量 子 场 论

第 9 章　分立对称性和 Majorana 旋量场

9.3 节至 9.5 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 3 月 9 日

9.3 节 矢量场的分立变换

9.3.1 节 有质量矢量场的 C、P、T 变换

- 接下来讨论**自由有质量复矢量场** $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换
- **拉氏量**为 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A^\dagger_\mu A^\mu$
- 用**极化矢量** $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ $(\lambda=\pm,0)$ 表达的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]$$

9.3 节　矢量场的分立变换

9.3.1 节　有质量矢量场的 C、P、T 变换

- 接下来讨论**自由有质量复矢量场** $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换
- **拉氏量**为 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A^\dagger_\mu A^\mu$
- 用**极化矢量** $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ $(\lambda = \pm, 0)$ 表达的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]$$

- **宇称变换**联系着 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)$，根据极化矢量的具体形式，有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},+) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\ p^1p^3 + ip^2|\mathbf{p}|\\ p^2p^3 - ip^1|\mathbf{p}|\\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\end{pmatrix} = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},-) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},-)$$

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-) = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},+)$$

宇称变换与极化矢量

此外还有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},0)=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\-p^0p^1\\-p^0p^2\\-p^0p^3\end{pmatrix}=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\p^0p^1\\p^0p^2\\p^0p^3\end{pmatrix}=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},0)$$

因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$(-)^\lambda\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)$$

宇称变换与极化矢量

此外还有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},0)=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\ -p^0p^1\\ -p^0p^2\\ -p^0p^3\end{pmatrix}=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\ p^0p^1\\ p^0p^2\\ p^0p^3\end{pmatrix}=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},0)$$

因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$(-)^\lambda\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)$$

时间反演变换联系着 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)$，有

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},+)=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\ p^1p^3-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\ p^2p^3+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\end{pmatrix}=\mathcal{T}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},+)$$

时间反演变换与极化矢量

还有

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},-) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix} 0 \\ p^1p^3+ip^2|\mathbf{p}| \\ p^2p^3-ip^1|\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},-)$$

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0p^1 \\ -p^0p^2 \\ -p^0p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0p^1 \\ p^0p^2 \\ p^0p^3 \end{pmatrix} = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},0)$$

以此推出时间反演变换与极化矢量的关系

$$(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda) = \mathcal{T}^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)$$

产生湮灭算符的分立变换

- 类似于标量场和旋量场的 C、P、T 变换规律，$C^{-1}A^\mu(x)C$、$P^{-1}A^\mu(x)P$ 和 $T^{-1}A^\mu(x)T$ 应当分别正比于 $A^{\mu\dagger}(x)$、$\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$ 和 $\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$
- 为此，将产生湮灭算符的 C、P、T 变换表达成

$$
\begin{aligned}
C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C &= \xi_C b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, & C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C &= \xi_C^* b_{\mathbf{p},\lambda}\\
C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C &= \xi_C^* a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, & C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C &= \xi_C a_{\mathbf{p},\lambda}\\
P^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P &= \xi_P(-)^\lambda a^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}, & P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P &= \xi_P^*(-)^\lambda a_{-\mathbf{p},-\lambda}\\
P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P &= \xi_P^*(-)^\lambda b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}, & P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}P &= \xi_P(-)^\lambda b_{-\mathbf{p},-\lambda}\\
T^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T &= \xi_T(-)^{1+\lambda} a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, & T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T &= \xi_T^*(-)^{1+\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}\\
T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T &= \xi_T^*(-)^{1+\lambda} b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, & T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T &= \xi_T(-)^{1+\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}
\end{aligned}
$$

- 其中 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 是相位因子

平面波展开式的分立变换

- 从而推出**平面波展开式**的分立变换

$$
\begin{aligned}
&C^{-1}A^\mu(x)C\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}Ce^{-ip\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}Ce^{ip\cdot x}]\\
&=\xi_C^*\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}]\\
&P^{-1}A^\mu(x)P\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}Pe^{-ip\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}Pe^{ip\cdot x}]\\
&=\xi_P^*\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^\lambda\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},-\lambda}e^{-ip\cdot x}+(-)^\lambda\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}e^{ip\cdot x}]\\
&=\xi_P^*\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^\lambda\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot(\mathcal{P}x)}+(-)^\lambda\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},-\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot(\mathcal{P}x)}]\\
&=\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot(\mathcal{P}x)}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot(\mathcal{P}x)}]
\end{aligned}
$$

$A^\mu(x)$ 的分立变换

以及

$$T^{-1}A^\mu(x)T$$
$$=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda T^{-1}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}]T$$
$$=\xi_T^*\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda[(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}+(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}]$$
$$=\xi_T^*\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda[(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot(\mathcal{T}x)}+(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot(\mathcal{T}x)}]$$
$$=\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\nu\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda[\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot(\mathcal{T}x)}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot(\mathcal{T}x)}]$$

因此，**有质量复矢量场** $A^\mu(x)$ 的**分立变换**为

$$\boxed{\begin{aligned}
C^{-1}A^\mu(x)C&=\xi_C^*A^{\mu\dagger}(x), & C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C&=\xi_C A^\mu(x)\\
P^{-1}A^\mu(x)P&=\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), & P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P&=\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)\\
T^{-1}A^\mu(x)T&=\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), & T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T&=\xi_T\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}}$$

场强张量的分立变换

- 利用 $\partial_x^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{P}x}^\nu$ 和 $\partial_x^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{T}x}^\nu$
- **场强张量** $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 的 C、P、T 变换为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C &= \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x) - \partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)] = \xi_C^* F^{\mu\nu\dagger}(x) \\
P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P &= \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma [\partial_{\mathcal{P}x}^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x) - \partial_{\mathcal{P}x}^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)] = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\
T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T &= \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma [\partial_{\mathcal{T}x}^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial_{\mathcal{T}x}^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

场强张量的分立变换

- 利用 $\partial_x^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{P}x}^\nu$ 和 $\partial_x^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{T}x}^\nu$
- 场强张量 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 的 C、P、T 变换为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C &= \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x) - \partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)] = \xi_C^* F^{\mu\nu\dagger}(x) \\
P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P &= \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma [\partial_{\mathcal{P}x}^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x) - \partial_{\mathcal{P}x}^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)] = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\
T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T &= \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma [\partial_{\mathcal{T}x}^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial_{\mathcal{T}x}^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

- 动能项算符 $F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)C &= |\xi_C|^2 F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu\dagger}(x) = +F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x) \\
P^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)P &= |\xi_P|^2 F_{\alpha\beta}^\dagger(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\nu \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\
&= +F_{\mu\nu}^\dagger(\mathcal{P}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) \\
T^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)T &= |\xi_T|^2 F_{\alpha\beta}^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\mu (\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\nu \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) \\
&= +F_{\mu\nu}^\dagger(\mathcal{T}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

对偶场强张量的分立变换

- 由 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\alpha}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\beta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma} &= -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\delta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\tau}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\phi}\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi}(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma}\\ &= -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\delta}\delta^{\alpha}{}_{\tau}\delta^{\beta}{}_{\phi}\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}\end{aligned}$$

- 同理有 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{T}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{T}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma} = -\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$

对偶场强张量的分立变换

- 由 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\alpha}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\beta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma} &= -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\delta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\tau}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\phi}\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi}(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma}\\ &= -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\delta}\delta^{\alpha}{}_{\tau}\delta^{\beta}{}_{\phi}\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}\end{aligned}$$

- 同理有 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{T}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{T}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma} = -\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$

- 从而，**对偶场强张量** $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2$ 的 C、P、T 变换是

$$\begin{aligned}C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)C &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}C^{-1}F_{\rho\sigma}(x)C = \xi_C^*\tilde{F}^{\mu\nu\dagger}(x)\\ P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)P &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P^{-1}F_{\rho\sigma}(x)P = \frac{1}{2}\,\xi_P^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma}\\ &= -\frac{1}{2}\,\xi_P^*\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) = -\xi_P^*\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)\\ T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T^{-1}F_{\rho\sigma}(x)T = \frac{1}{2}\,\xi_T^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{T}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma}\\ &= -\frac{1}{2}\,\xi_T^*\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x) = -\xi_T^*\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)\end{aligned}$$

- 可见，$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换性质与 $F^{\mu\nu}$ 不同，相差一个**负号**

有质量实矢量场的分立变换

质量项算符 $A_\mu^\dagger A^\mu$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)C = |\xi_C|^2 A_\mu(x)A^{\mu\dagger}(x) = +A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)P = |\xi_P|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{P}x)A^\mu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)T = |\xi_T|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{T}x)A^\mu(\mathcal{T}x)$$

因此，由**动能项**和**质量项**组成的自由有质量复矢量场**拉氏量**在 C、P、T 变换下都是**不变**的

有质量实矢量场的分立变换

- **质量项算符** $A_\mu^\dagger A^\mu$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)C = |\xi_C|^2 A_\mu(x)A^{\mu\dagger}(x) = +A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)$$
$$P^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)P = |\xi_P|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{P}x)A^\mu(\mathcal{P}x)$$
$$T^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)T = |\xi_T|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{T}x)A^\mu(\mathcal{T}x)$$

- 因此，由**动能项**和**质量项**组成的自由有质量复矢量场**拉氏量**在 C、P、T 变换下都是**不变**的

- 对于**自由有质量实矢量场**，$A^{\mu\dagger}(x) = A^\mu(x)$，故 $\xi_C = \xi_C^*$、$\xi_P = \xi_P^*$、$\xi_T = \xi_T^*$，

$$\boxed{\xi_C = \pm 1, \quad \xi_P = \pm 1, \quad \xi_T = \pm 1}$$

- 当 $\xi_P = +1$ 时，$A^\mu(x)$ 是**极矢量场**，满足 $P^{-1}A^\mu(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$
- 当 $\xi_P = -1$ 时，$A^\mu(x)$ 是**轴矢量场**，满足 $P^{-1}A^\mu(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$
- 无论 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 取 ±1 中的哪些值，自由有质量实矢量场的**拉氏量**在 C、P、T 变换下也都是**不变**的

9.3.2 节 电磁场的 C、P、T 变换

相比于有质量矢量场，**无质量**矢量场的物理极化矢量只有 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$ 两个，但 C、P、T 变换性质是类似的

自由无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换为（习题 9.5）

$$
\begin{aligned}
C^{-1}A^\mu(x)C &= \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), & C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C &= \xi_C A^\mu(x)\\
P^{-1}A^\mu(x)P &= \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), & P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P &= \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)\\
T^{-1}A^\mu(x)T &= \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), & T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T &= \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

对于**自由无质量实矢量场**，ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值只能是 ± 1

9.3.2 节 电磁场的 C、P、T 变换

相比于有质量矢量场，**无质量**矢量场的物理极化矢量只有 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$ 两个，但 C、P、T 变换性质是类似的

自由无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换为（习题 9.5）

$$
\begin{aligned}
C^{-1}A^\mu(x)C &= \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), & C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C &= \xi_C A^\mu(x)\\
P^{-1}A^\mu(x)P &= \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), & P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P &= \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)\\
T^{-1}A^\mu(x)T &= \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), & T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T &= \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

对于**自由无质量实矢量场**，ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值只能是 ± 1

电磁场是一种无质量实矢量场，可通过 **QED 相互作用**确定 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值

在**相互作用绘景**中，参与相互作用的量子场与自由场具有形式**相同**的平面波展开式，因此前面推导出来的量子场 C、P、T 变换性质照样**成立**

于是，理论的 C、P、T 对称性由拉氏量中**相互作用项**的 C、P、T 变换性质决定

电磁场的分立变换

- 在 **QED 理论**中，**相互作用项**的算符形式为 $A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
- 根据 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ **算符**的 C 变换 $C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

  P 变换 $P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x)$

  T 变换 $T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{T}x)$
- **电磁场** $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换必须是

$$
\begin{aligned}
C^{-1}A^\mu(x)C &= -A^\mu(x) \\
P^{-1}A^\mu(x)P &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) \\
T^{-1}A^\mu(x)T &= -\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

- 才能使 QED 相互作用项分别在 C、P、T 变换下**不变**

电磁场的分立变换

在 **QED 理论**中，**相互作用项**的算符形式为 $A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

根据 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ **算符**的 C 变换 $C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

P 变换 $P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x)$

T 变换 $T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{T}x)$

电磁场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换必须是

$$
\begin{aligned}
C^{-1}A^\mu(x)C &= -A^\mu(x)\\
P^{-1}A^\mu(x)P &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)\\
T^{-1}A^\mu(x)T &= -\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

才能使 QED 相互作用项分别在 C、P、T 变换下**不变**

也就是说，必须取 $\boxed{\xi_C = -1,\quad \xi_P = +1,\quad \xi_T = -1}$

这样的取法是做得到的，因此说 QED 理论同时具有 C、P、T 对称性，即具有**电荷共轭对称性**、**空间反射对称性**和**时间反演对称性**

从而，电磁场是 C **宇称为奇**的**极**矢量场

电磁场强张量的分立变换

- 电磁场的**场强张量** $F^{\mu\nu}$ 和**对偶场强张量** $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换是

$$
\begin{aligned}
C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C &= -F^{\mu\nu}(x) \\
P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P &= \mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\
T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T &= -\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) \\
C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)C &= -\tilde{F}^{\mu\nu}(x) \\
P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)P &= -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\
T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T &= \mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

- $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 C **宇称**均为**奇**
- $F^{\mu\nu}$ 与 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换都相差一个**负号**
- 就 P **变换**性质而言，$F^{\mu\nu}$ 是**狭义的张量**，而 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 是**赝张量**

$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的分立变换

- 于是，算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C &= +F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\\
P^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P &= +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)\\
T^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T &= +F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)\\
C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C &= +\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\\
P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P &= -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)\\
T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T &= -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)
\end{aligned}
$$

- $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C 宇称和宇称均为偶
- $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C 宇称为偶，宇称为奇

9.4 节 CP 变换

- C 变换和 P 变换相继作用，就形成 CP 变换
- CP 变换既反转动量的方向，又将正反粒子互换，但保持角动量不变
- 在弱相互作用中，左手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}$ 参与不同的规范相互作用，导致电荷共轭对称性和空间反射对称性都遭到极大的破坏
- 但弱相互作用的 CP 对称性却近似成立，只受到微小的破坏
- 另一方面，实验上还没有迹象表明电磁和强相互作用的 CP 对称性受到破坏

复标量场的 CP 变换

根据前面推出的 C、P 变换性质，**复标量场 $\phi(x)$** 产生湮灭算符的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}a_{\mathbf{p}}^\dagger CP = \eta_C P^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger P = \eta_C\eta_P^* b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad (CP)^{-1}a_{\mathbf{p}}CP = \eta_C^* P^{-1}b_{\mathbf{p}}P = \eta_C^*\eta_P b_{-\mathbf{p}}$$

$$(CP)^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger CP = \eta_C^* P^{-1}a_{\mathbf{p}}^\dagger P = \eta_C^*\eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad (CP)^{-1}b_{\mathbf{p}}CP = \eta_C P^{-1}a_{\mathbf{p}}P = \eta_C\eta_P^* a_{-\mathbf{p}}$$

$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}\phi(x)CP = \eta_C^*\eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}\phi^\dagger(x)CP = \eta_C\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x)$$

算符 $\phi^\dagger\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 的 CP 变换是

$$\begin{aligned}(CP)^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)CP &= +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)\\ (CP)^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial_x^\mu}\phi(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\overleftrightarrow{\partial_{\mathcal{P}x}^\nu}\phi(\mathcal{P}x)\end{aligned}$$

可见，$\phi^\dagger\phi$ 的 ***CP* 宇称为偶**

Dirac 旋量场的 CP 变换

对于 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$，各种旋量双线性型的 CP 变换是

$$
\begin{aligned}
(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)CP &= +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)CP &= -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x),\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}_\mathrm{R}(x)\psi_\mathrm{L}(x)CP &= \bar{\psi}_\mathrm{L}(\mathcal{P}x)\psi_\mathrm{R}(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}_\mathrm{L}(x)\psi_\mathrm{R}(x)CP &= \bar{\psi}_\mathrm{R}(\mathcal{P}x)\psi_\mathrm{L}(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}_\mathrm{L}(x)\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_\mathrm{L}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi_\mathrm{L}(\mathcal{P}x)\\
(CP)^{-1}\bar{\psi}_\mathrm{R}(x)\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_\mathrm{R}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi_\mathrm{R}(\mathcal{P}x)
\end{aligned}
$$

- $\bar{\psi}\psi$ 的 ***CP* 宇称为偶**，$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 的 ***CP* 宇称为奇**
- $\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$ 与 $\bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$ 在 CP 变换下相互转化
- **左手流算符** $\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$ 和**右手流算符** $\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$ 在 CP 变换后分别回到自身

有质量复矢量场的 CP 变换

有质量复矢量场 $A^\mu(x)$及其厄米共轭 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}A^{\mu\dagger}(x)CP = \xi_C\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

$F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$\begin{aligned}(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP &= \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),\\ (CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP &= -\xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)\end{aligned}$$

有质量复矢量场的 CP 变换

有质量复矢量场 $A^\mu(x)$及其厄米共轭 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}A^{\mu\dagger}(x)CP = \xi_C\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

$F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$\begin{aligned}(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP &= \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),\\ (CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP &= -\xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)\end{aligned}$$

另一方面，自共轭场的 ***CP* 宇称**是其 C 宇称与宇称之积

- 实标量场 $\phi(x)$ 的 CP 宇称是 $\eta_C\eta_P$，取值为 ±1
- Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 CP 宇称是 $\zeta_C\zeta_P$，取值为 $\pm\mathrm{i}$
- 有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C\xi_P$，取值为 ±1

电磁场的 CP 变换

电磁场 $A^\mu(x)$ 的 CP **宇称**是 $\xi_C\xi_P = -1$，CP 变换为

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换是

$$\begin{aligned}(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP &= -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)\\(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP &= \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)\end{aligned}$$

算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$\begin{aligned}(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)CP &= +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)\\(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)CP &= -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)\end{aligned}$$

可见，$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 $\boldsymbol{CP}$ **宇称为偶**，$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 $\boldsymbol{CP}$ **宇称为奇**

9.5 节 C、P、T 对称性

- 前文讨论的所有**自由**量子场理论都同时具有 **C、P、T 对称性**
- 一个相互作用理论是否具有 C、P、T 对称性，则取决于拉氏量中的**相互作用项**是否在 C、P、T 变换下不变
- 由于 C、P、T 相位因子的**任意性**，我们可以对它们取合适的值，使理论具有**尽可能多**的分立对称性

9.5 节　C、P、T 对称性

- 前文讨论的所有**自由**量子场理论都同时具有 **C、P、T 对称性**
- 一个相互作用理论是否具有 C、P、T 对称性，则取决于拉氏量中的**相互作用项**是否在 C、P、T 变换下不变
- 由于 C、P、T 相位因子的**任意性**，我们可以对它们取合适的值，使理论具有**尽可能多**的分立对称性
- 在一些由量子场构成的**算符**的分立变换中，相位因子被**抵消**掉了，使得这些算符具有**明确**的 C、P、T 变换性质，这些性质在分析分立对称性的过程中起着重要作用
- 为便于应用，接下来用**表格**总结一些算符的 C、P、T 变换性质
- 将要用到的 $[-]^\mu$ 符号定义为 $[-]^\mu = \begin{cases} +1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$
- 从而，可以将 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu$ 和 $\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu$ 分别改写为 $[-]^\mu A^\mu$ 和 $-[-]^\mu A^\mu$，注意在后两个表达式中**没有采用 Einstein 求和约定**

标量场和矢量场相关算符的 C、P、T 变换性质

🌵 由**复标量场** $\phi(x)$ 和**电磁场** $A^\mu(x)$ 构成的一些算符的 C、P、T 变换性质如下

算符	C	P	T	CP	CPT
i	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
∂^μ	$+$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-$
$(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\phi^\dagger\phi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
A^μ	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$F^{\mu\nu}$	$-$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$\tilde{F}^{\mu\nu}$	$-$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

旋量场相关算符的 C、P、T 变换性质

由 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 构成的一些算符的 C、P、T 变换性质如下

算符	C	P	T	CP	CPT
$\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{\psi}\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$+$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$-$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$	$+$	$\bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$	$+$	$\bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$	$\bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$
$\bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$	$+$	$\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$	$+$	$\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$	$\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$
$\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$-\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$[-]^\mu\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$-\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$[-]^\mu\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$

Yukawa 理论的 C、P、T 对称性

- 在相互作用项为 $\mathcal{L}_\mathrm{Y} = -\kappa\,\phi\bar{\psi}\psi$ 的 **Yukawa 理论**中
- 实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\psi$
- 那么，**C、P、T 对称性**要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$
- 则 $\phi(x)$ 是狭义的**标量场**，**C 宇称**和**宇称**均为**偶**

算符	C	P	T	CP	CPT
$\bar{\psi}\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Yukawa 理论的 C、P、T 对称性

- 在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa\,\phi\bar{\psi}\psi$ 的 **Yukawa 理论**中
- 实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\psi$
- 那么，**C、P、T 对称性**要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$
- 则 $\phi(x)$ 是狭义的**标量场**，**C 宇称**和**宇称**均为**偶**

算符	C	P	T	CP	CPT
$\bar{\psi}\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

- 在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa\,\phi\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 的**另一种 Yukawa 理论**中
- 实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$
- 那么，**C、P、T 对称性**要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = +1$ 和 $\eta_P = \eta_T = -1$
- 则 $\phi(x)$ 是**赝标量场**，**C 宇称为偶**，**宇称为奇**

CPT 变换

将 C、P、T 变换相继作用，就得到 **CPT 变换**，相应的变换算符记作

$$\boxed{\Theta \equiv CPT}$$

由 $\Theta^\dagger\Theta = T^\dagger P^\dagger C^\dagger CPT = \mathbb{I}$ 得

$$\Theta^{-1} = \Theta^\dagger = T^\dagger P^\dagger C^\dagger = T^{-1}P^{-1}C^{-1}$$

而且

$$\Theta^{-1}\mathrm{i}\Theta = T^{-1}P^{-1}C^{-1}\mathrm{i}CPT = T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}$$

可见，Θ 跟 T 一样是**反线性反幺正算符**

CPT 定理

从前面的**表格**可以看到，像 $\mathrm{i}\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$、$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$、$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$、$A^\mu$ 这样具有 **1 个未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**，在 CPT 变换下得到一个负号，即 ***CPT* 相位因子**为**奇**

另一方面，像 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$、$\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$、$\bar{\psi}\psi$、$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$、$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$、$F^{\mu\nu}$、$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 这样具有 **0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**，在 CPT 变换下得到一个正号，即 ***CPT* 相位因子**为**偶**

CPT 定理

🌷 从前面的**表格**可以看到，像 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$、$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$、$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$、$A^\mu$ 这样具有 **1 个未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**，在 CPT 变换下得到一个负号，即 ***CPT* 相位因子**为**奇**

🤾 另一方面，像 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$、$\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$、$\bar{\psi}\psi$、$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$、$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$、$F^{\mu\nu}$、$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 这样具有 **0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**，在 CPT 变换下得到一个正号，即 ***CPT* 相位因子**为**偶**

🤹 这种情况是**普遍**的，可以对量子场**选取适当的 *C*、*P*、*T* 相位因子**，使得由各种量子场和时空导数构成的**厄米**算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的**奇偶性相同**

🤾 即具有**奇**（**偶**）数个未缩并 Lorentz 指标的**厄米**算符的 CPT 相位因子为**奇**（**偶**）

CPT 定理

- 从前面的**表格**可以看到，像 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$、$\bar\psi\gamma^\mu\psi$、$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$、$A^\mu$ 这样具有 **1 个未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**，在 CPT 变换下得到一个负号，即 **CPT 相位因子**为**奇**

- 另一方面，像 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$、$\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$、$\bar\psi\psi$、$\bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi$、$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$、$F^{\mu\nu}$、$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 这样具有 **0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**，在 CPT 变换下得到一个正号，即 **CPT 相位因子**为**偶**

- 这种情况是**普遍**的，可以对量子场**选取适当的 C、P、T 相位因子**，使得由各种量子场和时空导数构成的**厄米**算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的**奇偶性相同**

- 即具有**奇**（**偶**）数个未缩并 Lorentz 指标的**厄米**算符的 CPT 相位因子为**奇**（**偶**）

- 在**相对论性**的**局域量子场论**里，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是一个**厄米**的 Lorentz 标量，必须由**不携带未缩并 Lorentz 指标**的**厄米算符**构成，因此 $\mathcal{L}(x)$ 的 CPT 相位因子为**偶**，即 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下**不变**，这就是 **CPT 定理**

CPT 定理的准确表述

CPT 定理的准确表述如下

CPT 定理

如果一个局域量子场论由一个在固有保时向 Lorentz 变换下不变的厄米拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 描述，而且场的量子化遵循自旋—统计定理，那么 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变，满足

$$\Theta^{-1}\mathcal{L}(x)\Theta = +\mathcal{L}(-x)$$

拉氏量的 CPT 不变性意味着作用量、场的运动方程和哈密顿量 H 都在 CPT 变换下不变，有

$$\Theta^{-1}H(t)\Theta = +H(-t)$$

因而理论具有 CPT 对称性

时间演化算符的 CPT 变换

- 在**相互作用绘景**中，CPT 对称性意味着**相互作用哈密顿量 H_1** 满足

$$\Theta^{-1}H_1(t)\Theta = +H_1(-t)$$

- 注意到 Θ 算符是**反线性**的，**时间演化算符 $U(t,t_0)$** 的 CPT 变换为

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}U(t,t_0)\Theta &= \Theta^{-1}\,\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,H_1(t)\right]\Theta = \mathsf{T}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,\Theta^{-1}H_1(t)\Theta\right]\\ &= \mathsf{T}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,H_1(-t)\right] = \mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-t_0}^{-t}\mathrm{d}t\,H_1(t)\right] = U(-t,-t_0)\end{aligned}$$

- 倒数第二步作了**变量替换 $t\to -t$**

- 从而 **S 算符**的 CPT 变换是

$$\Theta^{-1}S\Theta = \Theta^{-1}U(+\infty,-\infty)\Theta = U(-\infty,+\infty) = U^\dagger(+\infty,-\infty) = S^\dagger$$

CPT 对称性的推论

CPT **定理**的证明可追溯到 1954 年 **Gerhart Lüders** 和 **Wolfgang Pauli** 的工作

由于 CPT 定理成立的**条件**在量子场论中**普遍得到满足**，因而 CPT **对称性**被认为是一个广泛存在的对称性

它具有以下推论

> CPT 对称性保证**正粒子**和**反粒子**的**质量和寿命完全相同**，电荷等**守恒荷的大小相等，符号相反**

这些结论在**电荷共轭对称性遭到破坏**时**仍然成立**，因而**并不平庸**

Gerhart Lüders
(1920–1995)

Wolfgang Ernst Pauli
(1900–1958)

CPT 对称性与粒子质量

- 现在**证明** CPT 对称性保证正反粒子的**质量**相同
- 一个**静止**的 $\mathcal{A}$ **粒子**对应的态矢是哈密顿量 H（可包含相互作用项）、自旋角动量平方 $\mathbf{S}^2$ 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的**共同本征态**
- 相应本征值为 $\mathcal{A}$ 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$、$s(s+1)$ 和 σ
- 由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s，下面的讨论**与 s 无关**

CPT 对称性与粒子质量

- 现在**证明** CPT 对称性保证正反粒子的**质量**相同
- 一个**静止**的 $\mathcal{A}$ **粒子**对应的态矢是哈密顿量 H（可包含相互作用项）、自旋角动量平方 $\mathbf{S}^2$ 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的**共同本征态**
- 相应本征值为 $\mathcal{A}$ 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$、$s(s+1)$ 和 σ
- 由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s，下面的讨论**与 s 无关**
- 将这个态矢记作 $|\mathcal{A},\sigma\rangle$，满足 $\langle\mathcal{A},\sigma|\mathcal{A},\sigma\rangle = 1$ 和

$$H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = m_{\mathcal{A}}\,|\mathcal{A},\sigma\rangle$$

- CPT **对称性**意味着 $\Theta^{-1}H(t)\Theta = +H(-t)$，利用它将 $\mathcal{A}$ 粒子质量表达为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = \langle\mathcal{A},\sigma|\,\Theta^{-1}H\Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle$$

CPT 对称性推论：正反粒子质量相同

- 作为 C、P 和 T 的联合变换，CPT 变换将**正反粒子互换**，**反转角动量的方向**，同时保持动量不变
- ***CPT* 变换**将 S^3 本征值为 σ 的 $\mathcal{A}$ 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的**反粒子** $\bar{\mathcal{A}}$
- 相应的量子态是 $|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta \equiv \Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = \chi_\mathcal{A}\,|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle$，其中 $\chi_\mathcal{A}$ 是**相位因子**

CPT 对称性推论：正反粒子质量相同

作为 C、P 和 T 的联合变换，CPT 变换将**正反粒子互换**，**反转角动量的方向**，同时保持动量不变

CPT 变换将 S^3 本征值为 σ 的 $\mathcal{A}$ 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的**反粒子** $\bar{\mathcal{A}}$

相应的量子态是 $|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta \equiv \Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = \chi_\mathcal{A}\,|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle$，其中 $\chi_\mathcal{A}$ 是**相位因子**

反幺正的 Θ 算符满足 $\langle\Psi_1|\Theta^\dagger\Psi_2\rangle = \langle\Theta\Psi_1|\Psi_2\rangle^*$，因而

$$
\begin{aligned}
m_\mathcal{A} &= \langle\mathcal{A},\sigma|\,\Theta^{-1}H\Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = \langle\mathcal{A},\sigma|\,\Theta^\dagger H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta \\
&= {}_\Theta\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta^* = {}_\Theta\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta
\end{aligned}
$$

$|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle$ 是**静止**的 $\bar{\mathcal{A}}$ **粒子**的哈密顿量本征态，本征值为 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子质量 $m_{\bar{\mathcal{A}}}$，故

$$
m_{\bar{\mathcal{A}}} = \langle\bar{\mathcal{A}},-\sigma|\,H\,|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle = |\chi_\mathcal{A}|^2\,{}_\Theta\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta = {}_\Theta\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta = m_\mathcal{A}
$$

这样就证明了**反粒子** $\bar{\mathcal{A}}$ 与**正粒子** $\mathcal{A}$ 的**质量相同**

微扰论最低阶衰变宽度

- 接下来在**微扰论最低阶**论证 CPT 对称性保证正反粒子的**寿命**相同
- 考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分
- 其中**主要成分** H_s 描述较强的相互作用，如强相互作用
- 而**微扰成分** H_w 描述引起**衰变**的**较弱**相互作用，如电磁或弱相互作用
- 这样的设定适用于发生**电磁衰变**或**弱衰变**的**强子**
- ***CPT* 对称性**意味着 $\Theta^{-1}H_\mathrm{s}(t)\Theta = H_\mathrm{s}(-t)$ 和 $\Theta^{-1}H_\mathrm{w}(t)\Theta = H_\mathrm{w}(-t)$

微扰论最低阶衰变宽度

- 接下来在**微扰论最低阶**论证 CPT 对称性保证正反粒子的**寿命**相同
- 考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分
- 其中**主要成分** H_s 描述较强的相互作用，如强相互作用
- 而**微扰成分** H_w 描述引起**衰变**的**较弱**相互作用，如电磁或弱相互作用
- 这样的设定适用于发生**电磁衰变**或**弱衰变**的**强子**
- ***CPT* 对称性**意味着 $\Theta^{-1}H_\mathrm{s}(t)\Theta = H_\mathrm{s}(-t)$ 和 $\Theta^{-1}H_\mathrm{w}(t)\Theta = H_\mathrm{w}(-t)$
- 考虑在 $t=0$ 时刻静止的 $\mathcal{A}$ **粒子**发生衰变过程 $\mathcal{A}\to f$
- f 代表**所有可能的衰变末态**，描述 $\mathcal{A}$ 粒子的态矢 $|\mathcal{A},\sigma\rangle$ 是 H_s **的本征态**
- 在 H_w **的最低阶**，根据 **Fermi 黄金定则**，$\mathcal{A}$ **粒子**的**衰变宽度**表达为

$$\Gamma_\mathcal{A} = 2\pi\sum_f \delta(E_\mathcal{A}-E_f)\,|\langle f|\,U(+\infty,0)H_\mathrm{w}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle|^2$$

- 其中 $E_\mathcal{A}=m_\mathcal{A}$，$E_f$ 是末态 f 中所有粒子的能量之和
- 时间演化算符 $U(+\infty,0)$ **只用 H_s 定义**，描述向遥远未来的演化

反粒子衰变宽度

- 相应地，**反粒子** $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变过程是 $\bar{\mathcal{A}} \to \bar{f}$
- 末态 $\bar{f}$ 中的粒子都是 f 中的**反粒子**，态矢 $|\bar{\mathcal{A}}, \sigma\rangle$ 也是 H_s **的本征态**
- $\bar{\mathcal{A}}$ **粒子**的**衰变宽度**为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_\mathrm{w}(0) | \bar{\mathcal{A}}, \sigma\rangle \right|^2$$

- 注意 $\mathcal{A}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值

反粒子衰变宽度

- 相应地，**反粒子** $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变过程是 $\bar{\mathcal{A}} \to \bar{f}$
- 末态 $\bar{f}$ 中的粒子都是 f 中的**反粒子**，态矢 $|\bar{\mathcal{A}}, \sigma\rangle$ 也是 H_{s} **的本征态**
- $\bar{\mathcal{A}}$ **粒子**的**衰变宽度**为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) | \bar{\mathcal{A}}, \sigma\rangle \right|^2$$

- 注意 $\mathcal{A}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值
- 对 $|f\rangle$ 作 ***CPT* 变换**，得 $|f\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |f\rangle = \chi_f |\bar{f}\rangle$，其中 χ_f 是相位因子
- 利用 ***CPT* 对称性**，由 $\Theta^{-1} U(t, t_0) \Theta = U(-t, -t_0)$ 推出

$$\begin{aligned}
\langle f | U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) | \mathcal{A}, \sigma\rangle &= \langle f | \Theta^{-1} U(-\infty, 0) \Theta \Theta^{-1} H_{\mathrm{w}}(0) \Theta | \mathcal{A}, \sigma\rangle \\
&= {}_{\Theta}\langle f | U(-\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) | \mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta}^{*} \\
\left| \langle f | U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) | \mathcal{A}, \sigma\rangle \right|^2 &= \left| {}_{\Theta}\langle f | U(-\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) | \mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta}^{*} \right|^2 \\
&= \left| \langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle \right|^2
\end{aligned}$$

CPT 对称性与衰变宽度

再利用 $U(-\infty,0) = U(-\infty,+\infty)U(+\infty,0) = S^\dagger U(+\infty,0)$，有

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) \left|\langle f| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\mathcal{A},\sigma\rangle\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) \left|\langle \bar{f}| U(-\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left|\langle \bar{f}| S^\dagger U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left|\sum_{\bar{f}'} \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}'| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f},\bar{f}',\bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}'| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle \\
&\qquad \times \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}''\rangle^* \langle \bar{f}''| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}},-\sigma\rangle^*
\end{aligned}
$$

倒数第二步插入了一组**完备集** $\sum_{\bar{f}'} |\bar{f}'\rangle\langle\bar{f}'| = \mathbb{I}$

CPT 对称性推论：正反粒子寿命相同

注意到 S 矩阵元只在初末态能量相等时非零，且 $SS^\dagger = \mathbb{I}$，对 $\bar{f}$ 求和的部分化为

$$\sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}''\rangle^* = \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left(\langle \bar{f}'| S |\bar{f}\rangle \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}''\rangle\right)^*$$

$$= \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \langle \bar{f}'| SS^\dagger |\bar{f}''\rangle^* = \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'})\delta_{\bar{f}'\bar{f}''}$$

从而推出

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_{\bar{f},\bar{f}',\bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}'| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle \\ &\qquad \times \langle \bar{f}| S^\dagger |\bar{f}''\rangle^* \langle \bar{f}''| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}',\bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'})\delta_{\bar{f}'\bar{f}''} \langle \bar{f}'| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle \\ &\qquad \times \langle \bar{f}''| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}'} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \left|\langle \bar{f}'| U(+\infty,0) H_{\mathrm{w}}(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle\right|^2 = \Gamma_{\bar{\mathcal{A}}}\end{aligned}$$

于是，正粒子 $\mathcal{A}$ 与反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度相等，因而寿命相同

对 CPT 对称性的验证

- 在实验上，可以通过测量正反粒子质量和寿命的差异来验证 CPT 对称性是否遭到破坏
- 目前尚未发现任何破坏 CPT 对称性的现象
- 下面列举一些实验测量结果（PDG 2022）
- 对于正反电子和正反质子的质量差，实验观测在 90% 置信度上给出下列上限：

$$\frac{m_{e^+}-m_{e^-}}{(m_{e^+}+m_{e^-})/2}<8\times10^{-9},\qquad \frac{m_p-m_{\bar{p}}}{m_p}<7\times10^{-10}$$

- 对于正反 μ 子的寿命比，实验测量得到

$$\frac{\tau_{\mu^+}}{\tau_{\mu^-}}=1.000024\pm0.000078$$

- 对于正反 π 介子的寿命差，实验测量给出

$$\frac{\tau_{\pi^+}-\tau_{\pi^-}}{(\tau_{\pi^+}+\tau_{\pi^-})/2}=(5.5\pm7.1)\times10^{-4}$$