

量子场论

第 11 章 路径积分量子化

11.1 节 量子力学中的路径积分量子化

余钊焕


中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2026 年 4 月 13 日




第 11 章 路径积分量子化

 前面的章节采用正则量子化方法对各种场作了合适的量子化，给出了合理的物理结果

 不过，正则量子化具有以下局限性

- 不容易处理具有约束条件的场变量（如有质量矢量场问题）和带着时空导数的相互作用项
- 在量子化过程中不能显明地保持 Lorentz 对称性

 本章介绍一种等价的量子化方法——路径积分量子化 (path integral quantization)

 它能够克服以上困难，更适合处理场论的各种复杂情况

11.1 节 量子力学中的路径积分量子化

📖 为了理解**路径积分量子化**的基本思想，我们先从**非相对论性量子力学**开始讨论

🏠 **量子力学**中的**路径积分方法**最初于 1933 年由 **Paul Dirac** 提出，并于 1948 年由 **Richard Feynman** 完善



Paul Dirac
(1902–1984)



Richard Feynman
(1918–1988)

11.1 节 量子力学中的路径积分子量子化

📖 为了理解**路径积分子量子化**的基本思想，我们先从**非相对论性量子力学**开始讨论

🏠 **量子力学**中的**路径积分方法**最初于 1933 年由 Paul Dirac 提出，并于 1948 年由 Richard Feynman 完善

🏠 考虑只有一个**自由度**的系统，**Schrödinger 绘景**中的**哈密顿量算符** $H(q^S, p^S)$ 由**广义坐标算符** q^S 和**广义动量算符** p^S 构造

🏗️ 它们满足**正则对易关系** $[q^S, p^S] = i$

📦 q^S 和 p^S 的本征态 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 满足**本征方程**

$$q^S |q\rangle = q |q\rangle, \quad p^S |p\rangle = p |p\rangle$$

🏠 本征值 p 和 q 是**实数**。通过适当的归一化，使它们满足**正交归一关系** $\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q)$ 和 $\langle p'|p\rangle = 2\pi \delta(p' - p)$ ，以及**完备性关系**

$$\int dq |q\rangle \langle q| = \mathbb{I} \quad \text{和} \quad \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p| = \mathbb{I}$$



Paul Dirac
(1902–1984)



Richard Feynman
(1918–1988)

正则变量本征态与系统波函数

 在坐标表象中，广义动量本征态 $|p\rangle$ 与广义坐标本征态 $|q\rangle$ 的内积具有平面波形式

$$\langle q|p\rangle = e^{ipq}$$


 以上表达式的自洽性可通过下式检验：

$$2\pi \delta(p' - p) = \langle p'|p\rangle = \int dq \langle p'|q\rangle \langle q|p\rangle = \int dq (e^{ip'q})^* e^{ipq} = \int dq e^{-i(p'-p)q} = 2\pi \delta(p' - p)$$

$$\delta(q' - q) = \langle q'|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle q'|p\rangle \langle p|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipq'} (e^{ipq})^* = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} = \delta(q' - q)$$

 系统的量子状态由态矢 $|\Psi(t)\rangle^S$ 描述，它满足 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = H |\Psi(t)\rangle^S$$

 态矢 $|\Psi(t)\rangle^S$ 与广义坐标本征态 $|q\rangle$ 的内积给出坐标表象中的系统波函数

$$\Psi(q, t) = \langle q|\Psi(t)\rangle^S$$

瞬时本征态基底

 转到 **Heisenberg 绘景**，广义坐标算符为 $q^H(t) = e^{iHt} q^S e^{-iHt}$


 引入 $|q, t\rangle \equiv e^{iHt} |q\rangle$ ，则 $|q, t\rangle$ 是算符 $q^H(t)$ 在 t 时刻的**瞬时本征态**：


$$q^H(t) |q, t\rangle = e^{iHt} q^S e^{-iHt} e^{iHt} |q\rangle = e^{iHt} q^S |q\rangle = q e^{iHt} |q\rangle = q |q, t\rangle$$

 由于 $|q, t\rangle$ 是用**么正变换**定义的，**正交归一关系**和**完备性关系**得以**保持**：


$$\langle q', t | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iHt} e^{iHt} |q\rangle = \langle q' | q \rangle = \delta(q' - q)$$

$$\int dq |q, t\rangle \langle q, t| = \int dq e^{iHt} |q\rangle \langle q| e^{-iHt} = e^{iHt} \mathbb{I} e^{-iHt} = \mathbb{I}$$


 从而， t 时刻 $|q, t\rangle$ 的**集合**构成 **Hilbert 空间**中的一组**完备基底**

 但是， $|q, t\rangle$ **不能**代表系统在 t 时刻的**真实状态**，因为 **Heisenberg 绘景**中描述系统量子状态的**态矢** $|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S$ 是**不含时**的

Feynman 核

 现在，用 Heisenberg 绘景中的态矢 $|\Psi\rangle^H$ 将系统波函数表达为


$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi(t) \rangle^S = \langle q | e^{-iHt} e^{iHt} | \Psi(t) \rangle^S = \langle q, t | \Psi \rangle^H$$

 利用完备性关系将 t_b 时刻的波函数 $\Psi(q_b, t_b)$ 表达成与 t_a 时刻波函数 $\Psi(q_a, t_a)$ 相关的积分，有

$$\begin{aligned} \Psi(q_b, t_b) &= \langle q_b, t_b | \Psi \rangle^H = \int dq_a \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a | \Psi \rangle^H \\ &= \int dq_a \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \Psi(q_a, t_a) \end{aligned}$$


 从 t_a 时刻态矢 $|q_a, t_a\rangle$ 到 t_b 时刻态矢 $|q_b, t_b\rangle$ 的跃迁振幅称为 Feynman 核


$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \langle q_b | e^{-iHt_b} e^{iHt_a} | q_a \rangle = \langle q_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | q_a \rangle$$


 如果我们知道 Feynman 核，就可以由 t_a 时刻波函数求得 t_b 时刻波函数

 这种做法与求解 Schrödinger 方程是等价的


分割时间

 路径积分方法利用经典物理量的泛函积分 (functional integral) 来计算 Feynman 核，不需要借助 Hilbert 空间上的算符和态矢

 为了推出泛函积分的形式，我们先将时间间隔 $[t_a, t_b]$ 等分成 N 个小间隔，每个小间隔的长度为 ε ，则各个分点对应的时刻为 $t_n = t_a + n\varepsilon$, $n = 0, 1, \dots, N$

 其中 $t_0 = t_a$, $t_N = t_b$ ，且 $t_b - t_a = N\varepsilon > 0$

 后面会取 $N \rightarrow \infty$ 的极限，从而 $\varepsilon \rightarrow 0$ 是个无穷小量

 利用完备性关系，在 Feynman 核 $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$ 中插入 $N - 1$ 个分点时刻的坐标本征态完备集，得到

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int dq_{N-1} \cdots dq_2 dq_1 \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle$$

 其中 $q_0 = q_a$, $q_N = q_b$ ，而相邻时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的跃迁振幅为

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{-iH(t_{n+1}-t_n)} | q_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{-iH\varepsilon} | q_n \rangle$$

 注意，这里让 $N - 1$ 个分点时刻从右至左由小到大排列，以保证各相邻时刻的振幅沿时间正向演化

路径诠释

🍆 如果将当前讨论的**单自由度系统**看作一个粒子的**运动**问题，则可作以下诠释

🌶️ **Feynman 核** $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$ 是粒子从 t_a 时刻的坐标 q_a 传播到 t_b 时刻的坐标 q_b 的**概率振幅**，因此

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int dq_{N-1} \cdots dq_2 dq_1 \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle$$

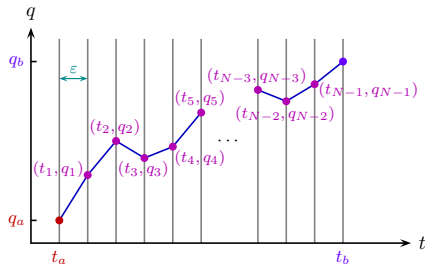
表明这个振幅可以表达为**对各条中间路径的积分**

🥒 其中**每条路径**由各中间时刻处的**坐标** q_n ($n = 1, \dots, N-1$) **连接而成**

🍆 对所有 q_n 积分意味着把**所有可能路径**都考虑进来

🍎 按照**量子力学**的**态叠加原理**，所有这些路径通过**相干叠加**贡献到 **Feynman 核**上

🥦 被积函数代表**每条路径**所占的**权重**



相邻时刻的跃迁振幅

🍇 由于 ε 是**小量**，我们可以作 **Taylor 展开**，保留到 ε 的**第 1 阶**，有

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{-iH\varepsilon} | q_n \rangle = \langle q_{n+1} | q_n \rangle - i\varepsilon \langle q_{n+1} | H(q^S, p^S) | q_n \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

🥥 如果利用**完备性关系**在 ε^1 阶振幅中插入动量本征态的完备集，可得

$$\langle q_{n+1} | H(q^S, p^S) | q_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | H(q^S, p^S) | q_n \rangle$$

🍏 通常来说，**哈密顿量算符** $H(q^S, p^S)$ 是算符 q^S 和 p^S 的多项式

🍏 对于上式右边的 $\langle p_n | H(q^S, p^S) | q_n \rangle$ ，只要拿哈密顿量算符 $H(q^S, p^S)$ 中的 q^S **算符**往右作用到 $|q_n\rangle$ 上、 p^S **算符**往左作用到 $\langle p_n|$ 上，就能根据**本征方程**得到相应的**本征值** q_n 和 p_n ，从而将**哈密顿量算符**转化成**经典的哈密顿量函数**

🍑 然而，由于 q^S 与 p^S **不是**相互对易的，哈密顿量算符中 q^S 与 p^S 的**排列次序**会影响计算结果

Weyl 排序

在此，我们假设哈密顿量算符中 q^S 和 p^S 的排序遵循 Weyl 排序

具体来说，若经典的哈密顿量函数表达为 $H(q, p)$ ，则先对它作 Fourier 变换，得

$$\tilde{H}(\xi, \eta) = \int dq dp e^{-i(\xi q + \eta p)} H(q, p)$$

再作变换参数为算符 q^S 和 p^S 的 Fourier 逆变换，给出 Weyl 排序的哈密顿量算符

$$H(q^S, p^S) = \int \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\eta}{2\pi} e^{i(\xi q^S + \eta p^S)} \tilde{H}(\xi, \eta)$$

这样做的结果是以相同的权重对所有可能的排序方式进行平均

比如，若 $H(q, p) = q^3 p$ ，则 Weyl 排序给出的结果是

$$H(q^S, p^S) = (q^S)^3 p^S - \frac{3i}{2} (q^S)^2 = \frac{1}{4} [(q^S)^3 p^S + (q^S)^2 p^S q^S + q^S p^S (q^S)^2 + p^S (q^S)^3]$$

第二步的转换用到对易关系 $[q^S, p^S] = i$



Hermann Weyl
(1885–1955)

Weyl 排序下的相邻时刻跃迁振幅

🍷 采用 Weyl 排序, 有

$$\langle q_{n+1} | H(q^S, p^S) | q_n \rangle = \int \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\eta}{2\pi} \langle q_{n+1} | e^{i(\xi q^S + \eta p^S)} | q_n \rangle \tilde{H}(\xi, \eta)$$

🍌 根据指数函数的级数形式, 将被积函数中的 $\langle q_{n+1} | e^{i(\xi q^S + \eta p^S)} | q_n \rangle$ 展开为

$$\langle q_{n+1} | e^{i(\xi q^S + \eta p^S)} | q_n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \langle q_{n+1} | (\xi q^S + \eta p^S)^k | q_n \rangle$$

🍪 讲义中用数学归纳法证明, 上式右边通项中的 $\langle q_{n+1} | (\xi q^S + \eta p^S)^k | q_n \rangle$ 可表达为

$$\langle q_{n+1} | (\xi q^S + \eta p^S)^k | q_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1} - q_n)} (\xi \bar{q}_n + \eta p_n)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

🍩 其中 $\bar{q}_n \equiv \frac{q_{n+1} + q_n}{2}$ 是 q_{n+1} 和 q_n 的算术平均值。从而

$$\langle q_{n+1} | e^{i(\xi q^S + \eta p^S)} | q_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1} - q_n)} e^{i(\xi \bar{q}_n + \eta p_n)}$$

用经典函数表达的 Feynman 核

 作 **Fourier 逆变换**，推出

$$\begin{aligned}\langle q_{n+1} | H(q^S, p^S) | q_n \rangle &= \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)} \int \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\eta}{2\pi} e^{i(\xi\bar{q}_n + \eta p_n)} \tilde{H}(\xi, \eta) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)} H(\bar{q}_n, p_n)\end{aligned}$$

 相邻时刻的跃迁振幅化为


$$\begin{aligned}\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \langle q_{n+1} | q_n \rangle - i\epsilon \langle q_{n+1} | H(q^S, p^S) | q_n \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)} [1 - i\epsilon H(\bar{q}_n, p_n)] + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

 取 $N \rightarrow \infty$ 的**极限**，**Feynman 核**表达为

$$\begin{aligned}\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle &= \int dq_{N-1} \cdots dq_2 dq_1 \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)} [1 - i\epsilon H(\bar{q}_n, p_n)] \right\}\end{aligned}$$

 注意， $N \rightarrow \infty$ 意味着 $\epsilon \rightarrow 0$ ，故 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 的贡献相对于 ϵ^1 阶贡献可以忽略


指数函数的极限表达式

 指数函数的极限表达式 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$ 可推广为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \right)$$

 **证明** 对指数函数的极限表达式两边取对数，有


$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \ln \left(1 + \frac{x}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \ln e^x = x$$

 对 $\ln \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} N \ln \left(1 + \frac{x_n}{N}\right)$ 取 $N \rightarrow \infty$ 的极限，推出


$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \lim_{N \rightarrow \infty} N \ln \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

 对上式两边取指数，就得到推广的公式 

指数函数的极限表达式

 指数函数的极限表达式 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$ 可推广为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \right)$$


 取 $x_n = -iN\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n) = -i(t_b - t_a)H(\bar{q}_n, p_n)$, 则


$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} [1 - i\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)] = \exp \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} [-i\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)] \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} e^{-i\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)}$$


 利用上式将 Feynman 核化为

$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{n=0}^{N-1} \left[\frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1} - q_n) - i\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi} \exp \left\{ i\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} - H(\bar{q}_n, p_n) \right] \right\} \end{aligned}$$


泛函积分

 在 $N \rightarrow \infty$ 极限下, t - q 平面上相邻的点 (t_n, q_n) 与 (t_{n+1}, q_{n+1}) 之间的距离无穷小, 故所有的点 (t_n, q_n) 连续地连接成函数 $q(t)$, 满足 $q_n = q(t_n)$


 类似地, t - p 平面上所有的点 (t_n, p_n) 连续地连接成函数 $p(t)$, 满足 $p_n = p(t_n)$

 于是, Feynman 核表达式中的积分变成泛函积分, 用以下符号标记:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi} \rightarrow \int \mathcal{D}p$$

 另一方面, 在此极限下, $(q_{n+1} - q_n)/\varepsilon$ 化成 $q(t)$ 的时间导数,

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} = \frac{q_{n+1} - q_n}{t_{n+1} - t_n} \rightarrow \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t_n} \equiv \dot{q}(t_n)$$

 而形如下式的求和式化为积分,

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \rightarrow \int_{t_a}^{t_b} dt f(t)$$

相空间中的路径积分

👉 利用这些记号将 **Feynman 核** 改写成紧凑的**泛函积分**形式

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} dt \{ p(t)\dot{q}(t) - H[q(t), p(t)] \} \right)$$

🍩 上式称为**相空间中的路径积分**，它对**坐标空间中所有**满足**边界条件** $q(t_a) = q_a$ 和 $q(t_b) = q_b$ 的**路径** $q(t)$ 进行积分，也对**动量空间中所有的** $p(t)$ **路径**进行积分

🍉 **泛函** (functional) 是定义在函数集合上的映射，它将函数映射成实数或复数，也就是说，泛函是**函数的函数**

🔧 上式右边的被积函数是**函数** $q(t)$ 和 $p(t)$ 的**泛函**，而相应的积分是一个**泛函积分**

🍷 这种积分是对**无穷多条路径** $q(t)$ 和 $p(t)$ 进行的，因而也称为**路径积分**，相应的**积分测度** $\mathcal{D}q$ 和 $\mathcal{D}p$ 称为**泛函测度** (functional measure)

路径积分量子化

🍪 相空间中的路径积分

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} dt \{ p(t) \dot{q}(t) - H[q(t), p(t)] \} \right)$$

告诉我们，以**被积泛函**作为**权重**对相空间中**无穷多条可能的路径** $q(t)$ 和 $p(t)$ 进行**积分**，就可以得到 **Feynman 核**

🍪 在**路径积分**表达式中，只涉及到 **c 数**，**不涉及 Hilbert 空间上的算符和态矢**，但积分结果却给出了像 Feynman 核这样的**量子跃迁振幅**，已然实现了量子化

🍪 这样的量子化方法称为**路径积分量子化**

🍪 与**哈密顿量定义** $H(q, p) \equiv p\dot{q} - L$ 对比，发现上式花括号中函数 $p\dot{q} - H(q, p)$ 在形式上很像**拉格朗日量** L ；但是， $H(q, p) \equiv p\dot{q} - L$ 中的**广义动量**是用 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ 定义的，而上式的 $p(t)$ 是**独立的变量**，源自**动量本征态完备集**的插入

🍪 因此，这里的 $p\dot{q} - H(q, p)$ 跟**拉格朗日量** L 并不完全相同

哈密顿量依赖于广义动量的二次方

☕ 对于一维空间中一个粒子在势场中的运动，哈密顿量的形式为

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

🍲 第一项描述粒子的动能，它正比于粒子动量 p 的平方，而 m 是粒子的质量

☕ 第二项 $V(q)$ 是势能，它不依赖于 p

👛 此时，哈密顿量对广义动量的依赖性体现为广义动量的二次项，这很常见

🔍 像这样的情况，可以把广义动量积分显明地作出来，简化泛函积分的形式

🎯 对于上述哈密顿量，Feynman 核中的对 p_n 的积分化为

$$\begin{aligned} I_n &\equiv \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp \left\{ i\varepsilon \left[p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} - H(\bar{q}_n, p_n) \right] \right\} \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp \left\{ i\varepsilon \left[p_n \dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} - V(\bar{q}_n) \right] \right\} \end{aligned}$$

📌 其中 $\dot{q}_n \equiv (q_{n+1} - q_n)/\varepsilon$

Gauss 积分

🍺 将上式方括号中的前两项凑成**完全平方**的形式，有

$$\begin{aligned} p_n \dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} &= -\frac{1}{2m} (p_n^2 - 2mp_n \dot{q}_n + m^2 \dot{q}_n^2 - m^2 \dot{q}_n^2) \\ &= -\frac{1}{2m} (p_n - m\dot{q}_n)^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_n^2 = -\frac{\tilde{p}_n^2}{2m} + \frac{m}{2} \dot{q}_n^2 \end{aligned}$$

🍺 其中 $\tilde{p}_n \equiv p_n - m\dot{q}_n$

🍷 将**积分变量**换成 \tilde{p}_n ，有 $dp_n = d\tilde{p}_n$ ，故

$$I_n = \exp \left\{ i\epsilon \left[\frac{m}{2} \dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n) \right] \right\} \int \frac{d\tilde{p}_n}{2\pi} \exp \left(-\frac{i\epsilon \tilde{p}_n^2}{2m} \right)$$

🍷 现在，对 \tilde{p}_n 的积分具有 **Gauss 积分**的形式。Gauss 积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-b\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

🍷 这个积分在 $\text{Re} b > 0$ 的情况下才是**收敛**的

积掉广义动量

🍷 在 b 的复平面上作解析延拓, 就能在 $\text{Re } b \leq 0$ 的情况下使用 Gauss 积分公式

🍷 取 $b = \frac{i\varepsilon}{2m}$, 推出 $\int \frac{d\tilde{p}_n}{2\pi} \exp\left(-\frac{i\varepsilon\tilde{p}_n^2}{2m}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2m\pi}{i\varepsilon}} = \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m}\right)^{-1/2}$

🍷 从而 $I_n = \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m}\right)^{-1/2} \exp\left\{i\varepsilon\left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n)\right]\right\}$

🍷 利用上式将 Feynman 核化为


$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=0}^{N-1} I_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m}\right)^{-N/2} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \exp\left\{i\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n)\right]\right\} \\ &= C \int \mathcal{D}q \exp\left\{i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right]\right\} \end{aligned}$$

🍷 其中 $C \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m}\right)^{-N/2}$ 是一个发散的归一化常数

坐标空间中的路径积分

 注意， $\frac{m}{2} \dot{q}^2$ 是用**广义速度**表达的**粒子动能**，而**动能**与**势能**之差正是**拉格朗日量**

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$$


 对时间 t 积分，得到**作用量**

$$S(q, \dot{q}) = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right]$$

 它是 $q(t)$ 和 $\dot{q}(t)$ 的**泛函**

 以此将 **Feynman 核** 改写为

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = C \int \mathcal{D}q \exp[iS(q, \dot{q})]$$

 上式称为**坐标空间中的路径积分**，它只对**坐标空间**中的 $q(t)$ **路径**进行积分

从哈密顿体系过渡到拉格朗日体系

🎄 从**分析力学**的角度来看，由**哈密顿量** $H(q, p)$ 求**拉格朗日量** $L(q, \dot{q})$ 的流程如下

🏰 先寻找**函数** $p\dot{q} - H(q, p)$ 对 p 的偏导数为零的**稳定点** (stationary point)，即

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} [p\dot{q} - H(q, p)] = \dot{q} - \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}$$

📖 然后由**哈密顿量** $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ 推出

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} = \frac{p}{m}$$


🍊 即 p 与 \dot{q} 的关系是 $p = m\dot{q}$

🍷 将它代入到 $p\dot{q} - H(q, p)$ ，就推出拉格朗日量 $L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$

📖 这是从**哈密顿体系过渡到拉格朗日体系**的过程


🌟 而前面的讨论表明，在**路径积分中积掉** $p(t)$ **函数也能实现这种过渡**

经典极限


 假如把约化普朗克常数 $\hbar = 1$ 显明写出来, 则 $e^{iHt} = e^{iHt/\hbar}$, 而 Feynman 核变成


$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = C \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q, \dot{q}) \right]$$


 $\hbar \rightarrow 0$ 是量子力学的经典极限, 在这里对应于 $S(q, \dot{q}) \gg \hbar$


 如果 $S(q, \dot{q}) \gg \hbar$, 则被积函数 $\exp \left[i \frac{S(q, \dot{q})}{\hbar} \right] = \cos \left[\frac{S(q, \dot{q})}{\hbar} \right] + i \sin \left[\frac{S(q, \dot{q})}{\hbar} \right]$

变成一个快速振荡的函数, 导致相邻 $q(t)$ 路径的贡献会相互抵消

 这种抵消在 $S(q, \dot{q})$ 变化缓慢的区域才可以避免, 因此, 对路径积分的主要贡献来自于作用量 $S(q, \dot{q})$ 关于 $q(t)$ 和 $\dot{q}(t)$ 的变分稳定点处, 即满足 $\delta S(q, \dot{q}) = 0$ 的地方

 而作用量原理告诉我们, $\delta S(q, \dot{q}) = 0$ 对应于系统的经典运动轨迹

 可见, 在 $S(q, \dot{q})$ 的变分稳定点处求路径积分, 就可以得到系统的经典描述

 如果满足 $\delta S(q, \dot{q}) = 0$ 的经典运动轨迹不只一条, 比如在电子双缝干涉实验中的情况, 那么这些轨迹的贡献会发生相干叠加, 体现出显著的量子效应

吸收归一化常数

🎮 归一化常数 $C = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi i \varepsilon}{m} \right)^{-N/2}$ 是发散的

📍 但这并没有妨碍我们从 $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = C \int \mathcal{D}q \exp[iS(q, \dot{q})]$ 中获取有用信息

🎲 因为重要的是路径积分对 $q(t)$ 泛函的依赖性，而不是路径积分的绝对大小

🔮 因此，我们可以把 C 吸收到泛函测度 $\mathcal{D}q$ 的重新定义之中，将坐标空间中的路径积分公式改写为

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}q \exp[iS(q, \dot{q})]$$