_{n,k} (\phi_{n+1,k} - \phi_{n,k})} \mathcal{H}_{n,k}
 \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{H}_{n,k} \equiv \mathcal{H}(\phi_{n,k}, \pi_{n,k})$ 。于是，相邻时刻的跃迁振幅化为

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle &= \langle \phi_{n+1,k} | \phi_{n,k} \rangle - i\varepsilon \Delta V \langle \phi_{n+1,k} | \mathcal{H}(\phi_k^S, \pi_k^S) | \phi_{n,k} \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} e^{i\Delta V \pi_{n,k} (\phi_{n+1,k} - \phi_{n,k})} (1 - i\varepsilon \Delta V \mathcal{H}_{n,k}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

取 $N \rightarrow \infty$ 的极限，推出 $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle$


$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} e^{i\Delta V \pi_{n,k} (\phi_{n+1,k} - \phi_{n,k})} e^{-i\varepsilon \Delta V \mathcal{H}_{n,k}}$$

连续极限下的 Feynman 核

 取连续极限，将 Feynman 核表达为

$$\begin{aligned}
 & \langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle \\
 = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle \right) \\
 = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \\
 & \times \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \int \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} e^{i\Delta V \pi_{n,k} (\phi_{n+1,k} - \phi_{n,k})} e^{-i\varepsilon \Delta V \mathcal{H}_{n,k}} \right) \\
 = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \int \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \right) \\
 & \times \exp \left[i \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \sum_{k=1}^K \Delta V \left(\pi_{n,k} \frac{\phi_{n+1,k} - \phi_{n,k}}{\varepsilon} - \mathcal{H}_{n,k} \right) \right]
 \end{aligned}$$

相空间中的路径积分


 在连续极限下，上式中的积分化为泛函积分，有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \rightarrow \int \mathcal{D}\phi$$


$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \frac{\Delta V d\pi_{n,k}}{2\pi} \right) \rightarrow \int \mathcal{D}\pi$$

 而指数上的求和化为积分，推出相空间中的路径积分


$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \{ \pi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathcal{H}[\phi(x), \pi(x)] \} \right)$$


 $\int \mathcal{D}\phi$ 对所有满足边界条件 $\phi(\mathbf{x}, t_a) = \phi_a(\mathbf{x})$ 和 $\phi(\mathbf{x}, t_b) = \phi_b(\mathbf{x})$ 的路径 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 进行积分，而 $\int \mathcal{D}\pi$ 对所有 $\pi(\mathbf{x}, t)$ 路径进行积分

泛函积分变量替换


 由于哈密顿量密度 \mathcal{H} 依赖于共轭动量密度的平方，我们可以把相空间中的路径积分里面的 $\int \mathcal{D}\pi$ 积分显明地作出来，先将花括号里的项化为

$$\begin{aligned} \pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\phi, \pi) &= \pi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2} [\pi^2 - 2\pi \partial_0 \phi + (\partial_0 \phi)^2 - (\partial_0 \phi)^2] - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2} (\pi - \partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - V(\phi) \end{aligned}$$

 其中 $\tilde{\pi} \equiv \pi - \partial_0 \phi$

 再将泛函积分变量 π 替换成 $\tilde{\pi}$ ，有 $\mathcal{D}\pi = \mathcal{D}\tilde{\pi}$ ，故

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\tilde{\pi} \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \left[-\frac{\tilde{\pi}^2}{2} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right] \right\}$$

 其中 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - V(\phi)$ 正是相应的拉氏量


场空间中的路径积分


 对 $\tilde{\pi}$ 的泛函积分给出归一化常数

$$C \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\pi} \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \left(-\frac{\tilde{\pi}^2}{2} \right) \right]$$


 以此写下场空间中的路径积分

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = C \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right]$$

 它对场空间中所有满足边界条件 $\phi(\mathbf{x}, t_a) = \phi_a(\mathbf{x})$ 和 $\phi(\mathbf{x}, t_b) = \phi_b(\mathbf{x})$ 的路径积分

 在相对论性场论中，拉氏量 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ 是一个 Lorentz 标量，因而上式具有显明的 Lorentz 不变性

 此外，拉氏量具有的其它对称性也将显明地保持在路径积分表达式中

 由于各种对称性和相应的守恒定律在量子场论中起着至关重要的作用，我们倾向于使用拉氏量而非哈密顿量来表达场论体系

 以拉氏量作为量子场论的出发点，则哈密顿量是从拉氏量导出来的

11.2.2 小节 多点关联函数和生成泛函


 本小节推导**多点关联函数**的**路径积分**表达式

 首先，利用上一小节中的**离散化方法**计算 $\langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle$

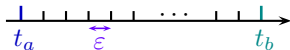
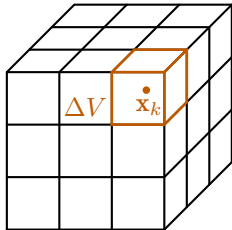
 即在 **Feynman 核**中插入**场算符** $\phi^H(x_i) = \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p)$


 $t_p = x_i^0$ 是**集合** $\{t_n\}_{n=1}^N$ 里面的某个时刻

 $\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_i$ 是**集合** $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$ 里面的某个空间坐标


 根据**本征方程** $\phi^H(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_{p,l}, t_p \rangle = \phi_{p,l} | \phi_{p,l}, t_p \rangle$ ，有

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{p+1}, t_{p+1} | \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_p, t_p \rangle \\ & \simeq \langle \phi_{p+1,1}, t_{p+1} | \phi_{p,1}, t_p \rangle \cdots \langle \phi_{p+1,l}, t_{p+1} | \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_{p,l}, t_p \rangle \\ & \quad \times \cdots \langle \phi_{p+1,K}, t_{p+1} | \phi_{p,K}, t_p \rangle \\ & = \phi_{p,l} \prod_{k=1}^K \langle \phi_{p+1,k}, t_{p+1} | \phi_{p,k}, t_p \rangle \end{aligned}$$




 注意，上式第一步中**算符** $\phi^H(\mathbf{x}_l, t_p)$ 只能作用在**第 l 个体积元**的**态矢**上


$$\langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle$$

 在 $\langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle$ 中插入 $N - 1$ 个分点时刻的本征态完备集，推出

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle \\ & \simeq \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} d^K \phi_n \right) \langle \phi_N, t_N | \phi_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle \phi_{p+1}, t_{p+1} | \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_p, t_p \rangle \\ & \quad \times \cdots \langle \phi_1, t_1 | \phi_0, t_0 \rangle \\ & \simeq \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \phi_{p,l} \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle \right) \end{aligned}$$

 注意，为了利用 $\langle \phi_{p+1}, t_{p+1} | \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_p, t_p \rangle \simeq \phi_{p,l} \prod_{k=1}^K \langle \phi_{p+1,k}, t_{p+1} | \phi_{p,k}, t_p \rangle$ 将

场算符 $\phi^H(x_i)$ 转化为 \mathbf{c} 数 $\phi_{p,l}$ ，在第二步中应该将 $\phi^H(x_i) = \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p)$ 夹在 $|\phi_{p+1}, t_{p+1}\rangle \langle \phi_{p+1}, t_{p+1}|$ 与 $|\phi_p, t_p\rangle \langle \phi_p, t_p|$ 之间


 上式与 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle \simeq \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle \right)$

的不同之处仅在于被积函数中多了一个 $\phi_{p,l}$ 因子


$\langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle$ 的泛函积分表达式

 取连续极限，得到泛函积分

$$\langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \phi(x_i) \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x [\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \right\}$$

 与 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x [\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \right\}$ 比较可

知，在 Feynman 核中插入一个场算符 $\phi^H(x_i)$ 相当于在路径积分的被积函数中增加一个经典场因子 $\phi(x_i)$

 尽管在上述计算中一开始要求 x_i^0 和 \mathbf{x}_i 分别是集合 $\{t_n\}_{n=1}^N$ 和 $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$ 中的元素，但在取连续极限之后， x_i^0 可取 t_a 与 t_b 之间的任意值，而 \mathbf{x}_i 可取任意空间坐标

$x_i^0 > x_j^0$ 时的 $\langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) \phi^H(x_j) | \phi_a, t_a \rangle$

🚲 进一步, 再插入一个**场算符** $\phi^H(x_j) = \phi^H(\mathbf{x}_m, t_q)$

🚲 其中 $t_q = x_j^0 \in \{t_n\}_{n=1}^N$, 而 $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_j \in \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$

🏔️ 如果 $x_i^0 > x_j^0$, 则可类似地得到

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) \phi^H(x_j) | \phi_a, t_a \rangle \\ & \simeq \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} d^K \phi_n \right) \langle \phi_N, t_N | \phi_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle \phi_{p+1}, t_{p+1} | \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_p, t_p \rangle \\ & \quad \times \cdots \langle \phi_{q+1}, t_{q+1} | \phi^H(\mathbf{x}_m, t_q) | \phi_q, t_q \rangle \cdots \langle \phi_1, t_1 | \phi_0, t_0 \rangle \\ & \simeq \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K d\phi_{n,k} \right) \phi_{p,l} \phi_{q,m} \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^K \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n \rangle \right) \end{aligned}$$

🚲 取**连续极限**后推出**泛函积分**

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_i) \phi^H(x_j) | \phi_a, t_a \rangle \\ & = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \phi(x_i) \phi(x_j) \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x [\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \right\} \end{aligned}$$

$x_i^0 < x_j^0$ 的情况

🔍 但是，如果 $x_i^0 < x_j^0$ ，则以上结果**不能成立**，原因如下

🎈 插入 $N - 1$ 个分点时刻的本征态完备集时，需要让它们对应的**时刻从右至左由小到大排列**，以保证各相邻时刻的振幅总是**沿着时间正向演化**

🍷 这会导致**场空间中的积分路径也沿着时间正向演化**

🍷 为将算符 $\phi^H(x_i)$ 和 $\phi^H(x_j)$ **转化成 c 数** $\phi_{p,l}$ 和 $\phi_{q,m}$ ，需在 $\phi^H(x_i) = \phi^H(\mathbf{x}_l, t_p)$ 右边插入 $|\phi_p, t_p\rangle \langle \phi_p, t_p|$ ，而在 $\phi^H(x_j) = \phi^H(\mathbf{x}_m, t_q)$ 右边插入 $|\phi_q, t_q\rangle \langle \phi_q, t_q|$ ，故 $\phi^H(x_i)$ 位于 $\phi^H(x_j)$ **左方**意味着 $|\phi_p, t_p\rangle \langle \phi_p, t_p|$ 位于 $|\phi_q, t_q\rangle \langle \phi_q, t_q|$ **左方**


🔍 这与 $t_p = x_i^0 < x_j^0 = t_q$ 的**时序不合**

🍷 正确的做法是，当 $x_i^0 < x_j^0$ 时，将**上一页结果**中的 x_i 和 x_j **对调**，得到

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \phi^H(x_j) \phi^H(x_i) | \phi_a, t_a \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \phi(x_j) \phi(x_i) \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x [\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \right\} \end{aligned}$$

🚗 上式右边泛函积分中 $\phi(x_j)$ 和 $\phi(x_i)$ 都是 **c 数**，可以**交换它们的位置而不改变积分结果**，因而这个结果实际上与**上一页结果**相等


时序乘积

 利用**时序乘积**，将 $x_i^0 > x_j^0$ 和 $x_i^0 < x_j^0$ 两种情况统一写成


$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \mathbf{T}[\phi^H(x_i)\phi^H(x_j)] | \phi_a, t_a \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \phi(x_i)\phi(x_j) \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x [\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \right\} \end{aligned}$$


 耐人寻味的是，**路径积分方法**自然而然地涉及到两个场算符的**时序乘积**


n 个场算符的情况

 推广到 n 个场算符的情况，得到相空间中的路径积分


$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \mathbf{T}[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x [\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \right\} \end{aligned}$$

 相比于 Feynman 核的路径积分公式，上式泛函积分的被积函数中多了 n 个经典场的乘积 $\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$

 这并不影响积掉 $\int \mathcal{D}\pi$ 以推出场空间中路径积分表达式的过程

 积掉 $\int \mathcal{D}\pi$ 之后，得到场空间中的路径积分

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | \mathbf{T}[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle \\ &= C \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right] \end{aligned}$$

 其中归一化常数仍然是 $C = \int \mathcal{D}\tilde{\pi} \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \left(-\frac{\tilde{\pi}^2}{2} \right) \right]$

能量本征态

🏆 上面计算的 $\langle \phi_b, t_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle$ 与 n 点关联函数 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle$ 有所不同，后者是 n 个场算符的时序乘积在真空态 $|0\rangle$ 上的期待值

- 1️⃣ 为了推出 n 点关联函数的路径积分表达式，需要借助哈密顿量 H 的本征态 $|N\rangle$
- 2️⃣ 相应的本征方程是 $H |N\rangle = E_N |N\rangle$
- 3️⃣ 通过调整能量零点，可使 $E_N \geq 0$ ； $N = 0$ 对应于真空态 $|0\rangle$ ，其能量本征值 E_0 最低；其它能量本征值满足 $E_N > E_0$ ($N \neq 0$)

能量本征态

🏆 上面计算的 $\langle \phi_b, t_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle$ 与 n 点关联函数 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle$ 有所不同, 后者是 n 个场算符的时序乘积在真空态 $|0\rangle$ 上的期待值

- 🏆 为了推出 n 点关联函数的路径积分表达式, 需要借助哈密顿量 H 的本征态 $|N\rangle$
- 🏆 相应的本征方程是 $H|N\rangle = E_N|N\rangle$
- 🏆 通过调整能量零点, 可使 $E_N \geq 0$; $N=0$ 对应于真空态 $|0\rangle$, 其能量本征值 E_0 最低; 其它能量本征值满足 $E_N > E_0$ ($N \neq 0$)


🔪 设本征态 $|N\rangle$ 满足完备性关系 $\sum_N |N\rangle\langle N| = \mathbb{I}$ 和正交归一关系 $\langle N'|N\rangle = \delta_{N'N}$

🏹 那么, 可将场算符 $\phi^H(\mathbf{x}, t)$ 的瞬时本征态 $|\phi, t\rangle$ 表达为

$$|\phi, t\rangle = e^{iHt} |\phi\rangle = \sum_N e^{iHt} |N\rangle\langle N|\phi\rangle = \sum_N e^{iE_N t} |N\rangle\langle N|\phi\rangle$$

🎯 从而 $\langle N|\phi, t\rangle = \sum_{N'} e^{iE_{N'} t} \langle N|N'\rangle \langle N'|\phi\rangle = \sum_{N'} e^{iE_{N'} t} \delta_{NN'} \langle N'|\phi\rangle = e^{iE_N t} \langle N|\phi\rangle$


插入能量本征态完备集

 利用上述公式，将 **Feynman 核** 化为

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \sum_N \langle \phi_b, t_b | N \rangle \langle N | \phi_a, t_a \rangle = \sum_N e^{-iE_N(t_b - t_a)} \langle \phi_b | N \rangle \langle N | \phi_a \rangle$$

 在 Feynman 核中插入 n 个场算符的时序乘积，推出

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, t_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle \\ &= \sum_{NN'} \langle \phi_b, t_b | N' \rangle \langle N' | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | N \rangle \langle N | \phi_a, t_a \rangle \\ &= \sum_{NN'} e^{-i(E_{N'}t_b - E_N t_a)} \langle \phi_b | N' \rangle \langle N | \phi_a \rangle \langle N' | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | N \rangle \end{aligned}$$

 上式中 $N = N' = 0$ 的项包含 n 点关联函数 $\langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle$ ，我们需要想办法把它的贡献分离出来

振荡和衰减


 如果取 $t_a \rightarrow -\infty$ 、 $t_b \rightarrow +\infty$ 的极限，则上式中的指数函数

$$e^{-i(E_{N'}t_b - E_N t_a)} = \cos(E_{N'}t_b - E_N t_a) - i \sin(E_{N'}t_b - E_N t_a)$$

会不断地**振荡**，而不会发生**衰减**

 为了将振荡行为转化成衰减行为，引入变量 $\tau \equiv e^{i\delta}t$ ，其中 $0 < \delta < \pi$ ，从而

$$\begin{aligned} e^{-i(E_{N'}t_b - E_N t_a)} &= e^{-i(E_{N'}\tau_b - E_N \tau_a) \exp(-i\delta)} = e^{-i(E_{N'}\tau_b - E_N \tau_a)(\cos \delta - i \sin \delta)} \\ &= e^{-(E_{N'}\tau_b - E_N \tau_a) \cos \delta} e^{-(E_{N'}\tau_b - E_N \tau_a) \sin \delta} \end{aligned}$$

 $0 < \delta < \pi$ 保证 $\sin \delta > 0$ ，因此上式中的 $e^{-(E_{N'}\tau_b - E_N \tau_a) \sin \delta}$ 会在 $\tau_a \rightarrow -\infty$ 、 $\tau_b \rightarrow +\infty$ 的极限下发生**衰减**

 由于 E_0 是最低的能量， $N = N' = 0$ 的项**衰减得最慢**

 因而在这种极限下**只需保留** $N = N' = 0$ 的项

转动和解析延拓

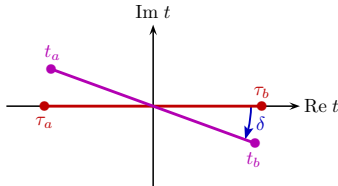
💪 当 τ_a 和 τ_b 取实数值时, $t_a = e^{-i\delta}\tau_a$ 和 $t_b = e^{-i\delta}\tau_b$ 的取值是在 t 的复平面上顺时针转动 δ 角, 以上做法对应的极限式是

$$\lim_{\substack{\tau_a \rightarrow -\infty \\ \tau_b \rightarrow +\infty}} \langle \phi_b, e^{-i\delta}\tau_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, e^{-i\delta}\tau_a \rangle$$

🏆 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 上式趋向于

$$\lim_{\substack{t_a \rightarrow -\infty \\ t_b \rightarrow +\infty}} \langle \phi_b, t_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle$$


👉 将 t_a 和 t_b 视作复变量, 假设 $\langle \phi_b, e^{-i\delta}\tau_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, e^{-i\delta}\tau_a \rangle$ 是 t_a 和 t_b 的解析函数, 那么我们可以先计算第一式, 再将所得结果解析延拓到 $\delta = 0$ 处是以得到第二式的结果



Wick 转动

 取转动角 $\delta = \pi/2$, 则

$$t = e^{-i\pi/2} \tau = -i\tau$$

 此时相关计算会比较便捷, 这样的转动称为 **Wick 转动**

 在 **Wick 转动**下, 有

$$\begin{aligned} & \langle \phi_b, -i\tau_b | \mathsf{T}[\phi^{\text{H}}(x_1)\phi^{\text{H}}(x_2)\cdots\phi^{\text{H}}(x_n)] | \phi_a, -i\tau_a \rangle \\ &= \sum_{NN'} e^{-(E_{N'}\tau_b - E_N\tau_a)} \langle \phi_b | N' \rangle \langle N | \phi_a \rangle \langle N' | \mathsf{T}[\phi^{\text{H}}(x_1)\phi^{\text{H}}(x_2)\cdots\phi^{\text{H}}(x_n)] | N \rangle \end{aligned}$$



Gian Wick (1909-1992)

 取 $\tau_a \rightarrow -\infty$ 、 $\tau_b \rightarrow +\infty$ 的极限, 只保留**衰减最慢**的 $N = N' = 0$ 的项, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\tau_a \rightarrow -\infty \\ \tau_b \rightarrow +\infty}} \langle \phi_b, -i\tau_b | \mathsf{T}[\phi^{\text{H}}(x_1)\phi^{\text{H}}(x_2)\cdots\phi^{\text{H}}(x_n)] | \phi_a, -i\tau_a \rangle \\ &= e^{-E_0(\tau_b - \tau_a)} \langle \phi_b | 0 \rangle \langle 0 | \phi_a \rangle \langle 0 | \mathsf{T}[\phi^{\text{H}}(x_1)\phi^{\text{H}}(x_2)\cdots\phi^{\text{H}}(x_n)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

n 点关联函数的极限表达式

 同理，由 **Feynman 核** 表达式 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \sum_n e^{-iE_N(t_b - t_a)} \langle \phi_b | N \rangle \langle N | \phi_a \rangle$ 得

$$\lim_{\substack{\tau_a \rightarrow -\infty \\ \tau_b \rightarrow +\infty}} \langle \phi_b, -i\tau_b | \phi_a, -i\tau_a \rangle = e^{-E_0(\tau_b - \tau_a)} \langle \phi_b | 0 \rangle \langle 0 | \phi_a \rangle$$

 从而推出 n 点关联函数的表达式

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ = & \lim_{\substack{\tau_a \rightarrow -\infty \\ \tau_b \rightarrow +\infty}} \frac{\langle \phi_b, -i\tau_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, -i\tau_a \rangle}{\langle \phi_b, -i\tau_b | \phi_a, -i\tau_a \rangle} \end{aligned}$$

 把这个结果解析延拓至 $\delta = 0$ 处，得到

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ = & \lim_{\substack{t_a \rightarrow -\infty \\ t_b \rightarrow +\infty}} \frac{\langle \phi_b, t_b | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | \phi_a, t_a \rangle}{\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle} \end{aligned}$$

n 点关联函数的路径积分表达式

✂ 代入场空间中的路径积分表达式，得

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \lim_{\substack{t_a \rightarrow -\infty \\ t_b \rightarrow +\infty}} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right]} \end{aligned}$$

🛡 注意分子和分母中的两个归一化常数 C 正好约掉了


👤 这里的极限让时间积分的上下限扩展到 $(-\infty, +\infty)$ ，可以将上式改写为

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right]} \end{aligned}$$

👤 这就是 n 点关联函数的路径积分表达式

🗣 注意，在使用上式进行计算时，需要用到上述解析延拓方法

作用量和 LSZ 约化公式

 由于 $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ 正是**作用量**，可将上式改写为


$$\langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}$$

 原则上，利用**路径积分**算出**多点关联函数**之后，结合 **LSZ 约化公式**

$$\begin{aligned} iT_{fi} &= \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \int \left[\prod_{j=1}^m d^4 y_j \frac{i e^{i q_j \cdot y_j} (\partial_{y_j}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{i e^{-i p_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\ &\quad \times \langle 0 | T[\phi^H(y_1)\cdots\phi^H(y_m)\phi^H(x_1)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle, \end{aligned}$$


就能得到**散射矩阵元**，进而计算**散射截面**和**衰变宽度**等可观测量


多点关联函数的生成泛函


 借助**生成泛函**的**泛函导数**，可以方便地计算 n 点**关联函数**

 对于**实标量场** $\phi(x)$ ，**多点关联函数的生成泛函** (generating functional) 定义为


$$Z[J] \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x \{ \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] + J(x)\phi(x) \} \right)$$

 即在**拉氏量** \mathcal{L} 的基础上添加一个**经典源项** $J(x)\phi(x)$


 其中**外源** (external source) $J(x)$ 是一个任意的实值**经典函数**，可视作一个**经典力场**，它是一个 **Lorentz 标量场**


 如果将 $J(x)\phi(x)$ 加入到**拉氏量**中以计算实标量场 $\phi(x)$ 的**经典运动方程**，则 $J(x)$ 将作为一个**非齐次项**出现，从而影响实标量场的运动；考虑由**实标量场**构成的**量子系统**对**外源** $J(x)$ 的**响应**，有助于我们了解此量子系统的动力学性质

 不过，这样的 $J(x)$ 只是一个**辅助用的函数**，**不需要代表实际的物理情况**


 \mathcal{N} 是**归一化常数**，通过适当选取其数值，可使**生成泛函**满足**归一化条件** $Z[0] = 1$


泛函导数

 现在， $Z[J]$ 是 $J(x)$ 的泛函，可对它求泛函导数 (functional derivative)


 $J(x)$ 是四维时空坐标 x^μ 的函数，相应的泛函导数 $\delta/\delta J(x)$ 定义为


$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x - y)$$

 这是多个分立的独立变量 x_i 的求导关系 $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta^i_j$ 在连续极限下的推广


 泛函导数类似于普通导数，满足普通导数的各种法则，如乘积法则、链式法则等


泛函导数


 现在， $Z[J]$ 是 $J(x)$ 的泛函，可对它求泛函导数 (functional derivative)

 $J(x)$ 是四维时空坐标 x^μ 的函数，相应的泛函导数 $\delta/\delta J(x)$ 定义为

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x - y)$$

 这是多个分立的独立变量 x_i 的求导关系 $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta^i_j$ 在连续极限下的推广

 泛函导数类似于普通导数，满足普通导数的各种法则，如乘积法则、链式法则等

 利用四维 δ 函数的挑选性，进一步推出

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \int d^4y \delta^{(4)}(x - y)\phi(y) = \phi(x)$$

 根据复合函数的链式法则，有

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[i \int d^4y J(y)\phi(y) \right] &= \left\{ \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[i \int d^4y J(y)\phi(y) \right] \right\} \exp \left[i \int d^4y J(y)\phi(y) \right] \\ &= i\phi(x) \exp \left[i \int d^4y J(y)\phi(y) \right] \end{aligned}$$

对生成泛函求泛函导数



对生成泛函 $Z[J]$ 求一阶泛函导数，得

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right\}$$



求 n 阶泛函导数，推出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right\} \end{aligned}$$



当外源 $J = 0$ 时，有 $Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L} \right)$



归一化条件 $Z[0] = 1$ 意味着

$$\mathcal{N} = \left[\int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L} \right) \right]^{-1}$$

用生成泛函表达 n 点关联函数

 于是，可将 n 点关联函数表达为


$$\langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

 记 n 点关联函数为

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 | T[\phi^H(x_1)\phi^H(x_2)\cdots\phi^H(x_n)] | 0 \rangle$$

 注意到归一化条件 $Z[0] = 1$ ，可以将生成泛函展开为

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n G^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)$$

 而 n 点关联函数是相应的展开系数

11.2.3 小节 四维 Euclid 空间和 Feynman 传播子

⚙️ 根据 $t = -i\tau$ 对 Minkowski 时空的时间坐标 $x^0 = t$ 作 Wick 转动

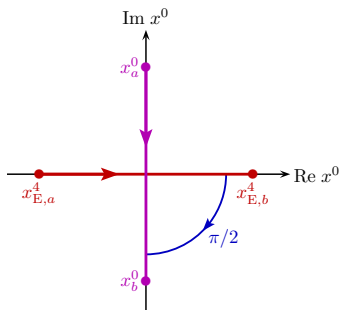
✂️ 得到的变量 $\tau = it$ 可与三个空间坐标 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 组成四维 Euclid 空间

⚖️ 具体来说, 设四维 Euclid 空间的坐标为 $x_E^\mu = (\mathbf{x}_E, x_E^4) = (x_E^1, x_E^2, x_E^3, x_E^4)$, 其中

$$\mathbf{x}_E \equiv \mathbf{x}, \quad x_E^4 \equiv \tau = it = ix^0$$

🔪 $x^0 = e^{-i\pi/2} x_E^4$ 在 x^0 复平面上相对于 x_E^4 顺时针转动了 $\pi/2$ 角

🔨 当 x_E^4 沿实轴正向取值时, x^0 沿虚轴负向取值



11.2.3 小节 四维 Euclid 空间和 Feynman 传播子

根据 $t = -i\tau$ 对 Minkowski 时空的时间坐标 $x^0 = t$ 作 Wick 转动

得到的变量 $\tau = it$ 可与三个空间坐标 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 组成四维 Euclid 空间

具体来说, 设四维 Euclid 空间的坐标为 $x_E^\mu = (\mathbf{x}_E, x_E^4) = (x_E^1, x_E^2, x_E^3, x_E^4)$, 其中

$$\mathbf{x}_E \equiv \mathbf{x}, \quad x_E^4 \equiv \tau = it = ix^0$$

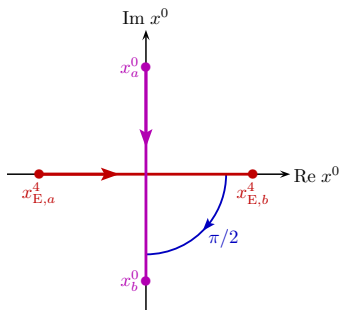
$x^0 = e^{-i\pi/2} x_E^4$ 在 x^0 复平面上相对于 x_E^4 顺时针转动了 $\pi/2$ 角


当 x_E^4 沿实轴正向取值时, x^0 沿虚轴负向取值

引入 Euclid 度规

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\mu\nu}$$

其中 $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, 而 $\delta^{\mu\nu}$ 是度规的逆




 协变矢量 $x_{E,\mu} \equiv \delta_{\mu\nu} x_E^\nu = (x_E^1, x_E^2, x_E^3, x_E^4)$ 与逆变矢量 x_E^μ 的分量完全相同

 Euclid 坐标 x_E^μ 的内积 $x_E \cdot x_E$ 与 Minkowski 时空坐标的内积 $x \cdot x$ 之间的关系为

$$x_E \cdot x_E \equiv \delta_{\mu\nu} x_E^\mu x_E^\nu = |\mathbf{x}_E|^2 + (x_E^4)^2 = |\mathbf{x}|^2 - t^2 = -x \cdot x$$

四维 Euclid 空间中的四维动量


 协变矢量 $x_{E,\mu} \equiv \delta_{\mu\nu} x_E^\nu = (x_E^1, x_E^2, x_E^3, x_E^4)$ 与逆变矢量 x_E^μ 的分量完全相同


 Euclid 坐标 x_E^μ 的内积 $x_E \cdot x_E$ 与 Minkowski 时空坐标的内积 $x \cdot x$ 之间的关系为


$$x_E \cdot x_E \equiv \delta_{\mu\nu} x_E^\mu x_E^\nu = |\mathbf{x}_E|^2 + (x_E^4)^2 = |\mathbf{x}|^2 - t^2 = -x \cdot x$$

 另一方面，四维 Euclid 空间中的四维动量定义为 $p_E^\mu = (\mathbf{p}_E, p_E^4)$ ，其中

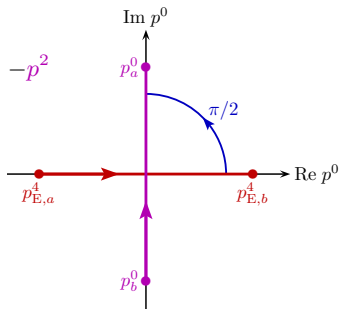
$$\mathbf{p}_E \equiv \mathbf{p}, \quad p_E^4 \equiv -ip^0$$

 p_E^μ 的内积是 $p_E^2 = |\mathbf{p}_E|^2 + (p^4)^2 = |\mathbf{p}|^2 - (p^0)^2 = -p^2$

 $p^0 = e^{i\pi/2} p_E^4$ 在 p^0 复平面上相对于 p_E^4 逆时针转动了 $\pi/2$ 角

 当 p_E^4 沿实轴正向取值时， p^0 沿虚轴正向取值

 这是 p^0 复平面上的 Wick 转动，它与 x^0 复平面上的 Wick 转动方向相反




四维 Euclid 空间与 Minkowski 时空的关系

 这样定义是为了让能量与时间的乘积**不变**，即 $p_E^4 x_E^4 = -ip^0 x^0 = p^0 x^0$ ，从而

$$e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i(p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} = e^{-i(p_E^4 x_E^4 - \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E)}$$

 这意味着平面波解所描述的**平面波运动方向**在 **Wick 转动**后**保持不变**

 注意，指数上的 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ 并不对应于 p_E^μ 与 x_E^μ 的内积

$$p_E \cdot x_E = \delta_{\mu\nu} p_E^\mu x_E^\nu = p_E^4 x_E^4 + \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E = p^0 x^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$$

四维 Euclid 空间与 Minkowski 时空的关系

🔒 这样定义是为了让能量与时间的乘积**不变**，即 $p_E^4 x_E^4 = -ip^0 ix^0 = p^0 x^0$ ，从而

$$e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i(p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} = e^{-i(p_E^4 x_E^4 - \mathbf{p}_E\cdot\mathbf{x}_E)}$$

🔑 这意味着平面波解所描述的**平面波运动方向**在 **Wick 转动**后**保持不变**

🔒 注意，指数上的 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ 并不对应于 p_E^μ 与 x_E^μ 的内积

$$\mathbf{p}_E\cdot\mathbf{x}_E = \delta_{\mu\nu} p_E^\mu x_E^\nu = p_E^4 x_E^4 + \mathbf{p}_E\cdot\mathbf{x}_E = p^0 x^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$$

🔪 当 x_E^μ 和 p_E^μ 的每个分量都取**实数值**时，**坐标体积元**和**动量体积元**在 **Minkowski 时空与四维 Euclid 空间**之间的关系为 $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = -i dx_E^4 dx_E^1 dx_E^2 dx_E^3$ 和 $d^4p = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3 = i dp_E^4 dp_E^1 dp_E^2 dp_E^3$ ，即

$$d^4x = -i d^4x_E, \quad d^4p = i d^4p_E$$

🌀 对四维 Euclid 空间坐标的偏导数表达为

$$\partial_{E,\mu} = \left(\nabla_E, \frac{\partial}{\partial x_E^4} \right) = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial (ix^0)} \right) = \left(\nabla, -i \frac{\partial}{\partial x^0} \right)$$


拉氏量和生成泛函


 在四维 Euclid 空间中，实标量场 $\phi(\mathbf{x}_E, x_E^4) = \phi(\mathbf{x}, it)$ 的拉氏量是


$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E(\mathbf{x}_E, x_E^4) &= \mathcal{L}(\mathbf{x}, it) = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial^0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_E^4 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla_E \phi)^2 - V(\phi) = -\frac{1}{2}(\partial_E^\mu \phi)\partial_{E,\mu} \phi - V(\phi)\end{aligned}$$

 生成泛函则变成


$$\begin{aligned}Z_E[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4 x (\mathcal{L} + J\phi) \right] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i(-i) \int d^4 x_E (\mathcal{L}_E + J\phi) \right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^4 x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_E^\mu \phi)\partial_{E,\mu} \phi + V(\phi) - J\phi \right] \right\}\end{aligned}$$

 当 $V(\phi) \geq 0$ 时，上式中的 $\exp \left\{ - \int d^4 x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_E^\mu \phi)\partial_{E,\mu} \phi + V(\phi) \right] \right\}$ 作为 $\phi(x_E)$ 的实值泛函为积分路径提供了一个指数衰减的权重因子，有助于使路径积分收敛

 这是四维 Euclid 空间中的路径积分相比于 Minkowski 时空的优势

 在 Minkowski 时空中，指数因子 $\exp \left\{ i \int d^4 x \left[\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - V(\phi) \right] \right\}$ 是振荡的，因而路径积分通常不会收敛

自由实标量场的生成泛函

 接下来讨论自由的实标量场，并推出 Feynman 传播子的表达式

 自由实标量场的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{0,E} = -\frac{1}{2}(\partial_E^\mu \phi)\partial_{E,\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

 生成泛函是

$$Z_{0,E}[J] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^4x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_E^\mu \phi)\partial_{E,\mu}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi \right] \right\}$$

 这里用下标 0 代表自由理论中的物理量

 生成泛函 $Z_{0,E}[J]$ 具有泛函 Gauss 积分的形式

 可以通过推广 N 维矢量空间中的 Gauss 积分来处理

N 维向量空间



考虑 N 维向量空间



N 维实值列矢量 $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ 和 $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 的内积定义为

$$(v, u) \equiv v^T u = v_i u_i$$



注意第二步用了 Einstein 求和约定




将 N 阶实方阵 A 乘到列矢量 u 上, 得到列矢量 Au , 它与 v 的内积是


$$(v, Au) = v^T Au = v_i A_{ij} u_j$$


N 维向量空间

 考虑 N 维向量空间


 N 维实值列矢量 $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ 和 $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 的内积定义为

$$(v, u) \equiv v^T u = v_i u_i$$


 注意第二步用了 Einstein 求和约定

 将 N 阶实方阵 A 乘到列矢量 u 上, 得到列矢量 Au , 它与 v 的内积是

$$(v, Au) = v^T Au = v_i A_{ij} u_j$$

 设 B 是对称、正定的 N 阶实方阵, 则 $B^T = B$, 且其本征值 b_1, b_2, \dots, b_N 都是正实数; 通过一个 N 阶实正交矩阵 O , 可将 B 对角化, 得到对角矩阵

$$\tilde{B} = OBO^T = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$$


 定义 $\tilde{v} \equiv Ov$, 利用 $O^T O = 1$ 推出

$$(v, Bv) = v^T Bv = v^T O^T OBO^T Ov = \tilde{v}^T \tilde{B} \tilde{v} = \sum_{i=1}^N b_i \tilde{v}_i^2$$


N 维 Gauss 积分公式

 记 $d^N v = dv_1 dv_2 \cdots dv_N$ ，则 **N 维 Gauss 积分**

$$\int d^N v \exp \left[-\frac{1}{2} (v, Bv) \right] = \int d^N \tilde{v} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i \tilde{v}_i^2 \right) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{b_i}} = (2\pi)^{N/2} \left(\prod_{i=1}^N b_i \right)^{-1/2}$$

 第一步作变量替换 $v \rightarrow \tilde{v}$ ，并应用体积元变换关系 $d^N \tilde{v} = |\det O| d^N v = d^N v$

 第二步用到**一维 Gauss 积分公式** $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-b\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$


 利用 $\det(AB) = \det(BA)$ ，有

$$\prod_{i=1}^N b_i = \det \tilde{B} = \det(OBO^T) = \det(O^T O B) = \det B$$

 于是得到 **N 维 Gauss 积分公式**

$$\int d^N v \exp \left[-\frac{1}{2} (v, Bv) \right] = (2\pi)^{N/2} (\det B)^{-1/2}$$

N 维 Gauss 积分公式的变种

 更进一步，可以推出 N 维 Gauss 积分公式的变种


$$\int d^N v \exp \left[-\frac{1}{2}(v, Bv) + (u, v) \right] = (2\pi)^{N/2} (\det B)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} (u, B^{-1}u) \right]$$

这里 B^{-1} 是 B 的逆矩阵。上式的推导方法如下。根据 B 矩阵的对称性，有

$$(B^{-1})^T B = (B^{-1})^T B^T = (BB^{-1})^T = \mathbf{1}, \quad v^T u = \sum_{i=1}^N v_i u_i = u^T v$$

 从而给出

$$\begin{aligned} (v - B^{-1}u)^T B (v - B^{-1}u) &= v^T Bv - u^T (B^{-1})^T Bv - v^T B B^{-1}u + u^T (B^{-1})^T B B^{-1}u \\ &= v^T Bv - 2u^T v + u^T B^{-1}u \end{aligned}$$

 引入 $w \equiv v - B^{-1}u$ ，有

$$(v, Bv) - 2(u, v) = v^T Bv - 2u^T v = w^T Bw - u^T B^{-1}u = (w, Bw) - (u, B^{-1}u)$$

四维 Euclid 空间上实值函数的内积

 作变量替换 $v \rightarrow w$ ，推出

$$\int d^N v \exp \left[-\frac{1}{2}(v, Bv) + (u, v) \right] = \int d^N w \exp \left[-\frac{1}{2}(w, Bw) + \frac{1}{2}(u, B^{-1}u) \right]$$

 根据 N 维 Gauss 积分公式作出以上积分，就得到变种公式 

四维 Euclid 空间上实值函数的内积

 作变量替换 $v \rightarrow w$ ，推出

$$\int d^N v \exp \left[-\frac{1}{2}(v, Bv) + (u, v) \right] = \int d^N w \exp \left[-\frac{1}{2}(w, Bw) + \frac{1}{2}(u, B^{-1}u) \right]$$


 根据 N 维 Gauss 积分公式作出以上积分，就得到变种公式

 对于四维 Euclid 空间上的实值函数 $f(x_E)$ 和 $g(x_E)$ ，内积定义为


$$(f, g) \equiv \int d^4 x_E f(x_E) g(x_E)$$

 这是 $(v, u) = v_i u_i$ 在函数上的推广。Euclid 空间坐标 x_E^μ 取代了原来分立指标 i 的地位，因而对 i 求和转换为对 x_E^μ 积分。类似地，将 $(v, Au) = v_i A_{ij} u_j$ 推广为


$$(f, Ag) \equiv \int d^4 x_E d^4 y_E f(x_E) A(x_E, y_E) g(y_E)$$

 N 维矢量 v 和 u 被推广为函数 $f(x_E)$ 和 $g(x_E)$ ，而函数 $A(x_E, y_E)$ 是一个无穷阶的“连续方阵”，它以空间坐标 x_E^μ 和 y_E^μ 作为行列指标

自由生成泛函中的积分

 自由生成泛函中涉及到的积分可作以下转换：


$$\begin{aligned}
 & \int d^4 x_E [(\partial_E^\mu \phi) \partial_{E,\mu} \phi + m^2 \phi^2] \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E [\partial_{x_E}^\mu \phi(x_E) \partial_{y_E,\mu} \phi(y_E) + m^2 \phi(x_E) \phi(y_E)] \delta^{(4)}(x_E - y_E) \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E \{ \partial_{x_E}^\mu [\phi(x_E) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \partial_{y_E,\mu} \phi(y_E)] \\
 & \quad - \phi(x_E) \partial_{x_E}^\mu \delta^{(4)}(x_E - y_E) \partial_{y_E,\mu} \phi(y_E) + m^2 \phi(x_E) \phi(y_E) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \} \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E \{ -\partial_{y_E,\mu} [\phi(x_E) \partial_{x_E}^\mu \delta^{(4)}(x_E - y_E) \phi(y_E)] \\
 & \quad + \phi(x_E) [\partial_{x_E}^\mu \partial_{y_E,\mu} \delta^{(4)}(x_E - y_E)] \phi(y_E) + m^2 \phi(x_E) \phi(y_E) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \} \\
 = & \int d^4 x_E d^4 y_E \phi(x_E) \left[(\partial_{x_E}^\mu \partial_{y_E,\mu} + m^2) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \right] \phi(y_E) = (\phi, B\phi)
 \end{aligned}$$


 其中 $\partial_{x_E}^\mu \equiv \partial/\partial x_{E,\mu}$ ， $\partial_{y_E,\mu} \equiv \partial/\partial y_{E,\mu}$ ，第一步用到 δ 函数的挑选性，第二、三步用了分部积分，第三、四步丢弃对积分没有贡献的全散度项

泛函 Gauss 积分的自由生成泛函

 最后一步中的**连续方阵**定义为

$$B(x_E, y_E) \equiv (\partial_{x_E}^\mu \partial_{y_E, \mu} + m^2) \delta^{(4)}(x_E - y_E)$$


 它是关于 x_E 和 y_E 对称的, 即 $B(x_E, y_E) = B(y_E, x_E)$

 从而, 根据上述**函数内积**的定义, 将**自由生成泛函**改写为

$$\begin{aligned} Z_{0,E}[J] &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^4 x_E \left[\frac{1}{2} (\partial_E^\mu \phi) \partial_{E, \mu} \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - J\phi \right] \right\} \\ &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi, B\phi) + (J, \phi) \right] \end{aligned}$$

 上式具有**泛函 Gauss 积分**的形式


泛函 Gauss 积分公式

 将 N 维 Gauss 积分公式 $\int d^N v \exp \left[-\frac{1}{2}(v, Bv) \right] = (2\pi)^{N/2} (\det B)^{-1/2}$ 推广到泛函积分的情况, N 重积分 $\int d^N v$ 化为泛函积分 $\int \mathcal{D}\phi$, 得到泛函 Gauss 积分公式

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) \right] = (\det B)^{-1/2}$$

 上式右边原本应该包含一个常数因子, 它是常数因子 $(2\pi)^{N/2}$ 的推广

 不过, 这里将它吸收到泛函测度 $\mathcal{D}\phi$ 的重新定义之中, 因而没有出现

 类似于 N 维 Gauss 积分公式的变种, 上式的变种为

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) + (J, \phi) \right] = (\det B)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2}(J, B^{-1}J) \right]$$

 在定义上, 连续方阵 $B(x_E, y_E)$ 的逆矩阵 $B^{-1}(x_E, y_E)$ 满足

$$\int d^4 y_E B^{-1}(x_E, y_E) B(y_E, z_E) = \delta^{(4)}(x_E - z_E)$$

处理自由生成泛函中的泛函积分



作出自由生成泛函中的泛函积分，得到

$$\begin{aligned} Z_{0,E}[J] &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) + (J, \phi) \right] \\ &= \mathcal{N}_0 (\det B)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E J(x_E) B^{-1}(x_E, y_E) J(y_E) \right] \end{aligned}$$



取外源 $J = 0$ ，有

$$Z_{0,E}[0] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) \right] = \mathcal{N}_0 (\det B)^{-1/2}$$



归一化条件 $Z_{0,E}[0] = 1$ 意味着 $\mathcal{N}_0 = (\det B)^{1/2}$ ，于是

$$Z_{0,E}[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E J(x_E) B^{-1}(x_E, y_E) J(y_E) \right]$$

$B^{-1}(x_E, y_E)$ 的 Fourier 变换

下面计算 $B^{-1}(x_E, y_E)$ 的具体形式

根据 Fourier 变换公式 $\delta^{(4)}(x_E - y_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)}$, 推出

$$\begin{aligned} B(x_E, y_E) &= (\partial_{x_E}^\mu \partial_{y_E, \mu} + m^2) \delta^{(4)}(x_E - y_E) \\ &= (\partial_{x_E}^\mu \partial_{y_E, \mu} + m^2) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)} \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)} (p_E^2 + m^2) \end{aligned}$$


可见, $B(x_E, y_E)$ 的 Fourier 变换是 $\tilde{B}(p_E) = p_E^2 + m^2$

从而,

$$\tilde{B}^{-1}(p_E) = \frac{1}{\tilde{B}(p_E)} = \frac{1}{p_E^2 + m^2}$$

应该是 $B^{-1}(x_E, y_E)$ 的 Fourier 变换

$B^{-1}(x_E, y_E)$ 的积分表达式

 于是,

$$B^{-1}(x_E, y_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)} \tilde{B}^{-1}(p_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)}}{p_E^2 + m^2}$$

 可以验证, 上式给出的 $B^{-1}(x_E, y_E)$ 确实满足作为**逆矩阵**的条件:

$$\begin{aligned} & \int d^4 y_E B^{-1}(x_E, y_E) B(y_E, z_E) \\ &= \int d^4 y_E \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i p_E \cdot (x_E - y_E)}}{p_E^2 + m^2} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} e^{-i q_E \cdot (y_E - z_E)} (q_E^2 + m^2) \\ &= \int \frac{d^4 p_E d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{q_E^2 + m^2}{p_E^2 + m^2} e^{-i(p_E \cdot x_E - q_E \cdot z_E)} \delta^{(4)}(p_E - q_E) \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-i p_E \cdot (x_E - z_E)} = \delta^{(4)}(x_E - z_E) \end{aligned}$$

Euclid 空间中 Feynman 传播子

🎵 将 $B^{-1}(x_E, y_E)$ 看作 **Euclid 空间**中实标量场的 **Feynman 传播子**，记为

$$D_F^E(x_E - y_E) \equiv B^{-1}(x_E, y_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + m^2} e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)}$$

🎵 它在四维 Euclid 空间中的 **Klein-Gordon 微分算符** $-\partial_{x_E}^2 + m^2 = \partial_x^2 + m^2$ 的作用下得到

$$\begin{aligned} (-\partial_{x_E}^2 + m^2) D_F^E(x_E - y_E) &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + m^2} (-\partial_{x_E}^2 + m^2) e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)} \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2 + m^2}{p_E^2 + m^2} e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)} = \delta^{(4)}(x_E - y_E) \end{aligned}$$

🎵 可见， $D_F^E(x_E - y_E)$ 正是四维 Euclid 空间中 **Klein-Gordon 方程**的 **Green 函数**

转换到 Minkowski 时空

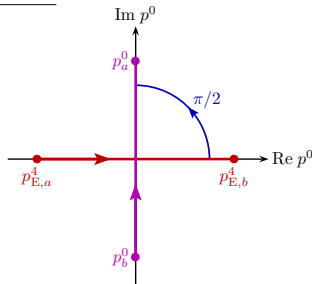
🎹 接下来推导 Minkowski 时空中的 Feynman 传播子

🥁 根据 $p_E^4 = -ip^0$ 、 $p_E^2 = -p^2$ 和 $p_E \cdot x_E = p^0 x^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ ，用 Minkowski 时空中的坐标和四维动量表达 $D_F^E(x_E - y_E)$ ，有

$$\begin{aligned} D_F^E(x_E - y_E) &= \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_E^4 \frac{e^{-ip_E \cdot (x_E - y_E)}}{p_E^2 + m^2} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} (-i dp^0) \frac{e^{-i[p^0(x^0 - y^0) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]}}{-p^2 + m^2} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp^0 \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)} \end{aligned}$$

🎷 最后一步作了变量替换 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$

🎸 上式沿实轴正向对 $p_E^4 \in (-\infty, +\infty)$ 积分等价于沿虚轴正向对 $p^0 \in (-i\infty, +i\infty)$ 积分



Minkowski 时空中的 Feynman 传播子

为了得到 Minkowski 时空中的 Feynman 传播子，需要将上式中的被积函数解析延拓到 p^0 的实轴上，对 p^0 沿实轴积分，即让积分路径顺时针转动 $\pi/2$ 角

由 $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2$ 可知，被积函数在 p^0 复平面上具有两个单极点

$$p^0 = \pm E_p$$

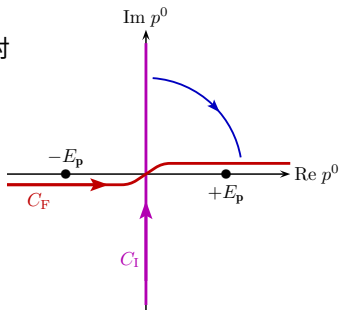
除此之外在 p^0 复平面上解析

因此，将 p^0 沿虚轴的积分路径 C_I 变形为沿实轴的积分路径时，不能让变形后的路径触碰到两个极点，只能采用图中所示的路径 C_F

C_F 无限地贴近实轴，但与两个极点之间具有无穷小的距离

这样得到的积分结果就是 Minkowski 时空中的 Feynman 传播子，表达为

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \int_{C_F} dp^0 \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}$$



$i\epsilon$ 处理方案

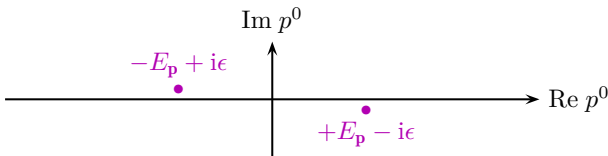
🔊 如果采用 6.4.1 小节中的 $i\epsilon$ 处理方案，将两个极点移动到 $p^0 = \pm(E_p - i\epsilon)$

🔊 其中 ϵ 是无穷小的正数，则沿实轴积分就等价于沿 C_F 积分

🔊 因此，可将 Minkowski 时空中实标量场的 Feynman 传播子表达为

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot (x-y)}$$

🔊 这与正则量子化方法得到的结果相同




Minkowski 时空中的生成泛函


 借助解析延拓，将四维 Euclid 空间中的生成泛函

$$Z_{0,E}[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E J(x_E) B^{-1}(x_E, y_E) J(y_E) \right]$$

转换到 Minkowski 时空中

 作替换 $d^4x_E d^4y_E \rightarrow id^4x id^4y = -d^4x d^4y$ 、 $J(x_E) \rightarrow J(x)$ 和 $B^{-1}(x_E, y_E) = D_F^E(x_E - y_E) \rightarrow D_F(x - y)$ ，得到自由实标量场的生成泛函

$$Z_0[J] = \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x - y) J(y) \right]$$

 根据 $\delta J(y)/\delta J(x) = \delta^{(4)}(x - y)$ ，对 $Z_0[J]$ 求一阶泛函导数，有

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(y)} &= -\frac{1}{2} Z_0[J] \frac{\delta}{\delta J(y)} \int d^4z d^4w J(z) D_F(z - w) J(w) \\ &= -Z_0[J] \int d^4z d^4w J(z) D_F(z - w) \delta^{(4)}(y - w) = -Z_0[J] \int d^4z J(z) D_F(z - y) \end{aligned}$$

两点关联函数

 求二阶泛函导数，推出

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = Z_0[J] \int d^4w J(w) D_F(w-x) \int d^4z J(z) D_F(z-y) - Z_0[J] D_F(x-y)$$

 取外源 $J=0$ ，注意到归一化条件 $Z_0[0]=1$ ，有

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \right|_{J=0} = -D_F(x-y)$$

 于是，自由实标量场理论中的两点关联函数为

$$\langle 0 | T[\phi^H(x)\phi^H(y)] | 0 \rangle_{\text{free}} = \frac{1}{i^2} \left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \right|_{J=0} = D_F(x-y)$$

 它恰好等于 Feynman 传播子

 这与正则量子化方法得到的结论是相同的