

量子场论

第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数

10.4 节至 10.6 节

余钊焕


中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 4 月 1 日




渐近哈密顿量


 将系统的哈密顿量分解为 $H(\phi, \pi) = H_0(\phi, \pi) + H_1(\phi, \pi)$

 其中 H_0 是自由部分， H_1 是相互作用部分

 它们一般可表达为 ϕ 、 π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的全空间积分

 比如自由实标量场的哈密顿量是 $H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$

 $\phi(x)$ 所满足的 Heisenberg 运动方程是 $i\partial_0\phi = [\phi, H(\phi, \pi)]$

 类似地， $\phi_{\text{in}}(x)$ 的运动方程是 $i\partial_0\phi_{\text{in}} = [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})]$ ，其中 $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 形式相同，但需要将 H_0 中的裸质量 m_0 换成物理质量 m

渐近哈密顿量

♊ 将系统的哈密顿量分解为 $H(\phi, \pi) = H_0(\phi, \pi) + H_1(\phi, \pi)$

🎨 其中 H_0 是自由部分， H_1 是相互作用部分

📍 它们一般可表达为 ϕ 、 π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的全空间积分

🎱 比如自由实标量场的哈密顿量是 $H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$

🎈 $\phi(x)$ 所满足的 Heisenberg 运动方程是 $i\partial_0\phi = [\phi, H(\phi, \pi)]$

👤 类似地， $\phi_{\text{in}}(x)$ 的运动方程是 $i\partial_0\phi_{\text{in}} = [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})]$ ，其中 $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 形式相同，但需要将 H_0 中的裸质量 m_0 换成物理质量 m

🎉 例如，在实标量场的 ϕ^4 理论中，

$$H_0(\phi, \pi) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m_0^2\phi^2], \quad H_1(\phi, \pi) = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi^4$$

👩‍🔬 而渐近哈密顿量为 $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla\phi_{\text{in}})^2 + m^2\phi_{\text{in}}^2]$

$$\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

注意 $H(\phi, \pi)$ 是 ϕ 、 π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的积分，在 $H(\phi, \pi)$ 里所有相邻算符之间插入 $W^\dagger W = \mathbb{I}$ ，利用 $\phi_{\text{in}}(x) = W(t)\phi(x)W^\dagger(t)$ 和 $\pi_{\text{in}}(x) = W(t)\pi(x)W^\dagger(t)$ ，推出

$$WH(\phi, \pi)W^\dagger = H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

$W[\phi, H(\phi, \pi)]W^\dagger = -i(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\text{in}} + [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})] + i\phi_{\text{in}}(\partial_0 W)W^\dagger$ 化为

$$[\phi_{\text{in}}, H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})] = -i[(\partial_0 W)W^\dagger, \phi_{\text{in}}] + [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})]$$

这意味着

$$[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}] = 0$$

其中 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \equiv H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$

将 ϕ 和 ϕ_{in} 替换成 π 和 π_{in} ，重复上述推导过程，得到

$$[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}), \pi_{\text{in}}] = 0$$

裸质量与物理质量的平方差

📏 注意，物理质量 m 与裸质量 m_0 不同

🎲 这里的 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \equiv H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 也与 $H_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 有所差别

🚗 如果相互作用项不包含 $\phi(x)$ 的时空导数 $\partial_\mu \phi$ ，则 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 不依赖于 $\pi_{\text{in}}(x)$ ，只依赖于 $\phi_{\text{in}}(x)$ ；下面只考虑这种情况，将它改记为 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}})$

⑧ 比如，在 ϕ^4 理论中，有

$$H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla\phi_{\text{in}})^2 + m_0^2\phi_{\text{in}}^2] + \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi_{\text{in}}^4$$

$$H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla\phi_{\text{in}})^2 + m^2\phi_{\text{in}}^2]$$

📍 故 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(m_0^2 - m^2)\phi_{\text{in}}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\text{in}}^4 \right] = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\delta m^2\phi_{\text{in}}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\text{in}}^4 \right)$

🎮 其中 $\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2$ 是裸质量与物理质量的平方差

$W(t)$ 的运动方程


m_k $[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}), \phi_{in}] = 0$ 和 $[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}), \pi_{in}] = 0$ 表明, **算符**
 $A \equiv i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in})$ 与 ϕ_{in} 、 π_{in} 都是**对易的**


笔 由于 ϕ_{in} 和 π_{in} 是系统的**正则变量**, 用它们可以构建**一组算符完备集**, 而这组完备集中的任意算符都与 A **对易**, 这说明**算符 A 必定正比于恒等算符 I**, 即

$$i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}) = c(t) \mathbb{I}$$

书 其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的 **c 数函数**

$W(t)$ 的运动方程

 $[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}] = 0$ 和 $[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}), \pi_{\text{in}}] = 0$ 表明, 算符 $A \equiv i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}})$ 与 ϕ_{in} 、 π_{in} 都是对易的


 由于 ϕ_{in} 和 π_{in} 是系统的正则变量, 用它们可以构建一组算符完备集, 而这组完备集中的任意算符都与 A 对易, 这说明算符 A 必定正比于恒等算符 \mathbb{I} , 即


$$i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) = c(t)\mathbb{I}$$

 其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的 c 数函数; 改写上式, 得到 $W(t)$ 的运动方程

$$i\partial_0 W = \tilde{H}_1^c(t)W$$


 这里 $\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) + c(t)$ 是用入场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 表达出来的时间 t 的函数

 此方程与 6.2 节时间演化算符的微分方程 $i\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t)U(t, t_0)$ 形式相同


 采用类似的求解方法, 将解表达为


$$W(t) = W(t_0) - i \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{H}_1^c(t_1)W(t_1)$$

时间演化算符的 Dyson 级数


 重复迭代，利用**时序乘积**得到


$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathbb{T}[\tilde{H}_1^c(t_1) \cdots \tilde{H}_1^c(t_n)] W(t_0) \\ &= \mathbb{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \tilde{H}_1^c(t') \right] W(t_0) \end{aligned}$$

 在 6.2 节中，**时间演化算符** $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$ 依赖于联系 **Heisenberg 绘景** 和**相互作用绘景**的**含时么正算符** $V(t)$

 现在**渐近场** $\phi_{\text{in}}(x)$ 扮演了**相互作用绘景**的**场算符**的角色，因此应该用 $W(t)$ 取代 $V(t)$ ，将**时间演化算符**定义为

$$U(t, t_0) \equiv W(t)W^\dagger(t_0) = \mathbb{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \tilde{H}_1^c(t') \right]$$

 这个结果也是一个 **Dyson 级数**，只不过 $\tilde{H}_1^c(t')$ 取代了原来的 $H_1^I(t')$

 这样定义的时间演化算符仍然具有 6.2 节所描述的性质

n 点关联函数与渐近场

📌 接下来用渐近场来表达 n 点关联函数，由变换关系 $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t)$ 得

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T[W^\dagger(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)W(t_2)\cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)W(t_n)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T[W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)W(t_2) \\ &\quad \times \cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)W(t_n)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | W^\dagger(+\infty) T[U(+\infty, t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)U(t_1, t_2)\phi_{\text{in}}(x_2) \\ &\quad \times \cdots U(t_{n-1}, t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)U(t_n, -\infty)] W(-\infty) | 0 \rangle \end{aligned}$$

🔒 第三步在方括号中插入 $W^\dagger(+\infty)W(+\infty) = \mathbb{I}$ 和 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty) = \mathbb{I}$

🔑 最后一步改写成时间演化算符 $U(t, t_0) \equiv W(t)W^\dagger(t_0)$ 的形式

🔒 由于时序乘积里面的含时算符能够任意移动，可以让里面的时间演化算符相邻排列，再由乘法规则 $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$ 得到

$$\begin{aligned} U(+\infty, t_1)U(t_1, t_2)\cdots U(t_{n-1}, t_n)U(t_n, -\infty) &= U(+\infty, -\infty) \\ G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | W^\dagger(+\infty) T[\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)U(+\infty, -\infty)] W(-\infty) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$$

✂ 现在需要知道 $W(+\infty)$ 和 $W(-\infty)$ 对真空态 $|0\rangle$ 作用的结果

✂ 设 $|\Psi_p; \text{in}\rangle$ 是包含一个四维动量为 p^μ 的粒子的任意入态，表达为

$$|\Psi_p; \text{in}\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p, \text{in}}^\dagger |\Psi; \text{in}\rangle$$

▴ 其中 $|\Psi; \text{in}\rangle$ 包含除这个粒子之外的其它成分

📎 利用 $a_{p, \text{in}} = \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x)$ 推出

$$\begin{aligned} \langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle &= \sqrt{2E_p} \langle \Psi; \text{in} | a_{p, \text{in}} W(-\infty) | 0 \rangle \\ &= i \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | \phi_{\text{in}}(x) W(-\infty) | 0 \rangle \\ &= i \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | W(t) \phi(x) W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle \end{aligned}$$

📎 已用到变换关系 $\phi_{\text{in}}(x) = W(t) \phi(x) W^\dagger(t)$ ；取 $t \rightarrow -\infty$ 的极限，由渐近条件得

$$\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle = i \sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle$$

处理 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$

$$\begin{aligned} e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 [W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t)] &= e^{ip \cdot x} \partial_0 W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) + e^{ip \cdot x} W(t) \partial_0 \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) \\ &\quad + e^{ip \cdot x} W(t) \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 W^\dagger(t) - (\partial_0 e^{ip \cdot x}) W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) \\ &= W(t) [e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x)] W^\dagger(t) \\ &\quad + e^{ip \cdot x} [\partial_0 W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) + W(t) \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 W^\dagger(t)] \end{aligned}$$


从而 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$

$$\begin{aligned} &= i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle \\ &= i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x \langle \Psi; \text{in} | W(t) [e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x)] W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle \\ &\quad + i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \langle \Psi; \text{in} | [\partial_0 W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + W(t) \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 W^\dagger(t)] W(-\infty) | 0 \rangle \\ &= \sqrt{2E_p Z} \langle \Psi; \text{in} | W(-\infty) a_{p, \text{in}} | 0 \rangle \\ &\quad + i \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \langle \Psi; \text{in} | [\partial_0 W(t) \phi(x) + W(t) \phi(x) \partial_0 W^\dagger(t) W(t)] | 0 \rangle \end{aligned}$$




第一项的推导用到 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty) = \mathbb{I}$ ，由于 $a_{p, \text{in}} | 0 \rangle = 0$ ，此项贡献为零


$W(+\infty) |0\rangle, W(-\infty) |0\rangle$ 与真空态

 用变换关系 $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t)$ 将 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) |0\rangle$ **第二项**中算符化为


$$\begin{aligned} & \partial_0 W(t)\phi(x) + W(t)\phi(x)\partial_0 W^\dagger(t)W(t) \\ = & \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t) + \phi_{\text{in}}(x)W(t)\partial_0 W^\dagger(t)W(t) \\ = & \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t) + \phi_{\text{in}}(x)\{\partial_0[W(t)W^\dagger(t)] - \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\}W(t) \\ = & [\partial_0 W(t)W^\dagger(t), \phi_{\text{in}}(x)]W(t) = -i[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\text{in}}(x)]W(t) \end{aligned}$$


 最后一步用到**运动方程** $i\partial_0 W = \tilde{H}_1^c(t)W$

 已经假设 $\tilde{H}_1^c(t)$ **只依赖于** $\phi_{\text{in}}(x)$ ，因此等时对易关系保证 $[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\text{in}}(x)] = 0$

 从而 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) |0\rangle$ **第二项的贡献也是零**，于是

$$\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) |0\rangle = 0$$

 由于 $|\Psi_p; \text{in}\rangle$ 是至少包含一个粒子的**任意入态**，上式表明**态矢** $W(-\infty) |0\rangle$ **不包含任何粒子**，它至多与**真空态**相差一个**相位因子** c_- ，即 $W(-\infty) |0\rangle = c_- |0\rangle$

 类似地，可以推出 $W(+\infty) |0\rangle = c_+ |0\rangle$ ，其中 c_+ 是另一个**相位因子**

表达 n 点关联函数

✎ 由真空态的归一化条件和 $W(t)$ 的么正性得

$$\begin{aligned} 1 &= \langle 0|0\rangle = \langle 0|W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)|0\rangle \\ &= \langle 0|W^\dagger(+\infty)U(+\infty, -\infty)W(-\infty)|0\rangle = c_+^*c_- \langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle \end{aligned}$$

📖 故 $c_+^*c_- = \frac{1}{\langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle}$

📖 结合 Dyson 级数，将 n 点关联函数表达为


$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0|W^\dagger(+\infty) \mathbb{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n)U(+\infty, -\infty)]W(-\infty)|0\rangle \\ &= c_+^*c_- \langle 0|\mathbb{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n)U(+\infty, -\infty)]|0\rangle \\ &= \frac{\langle 0|\mathbb{T}\left\{\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1^c(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\mathbb{T}\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1^c(t)\right]|0\rangle} \end{aligned}$$

📅 将 $\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) + c(t)$ 代入上式的分子和分母中


📅 则 $c(t)$ 贡献一个因子 $\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt c(t)\right]$ ，分子和分母的这个共同因子相互抵消

化简 n 点关联函数

 因此, $c(t)$ 实际上对 n 点关联函数没有贡献

 可以用 $\tilde{H}_1(t) = \tilde{H}_1(\phi_{in}) = H(\phi_{in}, \pi_{in}) - H_{in}(\phi_{in}, \pi_{in})$ 替代 $\tilde{H}_1^c(t)$, 得到

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | T \left\{ \phi_{in}(x_1) \cdots \phi_{in}(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$

 其中归一化因子

$$\mathcal{N} \equiv \langle 0 | T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1(t) \right] | 0 \rangle$$

只是一个相位因子

 设 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 是 $\tilde{H}_1(t)$ 的空间密度, 它是用渐近场 $\phi_{in}(x)$ 表达的, 满足

$$\tilde{H}_1(t) = \int d^3x \tilde{\mathcal{H}}_1(x)$$

n 点关联函数的微扰级数

 将指数函数展开，得到 n 点关联函数的微扰级数


$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | \mathbb{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4y_1 \cdots d^4y_k \langle 0 | \mathbb{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)] | 0 \rangle$$

 其中归一化因子展开为

$$\mathcal{N} = \langle 0 | \mathbb{T} \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] | 0 \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4y_1 \cdots d^4y_k \langle 0 | \mathbb{T} [\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)] | 0 \rangle.$$

 可以利用 **Wick 定理** 处理这个微扰级数，并导出 **Feynman 图**

10.5 节 多点关联函数的 Feynman 图

🐹 本节在 ϕ^4 理论中讨论多点关联函数的微扰论，并画出 Feynman 图

🌾 将 ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分， $\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x)$

$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x), \quad \mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x)$$

🌽 可见， $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 相互作用项 \mathcal{H}_λ 之外，还出现了 ϕ_{in} 的二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ ，它跟质量重整化 (mass renormalization) 有关

10.5 节 多点关联函数的 Feynman 图

🐻 本节在 ϕ^4 理论中讨论多点关联函数的微扰论，并画出 Feynman 图

🌾 将 ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分， $\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x)$

$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x), \quad \mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x)$$

🌽 可见， $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 相互作用项 \mathcal{H}_λ 之外，还出现了 ϕ_{in} 的二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ ，它跟质量重整化 (mass renormalization) 有关

🍷 根据 7.3 节讨论， \mathcal{H}_λ 在位置空间中给出的顶点规则为

$$= -i\lambda \int d^4x$$


🍊 类似地， $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 给出位置空间“顶点规则”

$$\text{---} \times \text{---} = -i\delta m^2 \int d^4x$$


🍏 相应的动量空间规则为

$$\text{---} \times \text{---} = -i\delta m^2$$

两点关联函数的分解


 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 第一项是 6.4.1 小节讨论的**实标量场 Feynman 传播子**,

$$\langle 0 | \mathbf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathbf{N}[\overline{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)}] | 0 \rangle = D_{\text{F}}(x_1 - x_2) = D_{12}$$


 为便于书写, 这里引进 Feynman 传播子的**缩写记号**, 定义为

$$D_{ij} \equiv D_{\text{F}}(x_i - x_j) = D_{ji}, \quad D_{xy} \equiv D_{\text{F}}(x - y) = D_{yx}, \quad D_{ix} \equiv D_{\text{F}}(x_i - x) = D_{xi}$$

两点关联函数的分解

 $NG^{(2)}(x_1, x_2)$ 第一项是 6.4.1 小节讨论的**实标量场 Feynman 传播子**,

$$\langle 0 | T[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | \text{N}[\overbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)}] | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) = D_{12}$$

 为便于书写, 这里引进 Feynman 传播子的**缩写记号**, 定义为

$$D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j) = D_{ji}, \quad D_{xy} \equiv D_F(x - y) = D_{yx}, \quad D_{ix} \equiv D_F(x_i - x) = D_{xi}$$

 $NG^{(2)}(x_1, x_2)$ **第二项**和**第三项**中的真空期待值分解为

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}^2(x)] | 0 \rangle &= A_2^2 \langle 0 | \text{N}[\overbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}] | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | \text{N}[\underbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)}\underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}] | 0 \rangle \\ &= 2D_{1x}D_{x2} + D_{12}D_{xx} \\ \langle 0 | T[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}^4(x)] | 0 \rangle &= C_4^2 A_2^2 \langle 0 | \text{N}[\overbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}\underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}] | 0 \rangle \\ &\quad + C_3^1 \langle 0 | \text{N}[\underbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)}\underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}\underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}] | 0 \rangle \\ &= 12D_{1x}D_{xx}D_{x2} + 3D_{12}D_{xx}D_{xx} \end{aligned}$$



用 Feynman 图表示两点关联函数

🐰 将这些结果代回 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ ，根据位置空间 Feynman 规则画出 Feynman 图，

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2) &= D_{12} - i\delta m^2 \int d^4x \left(D_{1x}D_{x2} + \frac{1}{2} D_{12}D_{xx} \right) \\
 &\quad - i\lambda \int d^4x \left(\frac{1}{2} D_{1x}D_{xx}D_{x2} + \frac{1}{8} D_{12}D_{xx}D_{xx} \right) + \dots \\
 &= x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{---} \times \text{---} \bullet x_2 + \text{---} \circ \text{---} \bullet x_1 \text{---} \bullet x_2 \\
 &\quad + \text{---} \bullet x_1 \text{---} \bullet x_2 + \text{---} \bullet x_1 \text{---} \bullet x_2 + \dots
 \end{aligned}$$

(Diagram 1: Propagator between x1 and x2)
 (Diagram 2: Propagator between x1 and x, and x and x2, with a cross at x)
 (Diagram 3: Loop with x1 and x2 as external points, and x as internal vertex)
 (Diagram 4: Tadpole diagram with x1 and x2 as external points, and x as internal vertex)
 (Diagram 5: Self-energy diagram with x1 and x2 as external points, and x as internal vertex)

🍏 第一步中 3 个分数因子的分母正是 Feynman 图的对称性因子

🍒 2 点关联函数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ 的宗量是两个时空点 x_1^μ 和 x_2^μ ，称为外点 (external point)，在多点关联函数的 Feynman 图中用圆点表示

🍇 一般地， n 点关联函数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 描述 n 个外点之间的关联，根据 LSZ 约化公式，这 n 个外点对应于 T 矩阵元相应 Feynman 图中的 n 条外线

气泡图和连通图

👾 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 中有 3 项包含 D_{12} ，它对应于从 x_1 到 x_2 的 Feynman 传播子
合并这 3 个同类项，将 D_{12} 的图形提取出来，余下 1 加上两个气泡图：

$$\begin{aligned} \mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2) = & x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 \times \left(1 + x \text{ * } \bigcirc + \bigcirc \text{---} \bigcirc \right) \\ & + x_1 \bullet \text{---} \times \text{---} \bullet x_2 + \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 \end{array} + \dots \end{aligned}$$

🍎 气泡图的特点是不与任何外点相连；将各个外点都连接起来且不包含气泡图的 Feynman 图称为**连通图** (connected diagram)

🍈 可见，这里第一项因式分解为**连通图**与 1 加两个气泡图的**乘积**，这样的**因子化** (factorization) 是**普遍**的，下面作一般论述

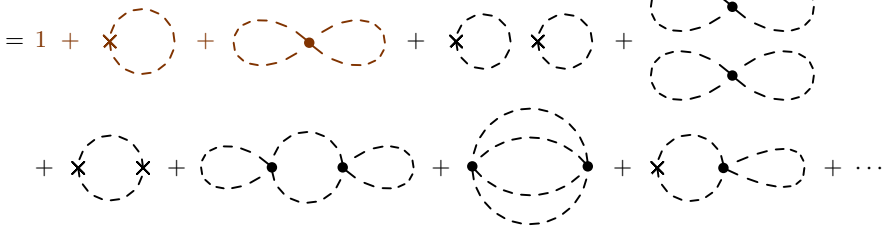
归一化因子的 Feynman 图

👉 归一化因子 $\mathcal{N} = \langle 0 | \mathbb{T} \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] | 0 \rangle$ 对所有时空点都进行积分，而相应的 Feynman 图不包含任何外点，必然对应着各种各样的气泡图

🍊 可以认为 \mathcal{N} 描述了从真空态到真空态之间的跃迁过程

🍏 在 ϕ^4 理论中，有

$$\mathcal{N} = \langle 0 | \mathbb{T} \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$



👉 这里前三项正是上一页 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 图形表达式圆括号中的项

多点关联函数与连通图

🐎 由此可以猜测,

🍌 n 点关联函数

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | T \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

中的 $1/\mathcal{N}$ 因子正好抵消了所有气泡图对真空期待值

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

的贡献, 故相关 Feynman 图都是**连通图**

🍌 接下来给出证明

关于连通图的证明


证明 对 $\mathcal{N}G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 应用 **Wick 定理**, 只保留有**非平庸贡献**的完全缩并, 注意完全缩并的结果必定是 **c 数**

从而将相关贡献分解为两个真空期待值之积, 要求**第一个真空期待值**只包含**连通图**的贡献, **第二个真空期待值**只包含**气泡图**的贡献, 得到

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_k \langle 0 | \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)] | 0 \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ & \quad \times \langle 0 | \mathsf{N}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j}) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle \\ & \quad \times \langle 0 | \mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle \end{aligned}$$

对于某个 k 值, 挑选 j 个 $\tilde{\mathcal{H}}_1$ 放在**第二个真空期待值**中的方法有 $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ 种, 因而需要考虑这个因子, 再对 j 求和

拆解积分

 **拆解积分**, 利用 $\frac{1}{m!} \rightarrow 0$ ($m < 0$) 将 j 的求和上限扩展到无穷大, 得

$$\mathcal{N}G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$


$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{(-i)^j}{j!}$$

$$\times \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_{k-j} \langle 0 | \mathbf{N}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j}) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle$$

$$\times \int d^4 y_{k-j+1} \cdots d^4 y_k \langle 0 | \mathbf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle$$


$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-i)^i}{i!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_i \langle 0 | \mathbf{N}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_i) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int d^4 y_{i+1} \cdots d^4 y_{i+j} \langle 0 | \mathbf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j}) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle$$

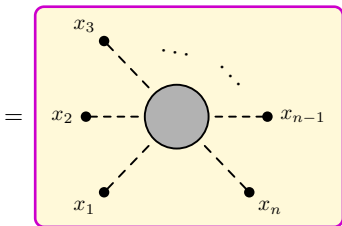
 第二步作**变量替换**, 令 $i \equiv k - j$, 分开两个求和, 第二个求和式正是归一化因子

$$\mathcal{N} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int d^4 y_{i+1} \cdots d^4 y_{i+j} \langle 0 | \mathbf{T}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})] | 0 \rangle$$

完成证明

 将归一化因子从左右两边同时约去，推出


$$\begin{aligned}
 G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-i)^i}{i!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_i \\
 &\quad \times \langle 0 | N[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_i)] | 0 \rangle \\
 &= \text{包含 } n \text{ 个外点 } x_1, \dots, x_n \text{ 的所有连通图}
 \end{aligned}$$



 第三步用灰色圆形表示所有连通图之和

证毕 

二次项对两点关联函数的贡献

 下面考察**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2} = \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{in}^2(x)$ 的影响，考虑**各种连通图**，那么它对**两点关联函数**的贡献为

$$G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | T \left\{ \phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) \exp \left[-i \int d^4 x \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

$$= x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{---} \text{\texttimes} \text{---} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{---} \text{\texttimes} \text{---} \text{\texttimes} \text{---} \bullet x_2 + \dots$$


x
 x
 y

$$= D_{12} - i\delta m^2 \int d^4 x D_{1x} D_{x2} + (-i\delta m^2)^2 \int d^4 x d^4 y D_{1x} D_{xy} D_{y2} + \dots$$

 $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, 0)$ 的 **Fourier 变换**是 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) \equiv \int d^4 x_1 e^{ip \cdot x_1} G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, 0)$

 首先, $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ **第一项**对 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p)$ 的贡献是**动量空间**中的 **Feynman 传播子**

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \bullet \text{---} \overset{p}{\rightarrow} \text{---} \bullet$$

 其中第二步画出相应的**动量空间 Feynman 图**

$G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第二项的贡献

其次， $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第二项对 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p)$ 的贡献为

$$\begin{aligned}
 & -i\delta m^2 \int d^4x_1 d^4x e^{ip \cdot x_1} D_F(x_1 - x) D_F(x) \\
 = & -i\delta m^2 \int \frac{d^4x_1 d^4x d^4p_1 d^4p_2}{(2\pi)^8} e^{ip \cdot x_1} \frac{i e^{-ip_1 \cdot (x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_2 \cdot x}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 = & -i\delta m^2 \int d^4p_1 d^4p_2 \delta^{(4)}(p_1 - p) \delta^{(4)}(p_2 - p_1) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 = & \tilde{D}_F(p) (-i\delta m^2) \tilde{D}_F(p) \\
 = & \bullet \xrightarrow{p} \times \text{---} \bullet
 \end{aligned}$$

最后一步根据动量空间 Feynman 规则画出 Feynman 图

$G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第三项的贡献

🐔 最后, $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第三项对 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p)$ 的贡献是

$$\begin{aligned}
 & (-i\delta m^2)^2 \int d^4 x_1 d^4 x d^4 y e^{ip \cdot x_1} D_F(x_1 - x) D_F(x - y) D_F(y) \\
 = & (-i\delta m^2)^2 \int \frac{d^4 x_1 d^4 x d^4 y d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3}{(2\pi)^{12}} e^{ip \cdot x_1} \\
 & \times \frac{i e^{-ip_1 \cdot (x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_2 \cdot (x - y)}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_3 \cdot y}}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 = & (-i\delta m^2)^2 \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3 \delta^{(4)}(p_1 - p) \delta^{(4)}(p_2 - p_1) \delta^{(4)}(p_3 - p_2) \\
 & \times \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 = & \tilde{D}_F(p) (-i\delta m^2) \tilde{D}_F(p) (-i\delta m^2) \tilde{D}_F(p) = \bullet \xrightarrow{p} \times \cdots \times \cdots \bullet
 \end{aligned}$$

二次项对动量空间传播子的贡献

🐼 综上，二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对动量空间传播子 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的贡献为

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p)(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \dots \\ &= \bullet \overset{p}{\dashrightarrow} \bullet + \bullet \overset{p}{\dashrightarrow} \times \text{---} \bullet + \bullet \overset{p}{\dashrightarrow} \times \text{---} \times \text{---} \bullet + \dots \end{aligned}$$


🍷 可见，对多点关联函数作 Fourier 变换后，作时空坐标和四维动量的积分，则位置空间中的 Feynman 传播子 D_F 转换为相应的动量空间 Feynman 传播子 \tilde{D}_F

🍷 而与顶点联系在一起时，时空积分已经用掉了，这说明剩下的因子正好可以用动量空间中的 Feynman 规则描述，由此得到一个普遍结论：


多点关联函数的 Fourier 变换对应于动量空间中的 Feynman 图

🍷 因此可以利用动量空间 Feynman 规则直接计算多点关联函数的 Fourier 变换


等比级数

 现在 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p)$ 表达式是一个**等比级数**，可改写为


$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p)(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \cdots \\ &= \tilde{D}_F(p) \sum_{k=0}^{\infty} [(-i\delta m^2)\tilde{D}_F(p)]^k = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\delta m^2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^k\end{aligned}$$

 由等比级数公式 $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ($|z| < 1$) 得

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-z/a} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^k, \quad |z| < |a|$$

 δm^2 是微扰论中的**小量**，取 $a = p^2 - m^2 + i\epsilon$ 和 $z = \delta m^2$ ，有

$$\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

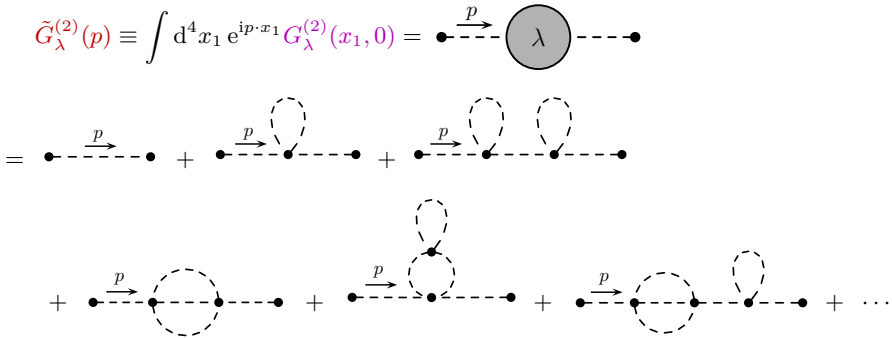
 第二步用到定义式 $\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2$ ，可见，**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对**两点关联函数**的影响是将**极点位置**从**物理质量平方** m^2 移动到**裸质量平方** m_0^2 处

相互作用项对两点关联函数的贡献

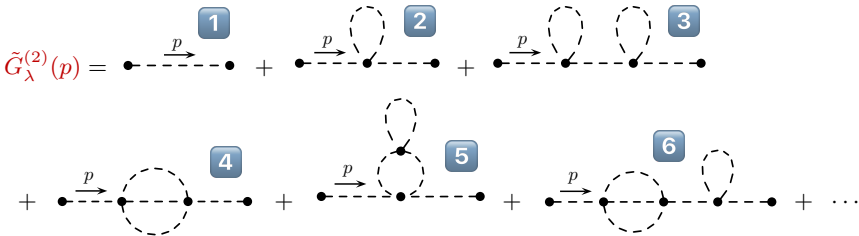
🐱 接下来考虑 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{H}_\lambda = \frac{\lambda}{4!} \phi_{in}^4(x)$ ，它对**两点关联函数**的贡献为

$$G_\lambda^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | T \left\{ \phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_\lambda(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

🍷 作 **Fourier 变换**，将各种**连通图**画出来，得



单粒子不可约图

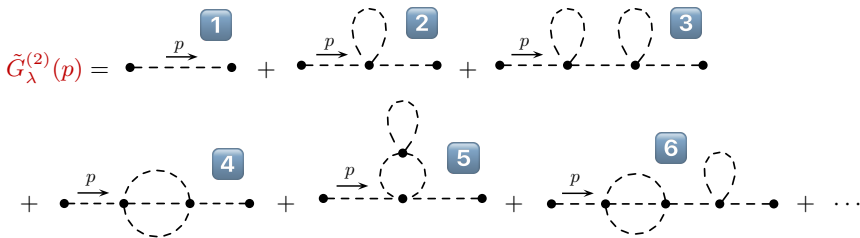


🦎 在这些**连通图**中，**3** 和 **6** 是可以**约化**的

🔪 如果从 **3** 中**移除**连接中间两个点的内线，那么它会**分割**成两个**不相连的部分**

🍷 如果从 **6** 中**移除**连接第三和第四个点的内线，它也会**分割**成两个**不相连部分**

单粒子不可约图



🦎 在这些**连通图**中，**3** 和 **6** 是可以**约化**的

🔪 如果从 **3** 中**移除**连接中间两个点的内线，那么它会**分割**成两个**不相连的部分**

🍉 如果从 **6** 中**移除**连接第三和第四个点的内线，它也会**分割**成两个**不相连部分**

👉 像 **2**、**4**、**5** 这样，**移除任意一条线**之后**不会**分割成两个不相连的部分，这种图称为**单粒子不可约图** (one-particle irreducible diagram)，简称 **1PI 图**

🍷 注意 **1** 并不属于 **1PI 图**

🍷 可利用 **1PI 图约化**各种**连通图**，比如 **3** 约化成两个 **2**，**6** 约化成 **4** 和 **2**

两点关联函数的所有 1PI 图

🐼 将所有由 \mathcal{H}_λ 贡献的**两点关联函数 1PI 图**记作

$$-i\Pi(p^2) = \boxed{\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{ (1PI) } \text{---}} = \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{ (loop) } \text{---} + \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{ (bubble) } \text{---} + \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{ (self-energy) } \text{---} + \dots$$

🍷 这些 **1PI 图**都属于 7.3 节讨论过的 ϕ **粒子自能图**

🎯 定义上 **1PI 自能图** $-i\Pi(p^2)$ 的**表达式**中**不包含**两个连接外点的 **Feynman 传播子**

🍷 **Lorentz 对称性**保证 $\Pi(p^2)$ 是 p^2 的**函数**

🌀 $\Pi(p^2)$ 的**领头阶**是 λ^1 **阶**，因而它是微扰论中的**小量**

相互作用项对动量空间传播子的贡献

🐼 利用 **1PI 自能图** $-i\Pi(p^2)$ 可以将 $\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p)$ 表达为

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) &= \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bigcirc(\lambda) \text{---} \bullet \\
 &= \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bigcirc(1\text{PI}) \text{---} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bigcirc(1\text{PI}) \text{---} \bigcirc(1\text{PI}) \text{---} \bullet + \dots \\
 &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)[-i\Pi(p^2)]\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)[-i\Pi(p^2)]\tilde{D}_F(p)[-i\Pi(p^2)]\tilde{D}_F(p) + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^k = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

🍷 最后一步用到 $\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k$, $|z| < |a|$

📖 这个结果表明**相互作用项** \mathcal{H}_λ 也会影响**两点关联函数**的**极点位置**

动量空间中的完整传播子

🐻 将 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 和 \mathcal{H}_λ 的贡献合起来，动量空间中的**两点关联函数** (即**完整的传播子**) 是

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}^{(2)}(p) &= \text{diagram: incoming dashed line with momentum } p \text{ to a grey circle, then outgoing dashed line} \\
 &= \text{diagram: two dashed lines} + \text{diagram: dashed line to a cross then dashed line} + \text{diagram: dashed line to a circle labeled '1PI' then dashed line} \\
 &\quad + \text{diagram: dashed line to a cross then dashed line to a cross then dashed line} + \text{diagram: dashed line to a circle labeled '1PI' then dashed line to a circle labeled '1PI' then dashed line} \\
 &\quad + \text{diagram: dashed line to a cross then dashed line to a circle labeled '1PI' then dashed line} + \text{diagram: dashed line to a circle labeled '1PI' then dashed line to a cross then dashed line} + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\delta m^2 + \Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^k = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

质量重整化条件

🐼 在单粒子态极点附近， $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 **Källén-Lehmann 谱表示**

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon} \text{ 的第一项相同, 即}$$

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_p} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

🍩 可见，为了保持极点位于物理质量 m 的平方处，必须要求 $\delta m^2 = -\Pi(m^2)$

🍪 这是质量重整化条件，它表明质量重整化常数 δm^2 由 1PI 自能图的 $\Pi(p^2)$ 决定

质量重整化条件

🐼 在单粒子态极点附近， $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 **Källén-Lehmann 谱表示**

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$$

的第一项相同，即

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_p} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

🍩 可见，为了保持极点位于物理质量 m 的平方处，必须要求 $\delta m^2 = -\Pi(m^2)$

🍪 这是质量重整化条件，它表明质量重整化常数 δm^2 由 1PI 自能图的 $\Pi(p^2)$ 决定

🍪 由于 $\Pi(p^2)$ 的领头阶是 λ^1 阶， δm^2 的领头阶也是 λ^1 阶

🍪 在圈图计算中， $\Pi(p^2)$ 是发散的，因而 δm^2 也是发散的；不过，它们相加时发散部分相互抵消，因此对传播子的修正量 $f(p^2) \equiv \delta m^2 + \Pi(p^2)$ 是有限的 $\mathcal{O}(\lambda)$ 小量

🍪 由于二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2} = \frac{1}{2}\delta m^2 \phi_{in}^2(x)$ 的贡献抵消了相互作用项 \mathcal{H}_λ 对极点位置的影响，我们称 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 为质量抵消项 (mass counter term)

🍪 换句话说，正是在高阶计算中相互作用项的贡献移动了极点位置，我们需要从拉氏量中的裸质量平方 m_0^2 里面分离出 δm^2 来抵消它的影响

展开 $f(p^2)$

🐼 在 $p^2 = m^2$ 附近将 $f(p^2) = \delta m^2 + \Pi(p^2)$ 展开, 得

$$\begin{aligned} f(p^2) &\simeq \delta m^2 + \Pi(m^2) + (p^2 - m^2) \left. \frac{df(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2] \\ &= (p^2 - m^2) \left. \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2] \end{aligned}$$

🍌 从而 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 $p^2 = m^2$ 附近近似为

$$\begin{aligned} \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} &\simeq \frac{i}{(p^2 - m^2) \left[1 - \left. \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right] + i\epsilon} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 - \left. \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

场强重整化条件

🐼 比较 $\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \simeq \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 - \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right]^{-1}$ 与

$\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_p} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$, 推出

$$Z^{-1} = 1 - \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2}$$

🍦 这是**场强重整化条件**，它表明**场强重整化常数** Z 也由 **1PI 自能图** $\Pi(p^2)$ 决定

🍦 而且

$$Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$$

四点关联函数


 现在讨论四点关联函数，展开到 λ^1 阶，有

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= \langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4)] | 0 \rangle \\
 &\quad - \frac{i\delta m^2}{2} \int d^4x \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \phi_{\text{in}}^2(x)] | 0 \rangle \\
 &\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \phi_{\text{in}}^4(x)] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

四点关联函数

 现在讨论四点关联函数，展开到 λ^1 阶，有

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= \langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4)] | 0 \rangle \\
 &\quad - \frac{i\delta m^2}{2} \int d^4x \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \phi_{\text{in}}^2(x)] | 0 \rangle \\
 &\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \phi_{\text{in}}^4(x)] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

 首先， $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第一项给出的连通图为

$$\begin{aligned}
 G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{array}{ccc} x_3 \bullet \text{-----} \bullet x_4 & & x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_4 \\ & + & \\ x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 & & x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_3 \end{array} + \begin{array}{ccc} & & x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_3 \\ & + & \\ & & x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_4 \end{array} \\
 &= D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}
 \end{aligned}$$

 这三个图各自描述两个独立传播的自由粒子，与散射过程无关

质量重整化常数的修正

其次， $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第二项给出的连通图为

$$\begin{aligned}
 & G_{\delta m^2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 = & \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} x_3 \bullet \text{-----} \bullet x_4 \\ x_1 \bullet \text{---}\times\text{---} \bullet x_2 \\ \quad \quad \quad x \end{array} & + & \begin{array}{c} x_3 \bullet \text{---}\times\text{---} \bullet x_4 \\ x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 \end{array} & + & \begin{array}{c} x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_4 \\ x_1 \bullet \text{---}\times\text{---} \bullet x_3 \\ \quad \quad \quad x \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} x_2 \bullet \text{---}\times\text{---} \bullet x_4 \\ x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_3 \\ \quad \quad \quad x \end{array} & + & \begin{array}{c} x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_3 \\ x_1 \bullet \text{---}\times\text{---} \bullet x_4 \\ \quad \quad \quad x \end{array} & + & \begin{array}{c} x_2 \bullet \text{---}\times\text{---} \bullet x_3 \\ x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_4 \end{array}
 \end{array} \\
 = & -i\delta m^2 \int d^4x (D_{1x}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{x4} + D_{1x}D_{x3}D_{24} \\
 & + D_{13}D_{2x}D_{x4} + D_{1x}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{x3})
 \end{aligned}$$

这些图在各个自由传播子上加入质量重整化常数的修正，跟散射过程也没有关系

单圈自能图的修正

最后， $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第三项给出的两种连通图，第一种连通图为

$$\begin{aligned}
 & G_{\lambda,1}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 = & \begin{array}{c} x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x \\ | \\ x_3 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_2 \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\ | \\ x \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} x \\ | \\ x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x \\ | \\ x_2 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_3 \\ | \\ x_1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet x_4 \\ | \\ x \end{array} \\
 = & -i \lambda \int d^4x (D_{1x} D_{xx} D_{x2} D_{34} + D_{12} D_{3x} D_{xx} D_{x4} + D_{1x} D_{xx} D_{x3} D_{24} \\
 & + D_{13} D_{2x} D_{xx} D_{x4} + D_{1x} D_{xx} D_{x4} D_{23} + D_{14} D_{2x} D_{xx} D_{x3})
 \end{aligned}$$

这些图只是在各个自由传播子上加入单圈自能图的修正，与散射过程无关

连通图与散射过程

🐾 $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第三项给出的第二种连通图为

$$G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_3 \quad \bullet \quad x_4 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \quad x \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ x_1 \quad \bullet \quad x_2 \end{array} = -i\lambda \int d^4x D_{1x} D_{2x} D_{3x} D_{4x}$$

☁️ 它会贡献到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程，接下来应用 LSZ 约化公式以得到 T 矩阵元

连通图与散射过程

 $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第三项给出的第二种连通图为

$$G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_1 \quad x_2 \end{array} \quad x \quad = -i\lambda \int d^4x D_{1x} D_{2x} D_{3x} D_{4x}$$

 它会贡献到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程，接下来应用 LSZ 约化公式以得到 T 矩阵元

 为此，先计算 Klein-Gordon 微分算符对 Feynman 传播子的作用，有

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + m^2)D_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (\partial_x^2 + m^2)e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2)e^{-ip \cdot (x-y)} = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned}$$

 即

$$(\partial_x^2 + m^2)D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$$


 可见，Feynman 传播子是 Klein-Gordon 算符的 Green 函数

T 矩阵元

 将 $G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 代入 **LSZ 约化公式**, 得到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 的 **T 矩阵元**为

$$\begin{aligned}
 iT_{fi} &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2)} e^{-i(p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times (\partial_{x_1}^2 + m^2)(\partial_{x_2}^2 + m^2)(\partial_{x_3}^2 + m^2)(\partial_{x_4}^2 + m^2) G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= -i\lambda \frac{i^4}{Z^2} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2)} e^{-i(p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times (\partial_{x_1}^2 + m^2) D_F(x_1 - x) (\partial_{x_2}^2 + m^2) D_F(x_2 - x) \\
 &\quad \times (\partial_{x_3}^2 + m^2) D_F(x_3 - x) (\partial_{x_4}^2 + m^2) D_F(x_4 - x) \\
 &= -\frac{i\lambda}{Z^2} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2)} e^{-i(p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times \delta^{(4)}(x_1 - x) \delta^{(4)}(x_2 - x) \delta^{(4)}(x_3 - x) \delta^{(4)}(x_4 - x) \\
 &= -\frac{i\lambda}{Z^2} \int d^4x e^{-i(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \cdot x} = -\frac{i\lambda}{Z^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)
 \end{aligned}$$


领头阶计算


 与 $iT_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$ 比较, 则 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程的**不变振幅**为


$$i\mathcal{M} = -\frac{i\lambda}{Z^2} = -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$


 第二步用到 $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$

 在 λ^1 阶, 这里得到的 $i\mathcal{M}$ 与 7.3 节中的**领头阶**计算结果**相同**


 可以看到,

 在微扰论的**领头阶**计算中, 可取 $Z = 1$ 和 $\delta m^2 = 0$

 即**不需要考虑重整化常数的影响**

 这说明**第 7、8、9 章**中关于**领头阶**过程的计算方法是**合理的**

动量空间中的四点 Green 函数

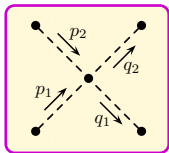
 对 $G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 作 **Fourier 变换**, 得

$$\begin{aligned}
 & \tilde{G}_{\lambda,2}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \\
 &= \int \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 - p_2 \cdot x_4)} G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= -i\lambda \int d^4 x \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 - p_2 \cdot x_4)} \\
 & \quad \times D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x) \\
 &= -i\lambda \int d^4 x \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) \left(\prod_{j=1}^4 \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \right) e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 - p_2 \cdot x_4)} \\
 & \quad \times \frac{i e^{-ik_1 \cdot (x_1 - x)}}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ik_2 \cdot (x_2 - x)}}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ik_3 \cdot (x_3 - x)}}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ik_4 \cdot (x_4 - x)}}{k_4^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

动量空间中的 Feynman 图

👤 完成积分，得到

$$\begin{aligned}
 & \tilde{G}_{\lambda,2}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \\
 &= -i\lambda \int \left(\prod_{j=1}^4 d^4 k_j \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
 & \quad \times \delta^{(4)}(k_1 - q_1) \delta^{(4)}(k_2 - q_2) \delta^{(4)}(k_3 + p_1) \delta^{(4)}(k_4 + p_2) \\
 & \quad \times \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_4^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \\
 & \quad \times (-i\lambda) \frac{i}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times
 \end{aligned}$$




🔦 可见，这个结果也对应于动量空间中的 Feynman 图

再次得到 T 矩阵元

 不过，额外出现了一个表征**能量守恒**的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 因子

 毕竟之前使用的**动量空间 Feynman 规则**是针对**不变振幅 $i\mathcal{M}$** 设置的


 而**动量空间**中的**多点关联函数**通过 **LSZ 约化公式**联系着 **T 矩阵元 iT_{fi}**

 后者相对于 **$i\mathcal{M}$** 就是多了**这个因子**

再次得到 T 矩阵元

 不过，额外出现了一个表征**能动量守恒**的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 因子

 毕竟之前使用的**动量空间 Feynman 规则**是针对**不变振幅 $i\mathcal{M}$** 设置的

 而**动量空间**中的**多点关联函数**通过 **LSZ 约化公式**联系着 **T 矩阵元 iT_{fi}**

 后者相对于 $i\mathcal{M}$ 就是多了**这个因子**

 10.3 小节推导的 **LSZ 约化公式**的另一种表述给出

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[p_j^0 \rightarrow E_{q_j}]{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}} \frac{i\sqrt{Z}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} iT_{fi}$$

 与上一页的结果比较，同样可以得到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程的 T 矩阵元


$$iT_{fi} = -\frac{i\lambda}{Z^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$$

LSZ 约化公式与四点关联函数

 接下来讨论在微扰论中考虑所有阶贡献时的形式结果，LSZ 约化公式


$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[p_j^0 \rightarrow E_{q_j}]{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}} \frac{i\sqrt{Z}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} iT_{fi}$$

中的四点关联函数原则上包括了所有阶贡献的四点连通图，因而每个外点都会联系着一个完整传播子，受到场强重整化常数 Z 的影响

 结合完整传播子的形式 $\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$

 将动量空间中完整的四点关联函数改写为

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[p_j^0 \rightarrow E_{q_j}]{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}} \frac{iZ}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iT_{fi}}{(\sqrt{Z})^4}$$

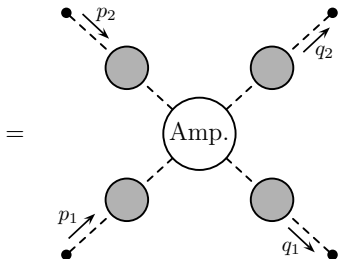
 即每个外点贡献一个 $iZ/(q_i^2 - m^2 + i\epsilon)$ 或 $iZ/(q_i^2 - m^2 + i\epsilon)$ 形式的完整传播子


切断 Feynman 图

 用 Feynman 图将**四点关联函数**表示为

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}]{\text{}} \frac{iZ}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iT_{fi}}{(\sqrt{Z})^4}$$



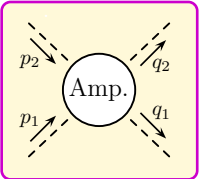
 将与**外点**相连的**所有完整传播子**从 Feynman 图上**切除**，得到的部分称为**切断** (amputated) **Feynman 图**，在图中用 **“Amp.”** 标记


切断 Feynman 图与动量空间 Feynman 规则

 将四个完整传播子从 $\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$ 的 Feynman 图中抽取出来，得到


$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \frac{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}}{q_j^0 \rightarrow E_{q_j}} \rightarrow \frac{iZ}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$

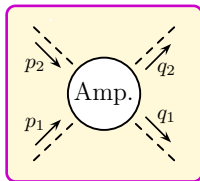


 这里还抽出了表征能动量守恒的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 因子，从而剩余的切断 Feynman 图直接对应于动量空间 Feynman 规则

2 → 2 散射过程的不变振幅

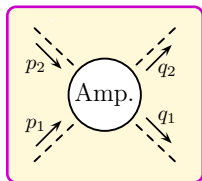
 比较前两页的结果，推出 T 矩阵元的形式为

$$iT_{fi} = (\sqrt{Z})^4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$



 从而**不变振幅**表达成

$$i\mathcal{M} = (\sqrt{Z})^4 \times$$

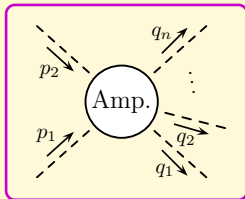


 可见，除了用**动量空间 Feynman 规则**计算所有**切断的连通 Feynman 图**之外，还要乘上 $(\sqrt{Z})^4$ **因子**才能得到正确的**不变振幅 $i\mathcal{M}$**

任意 $2 \rightarrow n$ 散射过程的不变振幅

 推广到任意 $2 \rightarrow n$ 散射过程，不变振幅为

$$i\mathcal{M} = (\sqrt{Z})^{n+2} \times$$



 即每条外线贡献一个 \sqrt{Z} 因子

 在领头阶计算中，这些 \sqrt{Z} 因子都是 1，无关紧要

 但在更高阶计算中必须把它们考虑进来才能获得正确的结果

10.6 节 光学定理和不稳定粒子

🗿 在量子散射理论中，概率守恒体现为 S 算符的幺正性，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的**光学定理** (optical theorem)


👑 将 S 算符的分解式 $S = \mathbb{I} + iT$ 代入**幺正性条件**，得到


$$\mathbb{I} = S^\dagger S = (\mathbb{I} - iT^\dagger)(\mathbb{I} + iT) = \mathbb{I} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

👑 可见，
$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

👑 上式右边在双粒子初态 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ 和双粒子末态 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|$ 之间的**期待值**为 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2| T^\dagger T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ ，考虑在其中插入一组**中间态的完备集**


10.6 节 光学定理和 不稳定粒子

 在量子散射理论中，**概率守恒**体现为 S 算符的**幺正性**，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的**光学定理** (optical theorem)

 将 S 算符的分解式 $S = \mathbb{I} + iT$ 代入**幺正性条件**，得到

$$\mathbb{I} = S^\dagger S = (\mathbb{I} - iT^\dagger)(\mathbb{I} + iT) = \mathbb{I} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

 可见，
$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

 上式右边在双粒子初态 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ 和双粒子末态 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|$ 之间的**期待值**为 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2| T^\dagger T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ ，考虑在其中插入一组**中间态的完备集**


 参考单粒子态的完备性关系，任意粒子态 $|\{q_i\}\rangle$ 的完备性关系表达成

$$\sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_i}} \right) |\{q_i\}\rangle \langle \{q_i\}| = \mathbb{I}$$

 从而推出


$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2| T^\dagger T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_i}} \right) \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2| T^\dagger |\{q_i\}\rangle \langle \{q_i\}| T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$$

处理等式右边

 根据 $iT_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$, 用**不变振幅**将右边两个 T 矩阵表达成

$$\langle \{\mathbf{q}_i\} | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\})$$


$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger | \{\mathbf{q}_i\} \rangle = \langle \{\mathbf{q}_i\} | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle^* = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum_i q_i \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\})$$

 由此得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\}) \\ &\quad \times (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum_i q_i \right) \\ &= \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\}) \\ &\quad \times (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \delta^{(4)} (k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$

 第二步用到 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$

处理等式左边


 另一方面，由于

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2)$$

$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$ 左边在初态 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ 和末态 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|$ 之间的期待值为

$$\begin{aligned}
 -i \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | (T - T^\dagger) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= -i[\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2)] \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)
 \end{aligned}$$


推广的光学定理

 将上式简记为

$$-i[\mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a)] = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f)$$

 以**实标量场**的 ϕ^4 **理论**为例，在 λ^2 **阶**讨论上式，则**右边**每个**振幅**是 λ^1 **阶的树图**
振幅，而**左边**是 λ^2 **阶的单圈振幅**


 因此，上式意味着**圈图振幅**与**树图振幅**有一定的联系

 只要**树图**是存在的，则**圈图**必定也是存在的

 通常认为**树图**代表着**经典物理**，而**圈图**代表着**量子效应**


 推广的光学定理表明，**只存在树图的经典相互作用理论**会**违反么正性**

光学定理的另一个形式

 从而， $2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow f)|^2$ 化为

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2) = 2E_{\text{CM}} |\mathbf{p}_1| \sigma_{\text{tot}}$$

 这是**光学定理**的常见形式

 在**量子理论**中考虑**束流打靶**过程，那么，**向前散射振幅的虚部**对应于束流经过靶时**入射波的衰减**

 它应当**正比于发生散射的概率**，而后者是由**总散射截面**描述的

 上式给出了精确的对应关系

不稳定粒子



现在将**推广的光学定理**

$$-i[\mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a)] = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f)$$

应用到从一个**不稳定粒子** \mathcal{A} 跃迁到自身的 $1 \rightarrow 1$ “**散射**” 过程上



在 \mathcal{A} 的**静止系**中，有

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow f)|^2 = 2m_{\mathcal{A}} \sum_f \Gamma_f$$



其中 Γ_f 就是**衰变分宽度**，而所有分宽度之和是 \mathcal{A} 粒子的**总宽度** $\Gamma_{\mathcal{A}} = \sum_f \Gamma_f$




因此，**振幅** $\mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ **虚部**与**衰变总宽度**的关系为

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) = m_{\mathcal{A}} \Gamma_{\mathcal{A}}$$




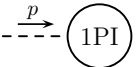
另一方面，**稳定粒子的衰变宽度为零**，而相应**振幅** $\mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ 是**实数**

不稳定的实标量玻色子

 对于不稳定的实标量玻色子 ϕ ，前面的计算给出了完整的动量空间传播子

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \bullet \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}$$

(Diagram description: A diagram showing a shaded circle (representing a self-energy correction) with a dashed line and an arrow labeled 'p' entering from the left and a dashed line exiting to the right. This is equated to a fraction with 'i' in the numerator and 'p^2 - m^2 - delta m^2 - Pi(p^2) + i epsilon' in the denominator.)

 其中 $\Pi(p^2)$ 来自 1PI 自能图  $\text{---} \text{---} = -i\Pi(p^2)$

(Diagram description: A diagram showing a circle with '1PI' inside, with a dashed line and arrow labeled 'p' entering from the left and a dashed line exiting to the right.)


 将传播子看成 $1 \rightarrow 1$ “散射”过程，要求 p^μ 满足在壳条件 $p^2 = m^2$

 类比前面推出的不变振幅与切断 Feynman 图的关系，有


$$i\mathcal{M}(\phi \rightarrow \phi) = (\sqrt{Z})^2 \times \left(\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{---} \right) \bigg|_{p^2=m^2} = -iZ\Pi(m^2)$$

(Diagram description: A diagram showing a circle with '1PI' inside, with a dashed line and arrow labeled 'p' entering from the left and a dashed line exiting to the right, enclosed in large parentheses.)

 注意这里切断的连通 Feynman 图就是 1PI 自能图

 从而， ϕ 的衰变总宽度表达为 $\Gamma = \frac{1}{m} \text{Im } \mathcal{M}(\phi \rightarrow \phi) = -\frac{Z}{m} \text{Im } \Pi(m^2)$

修正重整化条件

 可见, **不稳定 ϕ 粒子的 $\Pi(p^2)$** 必定具有**虚部**, 将**完整传播子**改写为

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \text{Re } \Pi(p^2) - i \text{Im } \Pi(p^2)}$$

 这里已经把分母中的**无穷小量 $\epsilon \ll |\text{Im } \Pi(p^2)|$** 忽略掉了

 从而, 需要把**质量重整化条件**修改为


$$\delta m^2 = -\text{Re } \Pi(m^2)$$

 使**物理质量 m 的平方**对应于**极点位置的实部**

 **场强重整化条件**修改为

$$Z^{-1} = 1 - \left. \frac{d \text{Re } \Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2}$$

完整传播子在极点附近的近似


 $\text{Im } \Pi(p^2)$ 的存在使 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的单粒子态极点远离实轴，具体位置由 $p^2 = m^2 + \delta m^2 + \text{Re } \Pi(p^2) + i \text{Im } \Pi(p^2)$ 决定， $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 $p^2 = m^2$ 附近近似为


$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\simeq \frac{i}{(p^2 - m^2)[1 - d \text{Re } \Pi(p^2)/dp^2|_{p^2=m^2}] - i \text{Im } \Pi(p^2)} \\ &= \frac{i}{(p^2 - m^2)Z^{-1} - i \text{Im } \Pi(p^2)} = \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ \text{Im } \Pi(p^2)}.\end{aligned}$$

 如果 $|\text{Im } \Pi(p^2)|$ 在极点附近远小于 m^2 ，那么极点位置与 $p^2 = m^2$ 的偏离较小

 从而，完整的 ϕ 传播子在极点附近的行为是

$$\tilde{G}^{(2)}(p) \simeq \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ \text{Im } \Pi(m^2)} = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \simeq \frac{i}{p^2 - m^2 + im\Gamma}$$

 第二步用到 $\Gamma = -\frac{Z}{m} \text{Im } \Pi(m^2)$ ，第三步取近似 $Z \simeq 1$

 可见，极点位置在 p^2 复平面实轴下方 $p^2 = m^2 - im\Gamma$ 处

相对论性 Breit-Wigner 分布

☙ 若上述 ϕ 传播子出现在某个 s 通道散射过程中, 有 $p^2 = s$, 则散射截面满足

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 + im\Gamma} \right|^2 = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2}$$

☹ 它在 $s = m^2$ 附近显示出相对论性 Breit-Wigner 分布

☹ 近似成立的条件 $|\operatorname{Im} \Pi(m^2)| \ll m^2$ 可以等价于窄宽度条件

$$\Gamma \ll m$$

☹ 相应的 s 通道不稳定粒子就是一个共振态

☹ 散射截面在 $s = m^2$ 处得到共振增强, 有 $\sigma \propto \frac{1}{(m\Gamma)^2}$

☹ 也就是说, 宽度越窄, 截面越大



Gregory Breit
(1899–1981)



Eugene Wigner
(1910–1995)

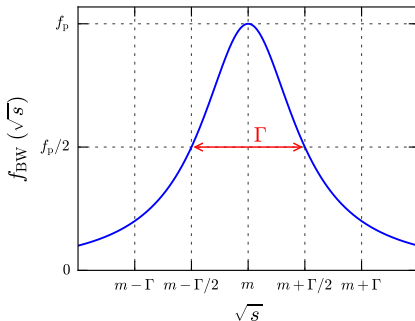
Breit-Wigner 分布图象

🏠 Breit-Wigner 分布的图象如右图所示

👮 可见，不稳定粒子的质量并不取固定值，而是呈现出一个 Breit-Wigner 分布

🚗 前面所说的物理质量 m 是这个分布的中心值，也是概率最大的地方


📶 衰变宽度 Γ 是这个分布的半峰全宽，这是它被称为“宽度”的原因




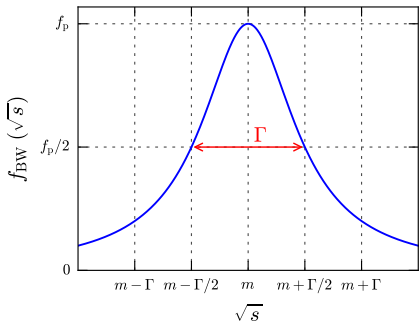
Breit-Wigner 分布图象

 Breit-Wigner 分布的图象如右图所示

 可见，不稳定粒子的质量并不取固定值，而是呈现出一个 Breit-Wigner 分布


 前面所说的物理质量 m 是这个分布的中心值，也是概率最大的地方

 衰变宽度 Γ 是这个分布的半峰全宽，这是它被称为“宽度”的原因




 任何归一化概率密度分布在宽度趋于零的极限下都会变成 δ 函数，故


$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} f_{\text{BW}}(\sqrt{s}) = \delta(\sqrt{s} - m)$$

 当 $\Gamma = 0$ 时，寿命 $\tau = \frac{1}{\Gamma} \rightarrow \infty$ ，粒子是稳定的，而质量固定为 m



不稳定粒子的动量空间内线规则

 上述关于**不稳定粒子**的讨论可以推广到**其它类型**的量子场和粒子

 在**窄宽度条件**下，假如要在**树图**计算中考虑**衰变宽度**的效应，只需采用下列**不稳定粒子的动量空间内线规则**


$$\textcircled{1} \text{ 实标量玻色子 } \phi \text{ 内线: } \bullet \text{ --- } \xrightarrow{p} \text{ --- } \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + im_\phi \Gamma_\phi}.$$


$$\textcircled{2} \text{ 复标量玻色子 } \phi \text{ 内线: } \bullet \text{ --- } \xrightarrow{p} \text{ --- } \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + im_\phi \Gamma_\phi}.$$


$$\textcircled{3} \text{ 有质量实矢量玻色子 } A \text{ 内线: } \nu \text{ --- } \xrightarrow{p} \text{ --- } \mu = \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + im_A \Gamma_A}.$$

$$\textcircled{4} \text{ Dirac 费米子 } \psi \text{ 内线: } \bullet \text{ --- } \xrightarrow{p} \text{ --- } \bullet = \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi}$$

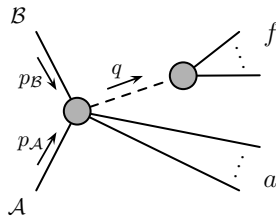
包含窄宽度内线的散射过程

 考虑右图 $2 \rightarrow n$ 散射过程，它包含一条具有类时动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线

 n 个末态粒子分为两部分，其中 a 部分包含 n_a 个粒子，而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 玻色子内线

 如果这个散射过程的质心能足够高，使末态相空间包含 ϕ 粒子在壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域

 那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可对散射截面进行因子化



包含窄宽度内线的散射过程

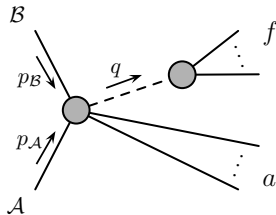
2.4 考虑右图 $2 \rightarrow n$ 散射过程，它包含一条具有类时
动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线

人 n 个末态粒子分为两部分，其中 a 部分包含 n_a
个粒子，而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 玻
色子内线

🔍 如果这个散射过程的质心能足够高，使末态相空
间包含 ϕ 粒子在壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域

✂ 那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可对散射截面进行因子化


🌀 将 $A + B \rightarrow a + f$ 散射过程的不变振幅分解为




$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_P(q^2) \frac{i}{q^2 - m^2 + im\Gamma} i\mathcal{M}_D(q^2)$$

🔗 其中 $i\mathcal{M}_P(q^2)$ 是 $A + B \rightarrow a + \phi$ 部分的振幅， $i\mathcal{M}_D(q^2)$ 是 $\phi \rightarrow f$ 部分的振幅，
它们具有对 q^2 的依赖性，由 ϕ 传播子连接起来

表达散射截面

 假设 $\mathcal{M}_P(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_D(q^2)$ 都是实数，这对不包含其它不稳定粒子的树图过程一般是成立的，则不变振幅模方为


$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

 设末态对称性因子 $S = 1$ ， $A + B \rightarrow a + f$ 散射截面表达为

$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

 其中 $F = 4E_A E_B v_{\text{Møll}}$ 是入射流因子

表达散射截面


 假设 $\mathcal{M}_P(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_D(q^2)$ 都是实数，这对不包含其它不稳定粒子的树图过程一般是成立的，则不变振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

 设末态对称性因子 $S = 1$ ， $A + B \rightarrow a + f$ 散射截面表达为


$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

 其中 $F = 4E_A E_B v_{M\text{ol}}$ 是入射流因子

 将 a 和 f 的末态粒子的四维动量之和分别记作 $p_a^\mu = \sum_{i=1}^{n_a} p_i^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=n_a+1}^n p_j^\mu$

 n 体末态相空间表达成

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{i=1}^{n_a} \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \left(\prod_{j=n_a+1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_a - p_f)$$

 下面对它进行分解

分解末态相空间



将上页公式插入到 n 体末态相空间中, 得

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_n &= \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\tilde{E}_q(s_\phi)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_f) \left(\prod_{i=1}^{n_a} \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \\
 &\quad \times \left(\prod_{j=n_a+1}^n \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_a - p_f) \\
 &= \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int d\Pi_{\text{P}}(s_\phi) \int d\Pi_{\text{D}}(s_\phi)
 \end{aligned}$$



其中

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_{\text{P}}(s_\phi) &\equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\tilde{E}_q(s_\phi)} \left(\prod_{i=1}^{n_a} \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_a - q) \\
 \int d\Pi_{\text{D}}(s_\phi) &\equiv \left(\prod_{j=n_a+1}^n \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_f)
 \end{aligned}$$



分别对应于 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow a + \phi$ 部分和 $\phi \rightarrow f$ 部分的末态相空间



这里标注了它们对 s_ϕ 的依赖性

分解散射截面

于是, $A + B \rightarrow a + f$ 散射截面化为

$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

$$= \frac{1}{F} \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int d\Pi_P(s_\phi) \int d\Pi_D(s_\phi) |\mathcal{M}_P(s_\phi)|^2 \frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(s_\phi)|^2$$

将上式中 ϕ 玻色子内线的贡献改写为


$$\frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{\pi}{m\Gamma} \frac{2m\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (2m\Gamma)^2/4}$$

它正比于中心值为 m^2 、宽度为 $2m\Gamma$ 的 Breit-Wigner 分布, 比例因子为 $\frac{\pi}{m\Gamma}$

在 $\frac{\Gamma}{m} \ll 1$ 的窄宽度条件下取 $\Gamma \rightarrow 0$ 的极限, 由 $\lim_{\Gamma \rightarrow 0} f_{BW}(\sqrt{s}) = \delta(\sqrt{s} - m)$ 得

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(s_\phi - m^2)$$

散射截面的因子化

 从而 $A + B \rightarrow a + f$ 散射截面近似为

$$\begin{aligned}\sigma &\simeq \frac{1}{F} \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int d\Pi_{\text{P}}(s_\phi) \int d\Pi_{\text{D}}(s_\phi) |\mathcal{M}_{\text{P}}(s_\phi)|^2 \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(s_\phi - m^2) |\mathcal{M}_{\text{D}}(s_\phi)|^2 \\ &= \frac{1}{F} \int d\Pi_{\text{P}}(m^2) |\mathcal{M}_{\text{P}}(m^2)|^2 \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{2m} \int d\Pi_{\text{D}}(m^2) |\mathcal{M}_{\text{D}}(m^2)|^2 = \sigma_{\text{P}} \frac{\Gamma_f}{\Gamma}\end{aligned}$$

 其中

$$\sigma_{\text{P}} = \frac{1}{F} \int d\Pi_{\text{P}}(m^2) |\mathcal{M}_{\text{P}}(m^2)|^2$$

是通过 $A + B \rightarrow a + \phi$ 散射过程产生 ϕ 玻色子的产生截面


 而

$$\Gamma_f = \frac{1}{2m} \int d\Pi_{\text{D}}(m^2) |\mathcal{M}_{\text{D}}(m^2)|^2$$


是 $\phi \rightarrow f$ 衰变过程的分宽度

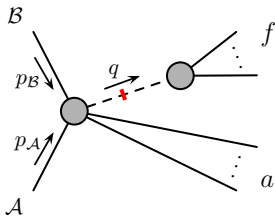
 注意这些公式里面 ϕ 玻色子是在壳的，质量为 m


窄宽度近似


 由分宽度与分支比之间的关系 $\Gamma_f = \Gamma B_f$ 将散射截面改写为

$$\sigma \simeq \sigma_P B_f$$


 也就是说, 只要 ϕ 玻色子内线在运动学允许的范围内能够取得在壳动量, 就可以把 Feynman 图中 ϕ 玻色子的内线剪开



 得到 $A + B \rightarrow a + \phi$ 和 $\phi \rightarrow f$ 的 Feynman 图, 分别计算共振态 ϕ 的产生截面 σ_P 和衰变分支比 B_f , 乘起来就得到 $A + B \rightarrow a + f$ 散射截面 σ

 这种将包含共振态的散射截面因子化的方法称为窄宽度近似

推广到矢量玻色子


 以上讨论对于共振态为实标量玻色子或复标量玻色子的情况都成立，也可以将它推广到其它共振态

 如果共振态是有质量的矢量玻色子 A ，用极化求和关系将它的传播子改写成

$$\begin{aligned} \nu \bullet \overset{q}{\curvearrowright} \bullet \mu &= \frac{-i(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / m_A^2)}{q^2 - m_A^2 + im_A \Gamma_A} \\ &= \frac{i}{q^2 - m_A^2 + im_A \Gamma_A} \sum_{\lambda=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda) \varepsilon^\nu(\mathbf{q}, \lambda) \end{aligned}$$

 那么， $\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda)$ 正好是产生过程中的 A 玻色子出射外线因子

 而 $\varepsilon^\nu(\mathbf{q}, \lambda)$ 是衰变过程的 A 玻色子入射外线因子

 对 λ 求和则考虑了所有极化态的贡献

 因此同样可以应用窄宽度近似将散射截面因子化

推广到 Dirac 费米子



如果共振态是 Dirac 正费米子 ψ ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相同



用自旋求和关系将相应传播子改写为

$$\bullet \xrightarrow{q} \bullet = \frac{i(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} = \frac{i}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$$



那么 $\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $u(\mathbf{q}, \lambda)$ 刚好分别是产生过程和衰变过程中正费米子 ψ 的外线因子

推广到 Dirac 费米子

🕌 如果共振态是 Dirac 正费米子 ψ ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相同

👷 用自旋求和关系将相应传播子改写为

$$\bullet \xrightarrow{q} \bullet = \frac{i(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} = \frac{i}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$$

⚠️ 那么 $\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $u(\mathbf{q}, \lambda)$ 刚好分别是产生过程和衰变过程中正费米子 ψ 的外线因子

🍄 如果共振态是 Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相反

🔪 相应的传播子为

$$\bullet \xleftarrow{q} \bullet = \frac{i(-\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} = \frac{-i}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{q}, \lambda) \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)$$

🔪 那么 $v(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $\bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)$ 也分别是产生过程和衰变过程中反费米子 $\bar{\psi}$ 的外线因子

🛒 上式右边分子上的负号与费米子算符的反对易性有关