

量子场论

第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数

10.1 节至 10.3 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2025 年 5 月 19 日



第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数

♥ 为深入了解量子场相互作用，本章**更加严格**地讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点**关联函数**，并初步讨论**重整化**

第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数

10.1 节 渐近态和渐近场

♥ 为深入了解量子场相互作用，本章**更加严格**地讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点**关联函数**，并初步讨论**重整化**

▶ **不存在相互作用**时量子场具有**简单**的**平面波展开式**

🏈 相应的**产生湮灭算符**具有确定的动量和极化

🏀 通过它们可以定义具有明确意义的**真空态** $|0\rangle$ 和**粒子态**

🎧 然而，**引入相互作用**之后，虽然 **Heisenberg 绘景**中的**量子场**包含着**完整**的**动力学信息**，但它**不再**具有简单的平面波展开式，也**不能**直接给出粒子态的具体形式

第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数

10.1 节 渐近态和渐近场

♥ 为深入了解量子场相互作用，本章更加严格地讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点关联函数，并初步讨论重整化

▶ 不存在相互作用时量子场具有简单的平面波展开式

🏀 相应的产生湮灭算符具有确定的动量和极化

🏀 通过它们可以定义具有明确意义的真空态 $|0\rangle$ 和粒子态

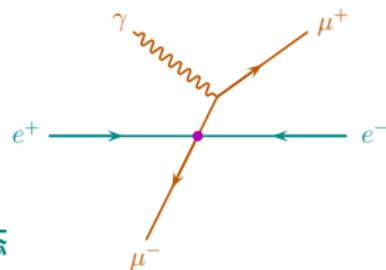
🎱 然而，引入相互作用之后，虽然 Heisenberg 绘景中的量子场包含着完整的动力学信息，但它不再具有简单的平面波展开式，也不能直接给出粒子态的具体形式

🏀 另一方面，如 6.2 节所述，在散射实验中，初末态应当具有确定的动量

🏀 它们是遥远过去和遥远未来处不受相互作用影响的渐近态

🏀 相应地，遥远过去和遥远未来处的量子场是自由的渐近场 (asymptotic field)

🏀 渐近态和渐近场与自由理论中的粒子态和量子场性质相似，比较容易处理



入场和出场

▣ 可以寻找相互作用理论中量子场与渐近场的关系，从而适当处理量子场相互作用

! 接下来的讨论不再求助于相互作用绘景，而是在 Heisenberg 绘景中进行严格处理

🔍 下面主要以实标量场 $\phi(x)$ 为例进行讨论，相关结论可以推广到其它量子场

🔍 将遥远过去 ($x^0 \rightarrow -\infty$) 和遥远未来 ($x^0 \rightarrow +\infty$) 处的渐近场分别称为入场 (in field) $\phi_{\text{in}}(x)$ 和出场 (out field) $\phi_{\text{out}}(x)$ ，它们与自由场一样满足 Klein-Gordon 方程

$$(\partial^2 + m^2)\phi_{\text{in}} = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi_{\text{out}} = 0$$

入场和出场

▣ 可以寻找**相互作用理论**中**量子场**与**渐近场**的关系，从而适当处理**量子场相互作用**

! 接下来的讨论**不再**求助于**相互作用绘景**，而是在 **Heisenberg 绘景**中进行**严格处理**

🔍 下面主要以**实标量场** $\phi(x)$ 为例进行讨论，相关结论可以推广到其它量子场

🔍 将**遥远过去** ($x^0 \rightarrow -\infty$) 和**遥远未来** ($x^0 \rightarrow +\infty$) 处的渐近场分别称为**入场** (in field) $\phi_{\text{in}}(x)$ 和**出场** (out field) $\phi_{\text{out}}(x)$ ，它们与**自由场**一样满足 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi_{\text{in}} = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi_{\text{out}} = 0$$

🏆 上式中的 m 是实验上能够测量的 ϕ 玻色子**物理质量** (physical mass)

💠 实际上，在领头阶之外的高阶计算中，相互作用会对 ϕ 玻色子的质量产生**修正**

🏆 因而物理质量 m 与**拉氏量**中的**质量参数**不同

🏆 称原来拉氏量的质量参数为**裸质量** (bare mass)，在下文中改记作 m_0

入算符和出算符

◀ 与自由场类似, $\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}(x)$ 满足等时对易关系

$$[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \pi_{\text{in}}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \phi_{\text{in}}(\mathbf{y}, t)] = [\pi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \pi_{\text{in}}(\mathbf{y}, t)] = 0$$

$$[\phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t), \pi_{\text{out}}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t), \phi_{\text{out}}(\mathbf{y}, t)] = [\pi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t), \pi_{\text{out}}(\mathbf{y}, t)] = 0$$

🌀 它们也具有平面波展开式

$$\phi_{\text{in}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p},\text{in}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p},\text{in}}^\dagger e^{ip \cdot x})$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p},\text{out}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p},\text{out}}^\dagger e^{ip \cdot x})$$

🚗 入算符 ($a_{\mathbf{p},\text{in}}, a_{\mathbf{p},\text{in}}^\dagger$) 和出算符 ($a_{\mathbf{p},\text{out}}, a_{\mathbf{p},\text{out}}^\dagger$) 各自满足产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p},\text{in}}, a_{\mathbf{q},\text{in}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\text{in}}, a_{\mathbf{q},\text{in}}] = [a_{\mathbf{p},\text{in}}^\dagger, a_{\mathbf{q},\text{in}}^\dagger] = 0$$

$$[a_{\mathbf{p},\text{out}}, a_{\mathbf{q},\text{out}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\text{out}}, a_{\mathbf{q},\text{out}}] = [a_{\mathbf{p},\text{out}}^\dagger, a_{\mathbf{q},\text{out}}^\dagger] = 0$$

入态和出态

□ 假设在**遥远过去**和**遥远未来**存在**稳定且唯一**的**真空态** $|0\rangle$ ，满足

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad a_{\mathbf{p},\text{in}} |0\rangle = a_{\mathbf{p},\text{out}} |0\rangle = 0$$

🛷 以此定义包含 n 个粒子的**入态** (in state)

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n, \text{in}}^\dagger |0\rangle$$

👟 以及**出态** (out state) $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n, \text{out}}^\dagger |0\rangle$

🦊 对于从 n 粒子入态到 m 粒子出态的散射过程，6.2 节引入的 S 矩阵元可以被更严格地定义为

$$S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle$$

🏂 另一方面， S 算符改由下式定义：

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = S |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle, \quad \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} | = \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} | S^\dagger$$

👤 其中第二式是第一式的**等价形式**， n 和 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 都是**任意的**

👄 $n = 0$ 对应于**真空态**

S 算符的性质

▶ 也就是说，**S 算符**作用到任意**出态**上会得到相应的**入态**，从而

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | S^\dagger S | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} \rangle &= \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{in} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} \rangle\end{aligned}$$

🏆 第二个等号成立的原因是 $(a_{\mathbf{p},\text{in}}, a_{\mathbf{p},\text{in}}^\dagger)$ 和 $(a_{\mathbf{p},\text{out}}, a_{\mathbf{p},\text{out}}^\dagger)$ 满足**相同形式的对易关系**

👉 上式表明

$$S^\dagger S = \mathbb{I}$$

👉 即 $S^{-1} = S^\dagger$ ，可见 **S 算符是么正算符**

👉 $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = S |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle$ 和 $\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} | = \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} | S^\dagger$
等价于

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle = S^\dagger |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle, \quad \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} | = \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} | S$$

S 矩阵元与 T 矩阵元

🔵 于是，可以将 S 矩阵元 $S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle$ 表达为

$$S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{in} | S | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | S | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} \rangle$$

🚲 之前 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$ 中使用的初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 是在自由理论中定义的粒子态，可以把它们都当作这里的入态，或者都当作这里的出态

🚲 将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$ ，则真正表征相互作用的 T 矩阵元表达为

$$T_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{in} | T | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | T | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} \rangle$$

🚲 如果动量集合 $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ 与 $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m\}$ 不完全相同，那么

$$\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{in} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out} \rangle = 0$$

🚲 从而 $S = \mathbb{I} + iT$ 中恒等算符 \mathbb{I} 对 S 矩阵元没有贡献，有

$$S_{fi} = iT_{fi}$$

入算符与出算符的关系

▲ 真空态的**稳定性**和**唯一性**意味着 $|0; \text{in}\rangle = |0; \text{out}\rangle = |0\rangle$

☂ 由 $|0; \text{in}\rangle = S |0; \text{out}\rangle$ 和 $|0; \text{out}\rangle = S^\dagger |0; \text{in}\rangle$ 得

$$S |0\rangle = S^\dagger |0\rangle = |0\rangle$$

🌊 这表明 $\langle 0| S |0\rangle = \langle 0| S^\dagger |0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$

🌊 将 n 粒子入态表达为

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = C a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n, \text{in}}^\dagger |0\rangle = C a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger S^\dagger \cdots S a_{\mathbf{p}_n, \text{in}}^\dagger S^\dagger |0\rangle$$

🏃 其中 $C = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$ ，第二步在所有相邻产生算符之间插入 $\mathbb{I} = S^\dagger S$ ，故

$$\begin{aligned} C a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n, \text{out}}^\dagger |0\rangle &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle = S^\dagger |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle \\ &= C S^\dagger a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger S \cdots S^\dagger a_{\mathbf{p}_n, \text{in}}^\dagger S |0\rangle \end{aligned}$$

🗉 比较得到

$$a_{\mathbf{p}, \text{out}}^\dagger = S^\dagger a_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger S, \quad a_{\mathbf{p}, \text{out}} = S^\dagger a_{\mathbf{p}, \text{in}} S$$

🏃 进而 $\phi_{\text{out}}(x) = S^\dagger \phi_{\text{in}}(x) S$ ，可见， S 算符给出联系入算符和出算符的相似变换

单粒子渐近态

 单个粒子到自身的跃迁过程应当与自由运动一样，因此

$$\langle \mathbf{q}; \text{out} | \mathbf{p}; \text{in} \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \langle \mathbf{q}; \text{in} | \mathbf{p}; \text{in} \rangle$$

 这意味着

$$|\mathbf{p}; \text{in}\rangle = |\mathbf{p}; \text{out}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$$

 即单粒子的入态等同于出态，可以将它们统一简记为 $|\mathbf{p}\rangle$

 如果局限在单粒子态空间进行讨论，那么

$$S |\mathbf{p}; \text{in}\rangle = S |\mathbf{p}; \text{out}\rangle = |\mathbf{p}; \text{in}\rangle = |\mathbf{p}; \text{out}\rangle$$

 即 S 算符对单粒子入态或出态的作用等同于恒等算符

10.2 节 Källén-Lehmann 谱表示

 自由的实标量场 $\phi_{\text{free}}(x)$ 等价于相互作用绘景中的实标量场 $\phi^{\text{I}}(x)$

 因而用 $\phi_{\text{free}}(x)$ 计算的 Feynman 传播子就是 6.4.1 小节推出来的

$$\begin{aligned} D_{\text{F}}(x-y) &= \langle 0 | \text{T}[\phi_{\text{free}}(x)\phi_{\text{free}}(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \text{T}[\phi^{\text{I}}(x)\phi^{\text{I}}(y)] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned}$$

 引入相互作用之后，在 Heisenberg 绘景中用实标量场 $\phi(x)$ 构造出来的两点关联函数 (two-point correlation function)

$$G^{(2)}(x, y) \equiv \langle 0 | \text{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle$$

将不再等同于 Feynman 传播子 $D_{\text{F}}(x-y)$ ，也会失去简单的形式

 这个两点关联函数是相互作用理论中的完整传播子，下面对它的结构进行分析

中间态完备集

🌿 为了计算两点关联函数 $\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle$ ，先考虑**期待值** $\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$

🐕 在这个期待值里面插入一组**中间态的完备集** $\{|\Psi\rangle\}$ ，它满足**完备性关系**

$$\sum_{\Psi} |\Psi\rangle \langle \Psi| = \mathbb{I}$$

🐎 $\{|\Psi\rangle\}$ 中包含满足 $p^2 = m^2$ 和 $p^0 > 0$ 的**单粒子态** $|\mathbf{p}\rangle$ ，也包含各种**多粒子态**

🐕 具体来说，里面任意的 $|\Psi\rangle$ 都是**四维动量算符** P^μ 的**本征态**，满足

$$P^\mu |\Psi\rangle = p_\Psi^\mu |\Psi\rangle, \quad p_\Psi^2 \geq 0, \quad p_\Psi^0 \geq 0$$

🐕 在**相互作用理论**中，应该把这些 $|\Psi\rangle$ 看作**自由的渐近态**，而 p_Ψ^μ 是 $|\Psi\rangle$ 中**所有粒子的四维动量之和**

🐕 根据 3.2 节知识，对 $\phi(0)$ 作**量子时空平移变换** $U(1, x) = \exp(iP^\mu x_\mu)$ ，得

$$\phi(x) = U(1, x)\phi(0)U^{-1}(1, x) = e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x}$$

谱密度

🍀 再注意到真空态不具有能动量， $P^\mu |0\rangle = 0 |0\rangle$ ，推出

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\Psi} \langle 0 | \phi(x) | \Psi \rangle \langle \Psi | \phi(y) | 0 \rangle = \sum_{\Psi} \langle 0 | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | \Psi \rangle \langle \Psi | e^{iP \cdot y} \phi(0) e^{-iP \cdot y} | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\Psi} \langle 0 | \phi(0) e^{-i p_{\Psi} \cdot x} | \Psi \rangle \langle \Psi | e^{i p_{\Psi} \cdot y} \phi(0) | 0 \rangle = \sum_{\Psi} e^{-i p_{\Psi} \cdot (x-y)} |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 \\
 &= \int d^4 p \sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) e^{-i p \cdot (x-y)} |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2
 \end{aligned}$$

🐏 令

$$\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 = \frac{\theta(p^0) \rho(p^2)}{(2\pi)^3}$$

🐏 其中 $\rho(p^2)$ 称为谱密度 (spectral density)，则

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \rho(p^2) e^{-i p \cdot (x-y)}$$

谱密度的性质

✿
$$\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 = \frac{\theta(p^0) \rho(p^2)}{(2\pi)^3}$$
 左边是实值、正定、Lorentz 不变的

🐷 从而右边的谱密度 $\rho(p^2)$ 是依赖于 p^2 的实值、正定、Lorentz 不变的函数

🦏 由于 $p_{\Psi}^2 \geq 0$ 且 $p_{\Psi}^0 \geq 0$ ，四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p - p_{\Psi})$ 保证具有物理意义的 p^{μ} 也满足 $p^2 \geq 0$ 和 $p^0 \geq 0$ ，这是等式右边引入 $\theta(p^0)$ 的理由

谱密度的性质

🍀
$$\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 = \frac{\theta(p^0) \rho(p^2)}{(2\pi)^3}$$
 左边是实值、正定、Lorentz 不变的

🐷 从而右边的谱密度 $\rho(p^2)$ 是依赖于 p^2 的实值、正定、Lorentz 不变的函数

🦏 由于 $p_{\Psi}^2 \geq 0$ 且 $p_{\Psi}^0 \geq 0$ ，四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p - p_{\Psi})$ 保证具有物理意义的 p^{μ} 也满足 $p^2 \geq 0$ 和 $p^0 \geq 0$ ，这是等式右边引入 $\theta(p^0)$ 的理由

🐮 进一步，利用 $\rho(p^2) = \int_0^{\infty} ds \delta(p^2 - s) \rho(s)$ 推出

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \rho(p^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int_0^{\infty} ds \rho(s) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int_0^{\infty} ds \rho(s) \Delta(x - y, s) \end{aligned}$$

🐮 其中

$$\Delta(x - y, s) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

🐮 这样就把谱密度挪到四维动量积分之外了

两点关联函数

🌱 现在，将**两点关联函数**表达为

$$\begin{aligned}\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty ds \rho(s) \Delta_F(x - y, s)\end{aligned}$$

🐫 其中 $\Delta_F(x - y, s) \equiv \theta(x^0 - y^0) \Delta(x - y, s) + \theta(y^0 - x^0) \Delta(y - x, s)$

🐫 这表明两点关联函数实际上**只是** $x^\mu - y^\mu$ 的函数，即 $G^{(2)}(x, y) = G^{(2)}(x - y)$

🐎 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\begin{aligned}\Delta(x - y, s) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dp^0 \theta(p^0) \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - s] e^{-ip \cdot (x - y)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x - y)} \frac{e^{-ip^0 \cdot (x^0 - y^0)}}{2p^0} \Bigg|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + s}}\end{aligned}$$

$$\Delta_F(x - y, s)$$

 将 $\theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} = \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

(6.4.2 小节公式) 中的 m^2 替换成 s , 得

$$\left[\theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{2p^0} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{2p^0} \right] \Bigg|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + s}} = \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^2 - s + i\epsilon}$$

 从而推出

$$\begin{aligned} \Delta_F(x - y, s) &= \theta(x^0 - y^0) \Delta(x - y, s) + \theta(y^0 - x^0) \Delta(y - x, s) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{2p^0} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{2p^0} \right] \Bigg|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + s}} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)} \end{aligned}$$

 注意第二步对第二项的积分变量作了替换 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$

Källén-Lehmann 谱表示

🌽 这里得到的 $\Delta_F(x-y, s) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$ 与

Feynman 传播子 $D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$

具有相同的形式，只是将 m^2 替换成 s

🐘 **两点关联函数** $\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \Delta_F(x-y, s)$ 化为

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

🐘 这样的表示方式称为 **Källén-Lehmann 谱表示** (spectral representation)

🐘 对于**自由**的实标量场，**谱密度** $\rho(s) = \delta(s - m^2)$ ，而**上式**退化为 **Feynman 传播子**



Gunnar Källén
(1926–1968)



Harry Lehmann
(1924–1998)

动量空间中的完整传播子

 对 $G^{(2)}(x, 0) = \langle 0 | T[\phi(x)\phi(0)] | 0 \rangle$ 作 **Fourier 变换**, 得

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} G^{(2)}(x, 0) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T[\phi(x)\phi(0)] | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty ds \rho(s) \int \frac{d^4x d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - s + i\epsilon} e^{-i(q-p) \cdot x} \\ &= \int_0^\infty ds \rho(s) \int d^4q \frac{i}{q^2 - s + i\epsilon} \delta^{(4)}(q - p) = \int_0^\infty ds \rho(s) \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon}\end{aligned}$$

 这是**动量空间中的完整传播子**

 它是动量空间中的 **Feynman 传播子**

$$\begin{aligned}\tilde{D}_F(p) &\equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} D_F(x) = \int \frac{d^4x d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i(q-p) \cdot x} \\ &= \int d^4q \delta^{(4)}(q - p) \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

的**推广**

另一种 Källén-Lehmann 谱表示

🌲 用 $\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \Delta(x-y, s)$ 将 $[\phi(x), \phi(y)]$ 的真空期待值表达为

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \Delta_{PJ}(x-y, s)$$

🐯 这也是一种 **Källén-Lehmann 谱表示**，其中

$$\begin{aligned} \Delta_{PJ}(x-y, s) &\equiv \Delta(x-y, s) - \Delta(y-x, s) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}}{2p^0} \Bigg|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + s}} \end{aligned}$$

🐯 $\Delta_{PJ}(x-y, s)$ 与 6.2 节的 **Pauli-Jordan 传播函数**

$$D_{PJ}(x-y) = [\phi_{\text{free}}(x), \phi_{\text{free}}(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}}{2E_p}$$

具有相同的形式，只是将 m^2 替换为 s

$\Delta_{PJ}(x, s)$ 的偏导数

 $\Delta_{PJ}(x, s) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot x} - e^{ip \cdot x}}{2p^0} \Big|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + s}}$ 对 x^0 求导, 得

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_{PJ}(x, s) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (e^{-ip \cdot x} + e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + s}}$$

 取 $x^0 = 0$, 推出

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_{PJ}(x, s) \Big|_{x^0=0} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (e^{ip \cdot \mathbf{x}} + e^{-ip \cdot \mathbf{x}}) = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

 从而

$$\frac{\partial}{\partial y^0} \Delta_{PJ}(x - y, s) \Big|_{x^0=y^0} = -\frac{\partial}{\partial(x^0 - y^0)} \Delta_{PJ}(x - y, s) \Big|_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

谱密度的归一化条件

 $\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$ 这样的 **Källén-**

Lehmann 谱表示表明，**谱密度** $\rho(s)$ 是在**态矢** $\phi(x) |0\rangle$ 里面找到**不变质量平方为** s 的**自由态的概率密度**，而 s 可以取物理上能够得到的任何数值

 作为概率密度， $\rho(s)$ 应该是**归一化**的

谱密度的归一化条件

 $\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$ 这样的 **Källén-Lehmann**

谱表示表明，**谱密度** $\rho(s)$ 是在**态矢** $\phi(x) | 0 \rangle$ 里面找到**不变质量平方为** s 的**自由态的概率密度**，而 s 可以取物理上能够得到的任何数值

 作为概率密度， $\rho(s)$ 应该是**归一化**的

 假设相互作用拉氏量不涉及 $\partial_\mu \phi$ ，则 $\phi(x)$ 的共轭动量密度为 $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x)$

 Heisenberg 绘景**等时对易关系**为 $[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

 另一方面，注意到 $[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)]$ 是一个 c 数，有

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] &= \left. \frac{\partial}{\partial y^0} \langle 0 | [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] | 0 \rangle \right|_{x^0=y^0=t} \\ &= \int_0^\infty ds \rho(s) \left. \frac{\partial}{\partial y^0} \Delta_{PJ}(x-y, s) \right|_{x^0=y^0=t} = \int_0^\infty ds \rho(s) i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

 与等时对易关系比较，即得**归一化条件**

$$\int_0^\infty ds \rho(s) = 1$$

单粒子态的完备性关系

 根据单粒子态内积的表达式，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}\rangle &= \int d^3p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) |\mathbf{p}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle \cdot 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle \end{aligned}$$

 观察得到单粒子态的完备性关系

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = \mathbb{I}_{1\text{-particle}}$$

 其中 $\mathbb{I}_{1\text{-particle}}$ 代表局限于单粒子态时的恒等算符

 于是， $\sum_{\Psi} |\Psi\rangle \langle \Psi| = \mathbb{I}$ 中对单粒子态的求和部分可作以下替换

$$\sum_{|\mathbf{p}\rangle} \rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2)$$

 这里用到 $\int dp^0 \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2p^0} \Big|_{p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$

场强重整化常数

🌻 从而，将 $\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 = \frac{\theta(p^0) \rho(p^2)}{(2\pi)^3}$ 化为

$$\begin{aligned} & \theta(p^0) \rho(p^2) \\ &= (2\pi)^3 \sum_{|\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p - q) |\langle \mathbf{q} | \phi(0) | 0 \rangle|^2 + (2\pi)^3 \sum_{|\Psi\rangle \neq |\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 \\ &= \int d^4 q \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) \delta^{(4)}(p - q) |\langle \mathbf{q} | \phi(0) | 0 \rangle|^2 + \theta(p^0) \hat{\rho}(p^2) \\ &= \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) |\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle|^2 + \theta(p^0) \hat{\rho}(p^2) \end{aligned}$$

🦜 其中 $\theta(p^0) \hat{\rho}(p^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_{|\Psi\rangle \neq |\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2$

场强重整化常数

🌻 从而，将 $\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 = \frac{\theta(p^0) \rho(p^2)}{(2\pi)^3}$ 化为

$$\begin{aligned} & \theta(p^0) \rho(p^2) \\ &= (2\pi)^3 \sum_{|\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p - q) |\langle \mathbf{q} | \phi(0) | 0 \rangle|^2 + (2\pi)^3 \sum_{|\Psi\rangle \neq |\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2 \\ &= \int d^4 q \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) \delta^{(4)}(p - q) |\langle \mathbf{q} | \phi(0) | 0 \rangle|^2 + \theta(p^0) \hat{\rho}(p^2) \\ &= \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) |\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle|^2 + \theta(p^0) \hat{\rho}(p^2) \end{aligned}$$

🦜 其中 $\theta(p^0) \hat{\rho}(p^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_{|\Psi\rangle \neq |\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p - p_{\Psi}) |\langle \Psi | \phi(0) | 0 \rangle|^2$

🌲 令 $Z \equiv |\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle|^2$ ，得到 $\rho(s) = Z \delta(s - m^2) + \hat{\rho}(s)$

🦉 第一项和第二项分别是单粒子态和多粒子态的贡献

🦩 Z 是在态矢 $\phi(0) | 0 \rangle$ 里面找到质量为 m 的单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的概率，称为场强重整化常数 (field strength renormalization constant)，它与量子场论的重整化问题密切相关

典型谱密度

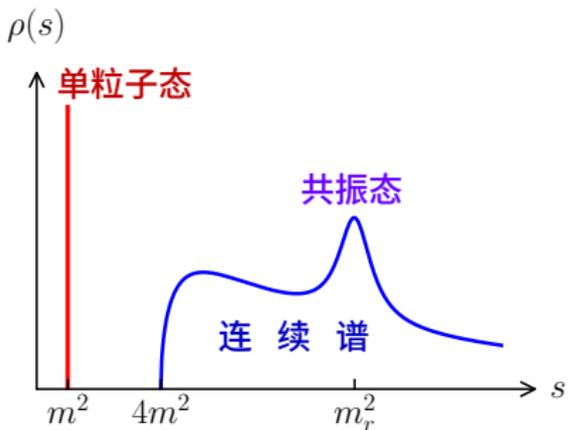
🌸 谱密度的具体形式依赖于相互作用理论，一个典型谱密度 $\rho(s)$ 的图像如右图所示

🐍 它在 $s = m^2$ 处的形式为 $Z \delta(s - m^2)$ ，用竖线表示，对应于物理质量为 m 的单粒子中间态，概率为 Z

🦎 产生双粒子末态的运动学条件是 $s > 4m^2$ ，因而从 $s > 4m^2$ 开始出现多粒子中间态引起的连续谱 (continuum)

🐸 连续谱有可能呈现出比较复杂的结构

🐸 图中 $s \sim m_r^2$ 处存在一个共振态 (resonance) r ，它具有一定宽度，中心质量为 m_r



典型谱密度

🌸 谱密度的具体形式依赖于相互作用理论，一个典型谱密度 $\rho(s)$ 的图像如右图所示

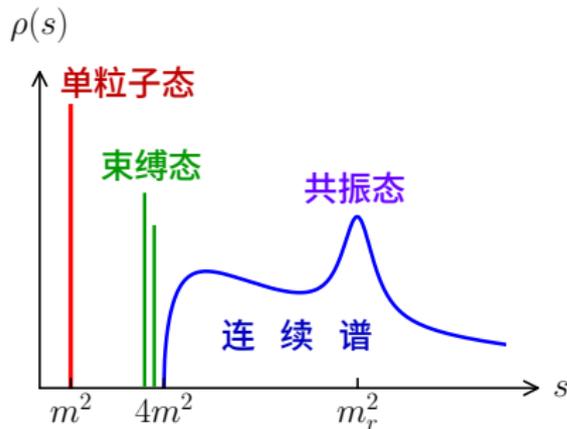
🐍 它在 $s = m^2$ 处的形式为 $Z \delta(s - m^2)$ ，用竖线表示，对应于物理质量为 m 的单粒子中间态，概率为 Z

🦎 产生双粒子末态的运动学条件是 $s > 4m^2$ ，因而从 $s > 4m^2$ 开始出现多粒子中间态引起的连续谱 (continuum)

🐸 连续谱有可能呈现出比较复杂的结构

🐸 图中 $s \sim m_r^2$ 处存在一个共振态 (resonance) r ，它具有一定宽度，中心质量为 m_r

🦎 在某些相互作用理论中，还可能存在由两个粒子构成的若干个束缚态 (bound state)，它们表现为 s 略小于 $4m^2$ 处正比于 δ 函数的竖线



动量空间中的 Källén-Lehmann 谱表示

🌻 将 $\rho(s) = Z \delta(s - m^2) + \hat{\rho}(s)$ 代入归一化条件 $\int_0^\infty ds \rho(s) = 1$, 得

$$1 = \int_0^\infty ds \rho(s) = Z + \int_{\sim 4m^2}^\infty ds \rho(s)$$

🐟 注意在 $s > m^2$ 处 $\rho(s) = \hat{\rho}(s)$; 由此可见, $0 \leq Z < 1$

🌻 存在相互作用时, $\phi(x)$ 作用到 $|0\rangle$ 上除了得到单粒子态之外, 还有一定概率得到多粒子态, 体现为 $Z < 1$

🐟 在自由理论中, 则有 $Z = 1$

🐟 动量空间中的完整传播子 $\tilde{G}^{(2)}(p) = \int_0^\infty ds \rho(s) \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon}$ 化为

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$$

🐟 这是动量空间中的 Källén-Lehmann 谱表示

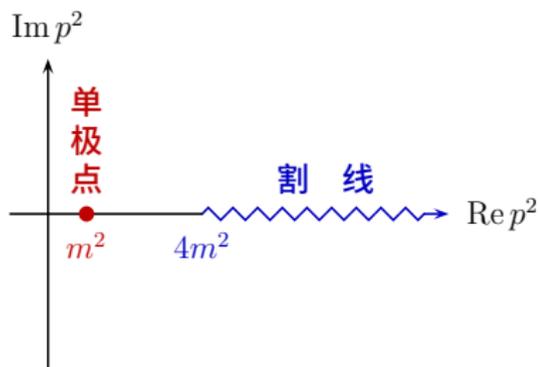
$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的解析结构

🌹 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的解析结构如右图所示，在实轴上 $p^2 = m^2$ 处存在一个单极点 (考虑到无穷小量 $i\epsilon$ ，极点位置实际上在 $p^2 = m^2 - i\epsilon$ 处，与实轴略有偏离)

🦀 故物理质量 m 也称为极点质量 (pole mass)

🦀 场强重整化常数 Z 对应着 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在这个单极点处的留数，有

$$Z = \lim_{p^2 \rightarrow m^2} [-i(p^2 - m^2)\tilde{G}^{(2)}(p)]$$



$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的解析结构

🌹 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的解析结构如右图所示，在实轴上 $p^2 = m^2$ 处存在一个单极点 (考虑到无穷小量 $i\epsilon$ ，极点位置实际上在 $p^2 = m^2 - i\epsilon$ 处，与实轴略有偏离)

🦀 故物理质量 m 也称为极点质量 (pole mass)

🦀 场强重整化常数 Z 对应着 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在这个单极点处的留数，有

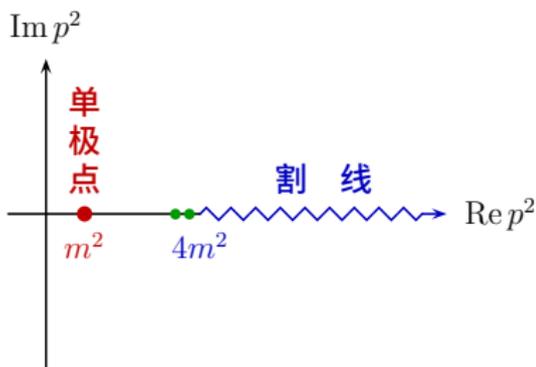
$$Z = \lim_{p^2 \rightarrow m^2} [-i(p^2 - m^2)\tilde{G}^{(2)}(p)]$$

🥥 如果存在束缚态，则实轴上 p^2 略小于 $4m^2$ 的地方还会有更多的单极点

🐸 此外，在 $p^2 > 4m^2$ 的实轴区间上存在一条割线 (branch cut)，割线两边的函数值不连续

🦉 这是因为 $\int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$ 的被积函数在 $p^2 = s$ 处存在单极点，对无穷多个

单极点位置 s 进行积分会导致割线，可以通过下面的例子理解



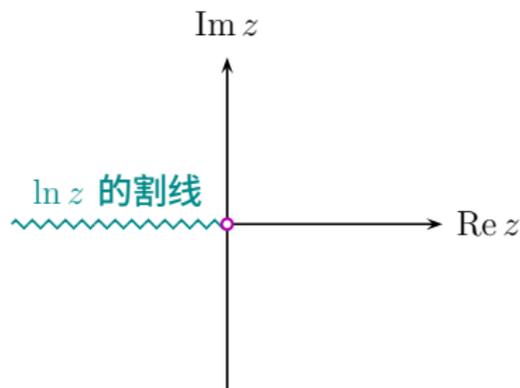
对割线的理解

🌸 函数 $f_s(z) = (z - s)^{-1}$ 在 $z = s$ 处存在单极点，对 s 从 -1 到 1 积分，得

$$g(z) = \int_{-1}^1 ds f_s(z) = \int_{-1}^1 \frac{ds}{z - s} = \ln \frac{z + 1}{z - 1}$$

🐝 对数函数 $\ln z$ 的支点 (branch point) 位于原点 $z = 0$ 和无穷远点 $z = \infty$ 处

🕷️ 可将割线取为负实轴 $z < 0$ ，用割线将复平面割开，可以得到单值分支



对割线的理解

🌸 函数 $f_s(z) = (z - s)^{-1}$ 在 $z = s$ 处存在单极点，对 s 从 -1 到 1 积分，得

$$g(z) = \int_{-1}^1 ds f_s(z) = \int_{-1}^1 \frac{ds}{z - s} = \ln \frac{z + 1}{z - 1}$$

🐝 对数函数 $\ln z$ 的支点 (branch point) 位于原点 $z = 0$ 和无穷远点 $z = \infty$ 处

🕷️ 可将割线取为负实轴 $z < 0$ ，用割线将复平面割开，可以得到单值分支

🐞 $\frac{z + 1}{z - 1} = 0$ 和 $\frac{z + 1}{z - 1} = \infty$ 分别给出 $z = -1$ 和 $z = 1$

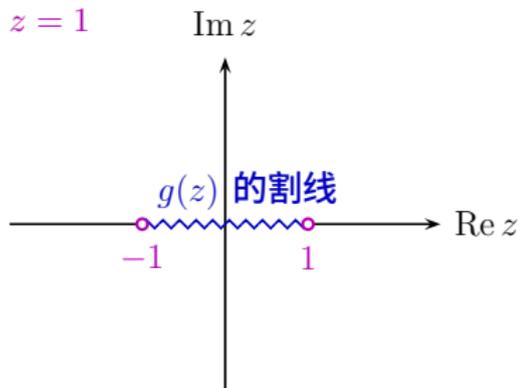
🐛 这是 $g(z)$ 的两个支点，它们之间存在一条割线

🐜 $\frac{z + 1}{z - 1} < 0$ 意味着 $-1 < z < 1$

🐛 因而 $g(z)$ 的割线可取为实区间 $(-1, 1)$

🦋 $g(z) = \int_{-1}^1 \frac{ds}{z - s}$ 表明，可将这条割线看作排

列在实区间 $(-1, 1)$ 上具有无穷小留数 ds 的无穷多个单极点的集合



场重整化常数与渐近场

🌶️ 定义式 $Z \equiv |\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle|^2$ 表明, $\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle$ 的模是 \sqrt{Z}

🍪 假设它的相位因子是 1, 则 $\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle = \sqrt{Z}$

🍌 从而 $\langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | 0 \rangle = e^{iP \cdot x} \langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle = \sqrt{Z} e^{iP \cdot x}$

🍇 另一方面, 渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}(x)$ 等价于自由场, 有

$$\langle \mathbf{p} | \phi_{\text{in}}(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi_{\text{out}}(x) | 0 \rangle = e^{iP \cdot x}$$

🍕 可见 $\langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | \phi_{\text{in}}(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | \phi_{\text{out}}(x) | 0 \rangle$

场重整化常数与渐近场

🌶️ 定义式 $Z \equiv |\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle|^2$ 表明, $\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle$ 的模是 \sqrt{Z}

🥨 假设它的相位因子是 1, 则 $\langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle = \sqrt{Z}$

🍌 从而 $\langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | 0 \rangle = e^{iP \cdot x} \langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle = \sqrt{Z} e^{iP \cdot x}$

🍷 另一方面, 渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}(x)$ 等价于自由场, 有

$$\langle \mathbf{p} | \phi_{\text{in}}(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi_{\text{out}}(x) | 0 \rangle = e^{iP \cdot x}$$

🍕 可见 $\langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | \phi_{\text{in}}(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | \phi_{\text{out}}(x) | 0 \rangle$

🍳 这并不意味着 $\phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{in}}(x)$ 或 $\phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{out}}(x)$

🍞 否则 $\phi(x)$ 会满足自由场的运动方程 $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$

🧀 不过, 可以推测

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{in}}(x), \quad \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{out}}(x)$$

🍔 即 $\sqrt{Z} \phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\sqrt{Z} \phi_{\text{out}}(x)$ 分别是 $\phi(x)$ 在 $x^0 \rightarrow -\infty$ 和 $x^0 \rightarrow +\infty$ 的渐近极限

渐近条件

 但 $\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{out}}(x)$ 并不合理，它们意味着

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = Z[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y}, t)] = iZ\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

 仅当 $Z = 1$ 时才能与等时对易关系相容，但相互作用的存在却要求 $Z < 1$

 其实，这是算符层面上的渐近极限，在收敛性方面要求太高

渐近条件

但 $\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{out}}(x)$ 并不合理，它们意味着

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = Z[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y}, t)] = iZ\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

仅当 $Z = 1$ 时才能与等时对易关系相容，但相互作用的存在却要求 $Z < 1$

其实，这是算符层面上的渐近极限，在收敛性方面要求太高

需要把它们弱化成期待值层面上的渐近极限，即下列渐近条件，

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \langle \Psi_2 | \phi(x) | \Psi_1 \rangle = \sqrt{Z} \langle \Psi_2 | \phi_{\text{in}}(x) | \Psi_1 \rangle$$

$$\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \langle \Psi_2 | \phi(x) | \Psi_1 \rangle = \sqrt{Z} \langle \Psi_2 | \phi_{\text{out}}(x) | \Psi_1 \rangle$$

其中 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 是 Hilbert 空间中两个任意的态矢；这样的渐近条件不能保证

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \Psi_2 | [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] | \Psi_1 \rangle = Z \langle \Psi_2 | [\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y}, t)] | \Psi_1 \rangle$ 成立，因而不会跟等时对易关系矛盾

推广到 Dirac 旋量场

 上述讨论可以推广到具有自旋的量子场，但需要定义多个谱函数来描述多粒子态

 推广到 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 时，动量空间中的完整传播子表达为

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle = \frac{iZ_2(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

 这里省略了多粒子态贡献

 场强重整化常数 Z_2 对应于物理质量为 m 的单粒子态的概率，满足

$$\langle 0 | \psi(0) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}, \lambda), \quad \langle 0 | \bar{\psi}(0) | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = \sqrt{Z_2} \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\langle \mathbf{p}^+, \lambda | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle = \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \langle \mathbf{p}^-, \lambda | \psi(0) | 0 \rangle = \sqrt{Z_2} v(\mathbf{p}, \lambda)$$

 相应地，存在渐近条件

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \langle \Psi_2 | \psi(x) | \Psi_1 \rangle = \sqrt{Z_2} \langle \Psi_2 | \psi_{\text{in}}(x) | \Psi_1 \rangle$$

$$\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \langle \Psi_2 | \psi(x) | \Psi_1 \rangle = \sqrt{Z_2} \langle \Psi_2 | \psi_{\text{out}}(x) | \Psi_1 \rangle$$

10.3 节 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

🎸 前面将**实标量场** $\phi(x)$ 的**两点关联函数**定义为

$$G^{(2)}(x, y) \equiv \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle$$

🎱 它是**两个时空点**处的场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的**时序乘积**的真空期待值

🎱 类似地推广到 n 个**时空点**，将 n **点关联函数**定义为

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle$$

🎱 它也称为 n 点 **Green 函数**

🎱 本节探讨这种**多点关联函数**与**散射矩阵元**之间的关系，即

Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) 约化公式



Kurt Symanzik
(1923–1983)



Wolfhart Zimmermann
(1928–2016)

处理 S 矩阵元

 对于 $n \rightarrow m$ 散射过程，从 S 矩阵元的入态中抽出第一个产生算符 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger$ ，得到

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &\quad + \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | (a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

 从第一项的出态抽出第一个湮灭算符 $a_{\mathbf{q}_1, \text{out}}$ ，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$\begin{aligned} &\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | [a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)] | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &\quad + 2E_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

避免可约化的情况

 依次从**出态**中抽出余下的**湮灭算符**，并作**对易**，最后利用 $\langle 0 | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = 0$ 推出

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 = & \sqrt{8E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger a_{\mathbf{q}_2, \text{out}} a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 & + 2E_{\mathbf{q}_2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 & + 2E_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 = & \dots = \sum_{k=1}^m 2E_{\mathbf{q}_k} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_k) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle
 \end{aligned}$$

避免可约化的情况

 依次从**出态**中抽出余下的**湮灭算符**，并作**对易**，最后利用 $\langle 0 | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = 0$ 推出

$$\begin{aligned} & \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \sqrt{8E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger a_{\mathbf{q}_2, \text{out}} a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ & \quad + 2E_{\mathbf{q}_2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ & \quad + 2E_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \dots = \sum_{k=1}^m 2E_{\mathbf{q}_k} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_k) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

 如果**出态**中有一个动量 \mathbf{q}_k 与 \mathbf{p}_1 相同，则 S_{fi} 第一项约化为 $(n-1) \rightarrow (m-1)$ 散射矩阵元与 $2E_{\mathbf{q}_k} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_k)$ 的乘积

 它意味着第 1 个入态粒子只发生**自由运动**，根本不参与散射

 为了避免处理这种**可约化**的情况，在下面的推导中**假设** m 个出态粒子的动量与 n 个入态粒子的动量各不相同，从而 S_{fi} 第一项的贡献为零，只需要考虑第二项

 此时 S 算符中的**恒等算符没有贡献**，可以用 T 矩阵元代替 S 矩阵元，即

$$iT_{fi} = S_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | (a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle$$

处理 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger$

 现在处理上述表达式中的算符 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger$ ，由 2.3.1 小节结果推出

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} [\partial_0 \phi_{\text{in}}(x) + ip^0 \phi_{\text{in}}(x)] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x [e^{-ip \cdot x} \partial_0 \phi_{\text{in}}(x) - \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 e^{-ip \cdot x}] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_{\text{in}}(x) \end{aligned}$$

 其中 $\partial_{x^0} \equiv \partial/\partial x^0$ ；类似地，有 $a_{\mathbf{p}, \text{out}}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_{\text{out}}(x)$

处理 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger$

 现在处理上述表达式中的算符 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger$ ，由 2.3.1 小节结果推出

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} [\partial_0 \phi_{\text{in}}(x) + ip^0 \phi_{\text{in}}(x)] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x [e^{-ip \cdot x} \partial_0 \phi_{\text{in}}(x) - \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 e^{-ip \cdot x}] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_{\text{in}}(x) \end{aligned}$$

 其中 $\partial_{x^0} \equiv \partial/\partial x^0$ ；类似地，有 $a_{\mathbf{p}, \text{out}}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_{\text{out}}(x)$

 从而 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \int d^3x e^{-ip_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} [\phi_{\text{out}}(x) - \phi_{\text{in}}(x)]$

$$= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x e^{-ip_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi(x)$$

 第二步用到渐近条件 $\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \langle \Psi_2 | \phi(x) | \Psi_1 \rangle = \sqrt{Z} \langle \Psi_2 | \phi_{\text{in}}(x) | \Psi_1 \rangle$ 和 $\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \langle \Psi_2 | \phi(x) | \Psi_1 \rangle = \sqrt{Z} \langle \Psi_2 | \phi_{\text{out}}(x) | \Psi_1 \rangle$

扩充成四维积分

 当然，渐近条件在期待值层面上才成立，这里的算符

$$a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x e^{-ip_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi(x)$$

将被用到 $iT_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | (a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle$ 的期待值中，因而使用渐近条件是合理的

 这里为了书写方便没有在这个算符表达式上添加相应的左矢和右矢

扩充成四维积分

 当然，渐近条件在期待值层面上才成立，这里的算符

$$a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x e^{-ip_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi(x)$$

将被用到 $iT_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | (a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle$ 的期待值中，因而使用渐近条件是合理的

 这里为了书写方便没有在这个算符表达式上添加相应的左矢和右矢

 利用积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \partial_{x^0} f(x) = f(x)|_{x^0 \rightarrow -\infty}^{x^0 \rightarrow +\infty} = \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) f(x)$ 将

上面的三维积分 $\int d^3x$ 扩充成四维积分 $\int d^4x$ ，推出

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x \partial_{x^0} [e^{-ip_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi(x)] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x \partial_{x^0} [e^{-ip_1 \cdot x} \partial_{x^0} \phi(x) - \partial_{x^0} e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x [e^{-ip_1 \cdot x} \partial_{x^0}^2 \phi(x) - \partial_{x^0}^2 e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] \end{aligned}$$

利用运动方程化简

 $e^{-ip_1 \cdot x}$ 其实是 **Klein-Gordon 方程** 的平面波解，满足 $(\partial_x^2 + m^2)e^{-ip_1 \cdot x} = 0$

 故 $\partial_{x_0}^2 e^{-ip_1 \cdot x} = (\nabla_x^2 - m^2)e^{-ip_1 \cdot x}$ ，于是

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x [e^{-ip_1 \cdot x} \partial_{x_0}^2 \phi(x) - \partial_{x_0}^2 e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x [e^{-ip_1 \cdot x} \partial_{x_0}^2 \phi(x) - (\nabla_x^2 - m^2)e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] \end{aligned}$$

利用运动方程化简

 $e^{-ip_1 \cdot x}$ 其实是 **Klein-Gordon 方程** 的平面波解, 满足 $(\partial_x^2 + m^2)e^{-ip_1 \cdot x} = 0$

 故 $\partial_{x_0}^2 e^{-ip_1 \cdot x} = (\nabla_x^2 - m^2)e^{-ip_1 \cdot x}$, 于是

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x [e^{-ip_1 \cdot x} \partial_{x_0}^2 \phi(x) - \partial_{x_0}^2 e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x [e^{-ip_1 \cdot x} \partial_{x_0}^2 \phi(x) - (\nabla_x^2 - m^2)e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] \end{aligned}$$

 被积函数中包含 **Laplace 算符** 的项可化为

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x) &= \nabla_x \cdot [\nabla_x e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] - \nabla_x e^{-ip_1 \cdot x} \cdot \nabla_x \phi(x) \\ &= \nabla_x \cdot [\nabla_x e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x)] - \nabla_x \cdot [e^{-ip_1 \cdot x} \nabla_x \phi(x)] + e^{-ip_1 \cdot x} \nabla_x^2 \phi(x) \end{aligned}$$

 从而 $a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x \{ e^{-ip_1 \cdot x} (\partial_{x_0}^2 - \nabla_x^2 + m^2) \phi(x) - \nabla_x \cdot [\nabla_x e^{-ip_1 \cdot x} \phi(x) - e^{-ip_1 \cdot x} \nabla_x \phi(x)] \}$

丢弃三维全散度项  $= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} Z}} \int d^4x e^{-ip_1 \cdot x} (\partial_x^2 + m^2) \phi(x)$

减少一个入态粒子的表达式

 这样就可以在**散射矩阵元**中**减少**一个动量为 \mathbf{p}_1 的**入态粒子**，得到

$$\begin{aligned} iT_{fi} &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | (a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot x} (\partial_x^2 + m^2) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \phi(x) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

 把它转换成受到 **Klein-Gordon 微分算符** $(\partial_x^2 + m^2)$ 作用的**场算符** $\phi(x)$ 的

Fourier 变换 $\int d^4x e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot x}$ ，并出现一个 $\frac{i}{\sqrt{Z}}$ **因子**

减少一个入态粒子的表达式

 这样就可以在**散射矩阵元**中**减少**一个动量为 \mathbf{p}_1 的**入态粒子**，得到

$$\begin{aligned}
 iT_{fi} &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | (a_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - a_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x e^{-ip_1 \cdot x} (\partial_x^2 + m^2) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \phi(x) | \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle
 \end{aligned}$$

 把它转换成受到 **Klein-Gordon 微分算符** $(\partial_x^2 + m^2)$ 作用的**场算符** $\phi(x)$ 的

Fourier 变换 $\int d^4x e^{-ip_1 \cdot x}$ ，并出现一个 $\frac{i}{\sqrt{Z}}$ **因子**

 接下来**重复操作**，**依次减少散射矩阵元**中**每个粒子**，转化成用**场算符**表达的结果

 将**动量为 \mathbf{p}_2 的入态粒子的产生算符**抽出来，得

$$iT_{fi} = \frac{i\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}{\sqrt{Z}} \int d^4x e^{-ip_1 \cdot x} (\partial_x^2 + m^2) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \phi(x) a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger | \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle$$

处理 $\phi(x)a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger$

🔑 由 $a_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_{\text{in}}(x)$ 推出

$$\phi(x)a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} [\phi(x)\phi_{\text{in}}(y)]$$

渐近条件 \rightarrow

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} [\phi(x)\phi(y)] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \int d^4y \partial_{y^0} \left\{ e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] \right\} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] \end{aligned}$$

🚗 $y^0 \rightarrow -\infty$ 时必有 $x^0 > y^0$ ，在第三步将 $\phi(x)\phi(y)$ 改写成时序乘积 $\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$

🚗 第四步用到积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \partial_{x^0} f(x) = \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) f(x)$

处理 $\phi(x)a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger$ 中的两项 参考前面推出的

$$\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}} \int d^4x \partial_{x^0} [e^{-ip_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi(x)] = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}} \int d^4x e^{-ip_1 \cdot x} (\partial_x^2 + m^2) \phi(x)$$

 $\phi(x)a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger$ 中**第一项**化为

$$\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \int d^4y \partial_{y^0} \left\{ e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(x)\phi(y)] \right\}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \int d^4y e^{-ip_2 \cdot y} (\partial_y^2 + m^2) \mathbb{T}[\phi(x)\phi(y)]$$

 **第二项**变成

$$-\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(x)\phi(y)]$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \phi(y)\phi(x)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \int d^3y e^{-ip_2 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \phi_{\text{out}}(y)\phi(x) = a_{\mathbf{p}_2, \text{out}}^\dagger \phi(x)$$

 第一步用到 $y^0 \rightarrow +\infty$ 时必有 $y^0 > x^0$ 的情况，第二步用到**渐近条件**

处理所有入态粒子

 从而给出

$$\phi(x)a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}} \int d^4y e^{-ip_2 \cdot y} (\partial_y^2 + m^2) T[\phi(x)\phi(y)] + a_{\mathbf{p}_2, \text{out}}^\dagger \phi(x)$$

 代入到 iT_{fi} 表达式中，**第二项贡献为零**，得

$$\begin{aligned} iT_{fi} &= \frac{i\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}{\sqrt{Z}} \int d^4x e^{-ip_1 \cdot x} (\partial_x^2 + m^2) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \phi(x)a_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger | \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\ &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^2 \int d^4x d^4y e^{-i(p_1 \cdot x + p_2 \cdot y)} \\ &\quad \times (\partial_x^2 + m^2)(\partial_y^2 + m^2) \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | T[\phi(x)\phi(y)] | \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

 按照上述做法依次处理入态中剩余的粒子，推出

$$iT_{fi} = \int \left[\prod_{i=1}^n d^4x_i \frac{i e^{-ip_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | T[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle$$

处理出态粒子

🎵 下面处理出态中的粒子，将动量为 \mathbf{q}_1 的出态粒子的湮灭算符抽出来，得

$$iT_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}} \int \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{i e^{-ip_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\ \times \langle \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle$$

✂ 由 2.3.1 小节结果推出

$$a_{\mathbf{p}, \text{out}} = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3 x e^{ip \cdot x} [\partial_{x^0} \phi_{\text{out}}(x) - ip^0 \phi_{\text{out}}(x)] = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d^3 x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_{\text{out}}(x)$$

🚢 故

$$a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \\ = \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}}} \int d^3 y e^{iq_1 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \phi_{\text{out}}(y) \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)]$$

渐近条件 \rightarrow $= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3 y e^{iq_1 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \phi(y) \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)]$

$$= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3 y e^{iq_1 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)]$$

减少一个出态粒子的表达式

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3 y e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{y}} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \\
&= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \int d^4 y \partial_{y^0} \left\{ e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{y}} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \right\} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d^3 y e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{y}} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \left\{ \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \phi(y) \right\} \\
\text{渐近条件} \Rightarrow &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \int d^4 y e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{y}} (\partial_y^2 + m^2) \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \\
&\quad + \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] a_{\mathbf{q}_1, \text{in}}
\end{aligned}$$

减少一个出态粒子的表达式

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \int d^3 y e^{iq_1 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \\
&= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \int d^4 y \partial_{y^0} \left\{ e^{iq_1 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \right\} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d^3 y e^{iq_1 \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \left\{ \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \phi(y) \right\} \\
\text{渐近条件} \Rightarrow &= \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \int d^4 y e^{iq_1 \cdot y} (\partial_y^2 + m^2) \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \\
&\quad + \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] a_{\mathbf{q}_1, \text{in}}
\end{aligned}$$

♪♪ 代入到 iT_{fi} 表达式中，第二项没有贡献，得

$$\begin{aligned}
iT_{fi} &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}} \int \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{i e^{-ip_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\
&\quad \times \langle \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | a_{\mathbf{q}_1, \text{out}} \mathbb{T}[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle \\
&= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y e^{iq_1 \cdot y} (\partial_y^2 + m^2) \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{i e^{-ip_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\
&\quad \times \langle \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbb{T}[\phi(y) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

🎵 依次处理出态中剩余的粒子，推出实标量场的 LSZ 约化公式

$$\begin{aligned}
 iT_{fi} &= \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 &= \int \left[\prod_{j=1}^m d^4 y_j \frac{i e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{y}_j} (\partial_{y_j}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{i e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\
 &\quad \times \langle 0 | T[\phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

👉 $n \rightarrow m$ 散射矩阵元由 $(n+m)$ 点关联函数 $G^{(n+m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ 决定

🚢 对于一个动量为 \mathbf{p}_i 的入态粒子，需要对 $(n+m)$ 点关联函数中一个实标量场算符 $\phi(x_i)$ 应用 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_{x_i}^2 + m^2)$ ，作 Fourier 变换 $\int d^4 x_i e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i}$ ，再乘上一个 i/\sqrt{Z} 因子

🚢 对于一个动量为 \mathbf{q}_j 的出态粒子，需要对 $(n+m)$ 点关联函数中一个实标量场算符 $\phi(y_j)$ 应用 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_{y_j}^2 + m^2)$ ，作 Fourier 变换 $\int d^4 y_j e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{y}_j}$ ，再乘上一个 i/\sqrt{Z} 因子

Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

🎵 依次处理出态中剩余的粒子，推出实标量场的 LSZ 约化公式

$$\begin{aligned}
 iT_{fi} &= \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
 &= \int \left[\prod_{j=1}^m d^4 y_j \frac{i e^{i \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{y}_j} (\partial_{y_j}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{i e^{-i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\
 &\quad \times \langle 0 | T[\phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

🚢 在 LSZ 约化公式中，入态粒子和出态粒子仅由 Fourier 变换因子指数上的正负号来区分

🚢 如果要把一个动量为 p^μ 的粒子从入态移动到出态，变换成动量为 k^μ 的反粒子，相应的 T 矩阵元只需要对原来的 T 矩阵元作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ 来得到

🚢 这就是 8.5 节讨论的交叉对称性： $\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \rightarrow \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \cdots)$

利用分部积分改写 LSZ 约化公式

 利用**分部积分**，可以将 LSZ 约化公式中的各个 **Klein-Gordon 微分算符** 作用到**平面波解** $e^{-ip_i \cdot x_i}$ 或 $e^{iq_j \cdot y_j}$ 上面；具体来说，推出

$$\begin{aligned} e^{-ip \cdot x} \partial^2 \phi(x) &= \partial^\mu [e^{-ip \cdot x} \partial_\mu \phi(x)] - (\partial^\mu e^{-ip \cdot x}) \partial_\mu \phi(x) \\ &= \partial^\mu [e^{-ip \cdot x} \partial_\mu \phi(x)] - \partial_\mu [(\partial^\mu e^{-ip \cdot x}) \phi(x)] + (\partial^2 e^{-ip \cdot x}) \phi(x) \\ &= \partial^\mu [e^{-ip \cdot x} \partial_\mu \phi(x) - (\partial^\mu e^{-ip \cdot x}) \phi(x)] - p^2 e^{-ip \cdot x} \phi(x) \end{aligned}$$

 其中第一项是对全时空积分**没有贡献的四维全散度**

 从而，在 LSZ 约化公式中可作**替换** $e^{-ip_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2) \rightarrow -e^{-ip_i \cdot x_i} (p_i^2 - m^2)$

 类似地，也可作**替换** $e^{iq_j \cdot y_j} (\partial_{y_j}^2 + m^2) \rightarrow -e^{iq_j \cdot y_j} (q_j^2 - m^2)$

 于是，可以将 **LSZ 约化公式** 改写为

$$\begin{aligned} iT_{fi} &= \int \left[\prod_{j=1}^m d^4 y_j \frac{-i e^{iq_j \cdot y_j} (q_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i \frac{-i e^{-ip_i \cdot x_i} (p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\ &\quad \times \langle 0 | T[\phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

动量空间中的 n 点关联函数

 对 n 点关联函数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 作 Fourier 变换, 得到动量空间 n 点关联函数

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \int \left(\prod_{i=1}^n d^4 x_i e^{i p_i \cdot x_i} \right) \langle 0 | T[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle$$

 由此将 LSZ 约化公式简化为

$$iT_{fi} = \left[\prod_{j=1}^m \frac{-i(q_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^n \frac{-i(p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \tilde{G}^{(n+m)}(q_1, \dots, q_m, -p_1, \dots, -p_n)$$

 可见, T 矩阵元与动量空间中的多点关联函数有着非常直接的联系

 入射粒子动量 p_i 和出射粒子动量 q_j 在后者里面具有相反的符号

 由于入射和出射粒子满足质壳条件, 所有 $(p_i^2 - m^2)$ 和 $(q_j^2 - m^2)$ 因子都等于零

 非平庸的 T_{fi} 意味着 $\tilde{G}^{(n+m)}(p_1, \dots, p_n, -q_1, \dots, -q_m)$ 必须在所有 $p_i^2 = m^2$ 和 $q_j^2 = m^2$ 处都存在单极点

 从而, T 矩阵元正比于动量空间多点关联函数的多重留数

动量空间多点关联函数的结构

 现在研究动量空间多点关联函数的极点结构

 利用完备性关系 $\sum_{\Psi} |\Psi\rangle \langle \Psi| = \mathbb{I}$ 在 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ 中插入完备集 $\{|\Psi\rangle\}$, 得

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{\Psi} \int \left(\prod_{i=1}^n d^4 x_i e^{i p_i \cdot x_i} \right) \\ &\quad \times \langle 0 | \phi(x_1) | \Psi \rangle \langle \Psi | T[\phi(x_2) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle \theta(x_1^0 - \tau) + \cdots \end{aligned}$$

 其中 $\tau = \max(x_2^0, \dots, x_n^0)$ 是 x_2^0, \dots, x_n^0 中的最大值

 这里只保留 x_1^0 为最大时刻的项, 其它项省略不写

动量空间多点关联函数的结构

 现在研究动量空间多点关联函数的极点结构

 利用完备性关系 $\sum_{\Psi} |\Psi\rangle \langle\Psi| = \mathbb{I}$ 在 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ 中插入完备集 $\{|\Psi\rangle\}$, 得

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{\Psi} \int \left(\prod_{i=1}^n d^4 x_i e^{i p_i \cdot x_i} \right) \times \langle 0 | \phi(x_1) | \Psi \rangle \langle \Psi | T[\phi(x_2) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle \theta(x_1^0 - \tau) + \cdots$$

 其中 $\tau = \max(x_2^0, \dots, x_n^0)$ 是 x_2^0, \dots, x_n^0 中的最大值

 这里只保留 x_1^0 为最大时刻的项, 其它项省略不写

 考虑单粒子态 $|\Psi\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 的贡献, 利用 $\langle 0 | \phi(x_1) | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi(x_1) | 0 \rangle^* = \sqrt{Z} e^{-i \mathbf{p} \cdot x_1}$

 并注意对单粒子态的求和方法, 则上式的保留项包含以下积分,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^3 p d^4 x_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{i p_1 \cdot x_1} \langle 0 | \phi(x_1) | \mathbf{p} \rangle \theta(x_1^0 - \tau) = \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p d^4 x_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{i(p_1 - \mathbf{p}) \cdot x_1} \theta(x_1^0 - \tau) \\ &= \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p d^3 x_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_1} \int_{\tau}^{\infty} dx_1^0 e^{i(p_1^0 - E_{\mathbf{p}})x_1^0} \quad \leftarrow p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \\ &= \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p}{2E_{\mathbf{p}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \int_{\tau}^{\infty} dx_1^0 e^{i(p_1^0 - E_{\mathbf{p}})x_1^0} \end{aligned}$$

引进指数衰减因子

 I_1 里面对 x_1^0 的积分具有 $\int_{\tau}^{\infty} dt e^{i\omega t}$ 的形式，但这样的积分并不收敛

 为得到收敛结果，在被积函数中引进指数衰减因子 $e^{-\epsilon t}$ ，其中无穷小量 $\epsilon > 0$ ，使

$$\int_{\tau}^{\infty} dt e^{i\omega t} \rightarrow \int_{\tau}^{\infty} dt e^{i\omega t - \epsilon t} = \left. \frac{e^{i(\omega+i\epsilon)t}}{i(\omega+i\epsilon)} \right|_{\tau}^{\infty} = -\frac{e^{i(\omega+i\epsilon)\tau}}{i(\omega+i\epsilon)} = \frac{i}{\omega+i\epsilon} e^{i\omega\tau}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\rightarrow \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p}{2E_{\mathbf{p}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \int_{\tau}^{\infty} dx_1^0 e^{i(p_1^0 - E_{\mathbf{p}})x_1^0 - \epsilon x_1^0} \\ &= \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p}{2E_{\mathbf{p}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \frac{i}{p_1^0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon} e^{i(p_1^0 - E_{\mathbf{p}})\tau} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^0 - E_{\mathbf{p}_1} + i\epsilon} e^{i(p_1^0 - E_{\mathbf{p}_1})\tau} \end{aligned}$$

引进指数衰减因子

 I_1 里面对 x_1^0 的积分具有 $\int_{\tau}^{\infty} dt e^{i\omega t}$ 的形式，但这样的积分并不收敛

 为得到收敛结果，在被积函数中引进**指数衰减因子** $e^{-\epsilon t}$ ，其中**无穷小量** $\epsilon > 0$ ，使

$$\int_{\tau}^{\infty} dt e^{i\omega t} \rightarrow \int_{\tau}^{\infty} dt e^{i\omega t - \epsilon t} = \left. \frac{e^{i(\omega+i\epsilon)t}}{i(\omega+i\epsilon)} \right|_{\tau}^{\infty} = -\frac{e^{i(\omega+i\epsilon)\tau}}{i(\omega+i\epsilon)} = \frac{i}{\omega+i\epsilon} e^{i\omega\tau}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\rightarrow \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p}{2E_p} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \int_{\tau}^{\infty} dx_1^0 e^{i(p_1^0 - E_p)x_1^0 - \epsilon x_1^0} \\ &= \sqrt{Z} \int \frac{d^3 p}{2E_p} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \frac{i}{p_1^0 - E_p + i\epsilon} e^{i(p_1^0 - E_p)\tau} = \frac{1}{2E_{p_1}} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^0 - E_{p_1} + i\epsilon} e^{i(p_1^0 - E_{p_1})\tau} \end{aligned}$$

 可见， I_1 包含因子

$$\begin{aligned} \frac{1}{2E_{p_1}} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^0 - E_{p_1} + i\epsilon} &= \frac{p_1^0 + E_{p_1}}{2E_{p_1}} \frac{i\sqrt{Z}}{(p_1^0 - E_{p_1})(p_1^0 + E_{p_1}) + i\epsilon(p_1^0 + E_{p_1})} \\ &= \frac{p_1^0 + E_{p_1}}{2E_{p_1}} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon(p_1^0 + E_{p_1})} \xrightarrow{p_1^0 \rightarrow E_{p_1}} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

 注意第二步分母中 $\epsilon(p_1^0 + E_{p_1}) > 0$ 作为无穷小量等价于 ϵ

LSZ 约化公式的另一种表述

 故 $p_1^0 \rightarrow E_{p_1}$ 处单粒子态对 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ 保留项贡献一个 $\frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}$ 因子

 应用到 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ 中其它时空坐标的积分, 得到一系列 $\frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon}$ 因子

 结合 $iT_{fi} = \left[\prod_{j=1}^m \frac{-i(q_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^n \frac{-i(p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \tilde{G}^{(n+m)}(q_1, \dots, q_m, -p_1, \dots, -p_n)$

 则动量空间中 $(n+m)$ 点关联函数在 $p_i^0 \rightarrow E_{p_i}, q_j^0 \rightarrow E_{q_j}$ 处的极点结构为

$$\tilde{G}^{(n+m)}(q_1, \dots, q_m, -p_1, \dots, -p_n)$$

$$\xrightarrow{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}} \left(\prod_{j=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{q_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) iT_{fi}$$

 这是 LSZ 约化公式的另一种表述方式

 可见, 每个粒子对应的极点结构跟动量空间 Feynman 传播子 $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ 形式类似, 但还出现了场重整化的贡献 \sqrt{Z}

Dirac 旋量场的 LSZ 约化公式

对于 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ ，考虑入态有一对正反费米子，出态也有一对正反费米子，则 LSZ 约化公式的形式为

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2'; \text{out} | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2; \text{in} \rangle \\
 &= \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 x_1 d^4 x_2 \\
 & \quad \times \frac{-i e^{i q_1 \cdot y_1}}{\sqrt{Z_2}} [\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') (i \not{\partial}_{y_1} - m)]_{b_1} \frac{-i e^{i q_2 \cdot y_2}}{\sqrt{Z_2}} [(i \not{\partial}_{y_2} + m) v(\mathbf{q}_2, \lambda_2')]_{b_2} \\
 & \quad \times \frac{i e^{-i p_1 \cdot x_1}}{\sqrt{Z_2}} [(i \not{\partial}_{x_1} + m) u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)]_{a_1} \frac{i e^{-i p_2 \cdot x_2}}{\sqrt{Z_2}} [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) (i \not{\partial}_{x_2} - m)]_{a_2} \\
 & \quad \times \langle 0 | \mathbf{T} [\psi_{b_1}(y_1) \bar{\psi}_{b_2}(y_2) \bar{\psi}_{a_1}(x_1) \psi_{a_2}(x_2)] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$