

# 量子场论

## 第 9 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

### 9.1 节和 9.2 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2025 年 5 月 18 日



## 第 9 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

 相对于**连续变换**，不能用连续变化的参数描述的对称变换称为**分立** (discrete) **变换**，也称为**离散变换**

 如果系统作用量在一种分立变换下不变，则系统具有相应的**分立对称性** (discrete symmetry)

 1.3 节末提到的**宇称变换**和**时间反演变换**是两种重要的分立变换

 另一种常见的分立变换是**电荷共轭变换**

 本章讨论量子场的分立变换和分立对称性

 顺便介绍 **Majorana 旋量场**，并深入了解 **Weyl 旋量场**



## 9.1 节 标量场的分立变换

9.1.1 小节 标量场的  $P$  变换

☀️ 1.3 节提到，时空坐标  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  的宇称变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

🏠 这是一种非固有保时向 Lorentz 变换

🪨 它将  $x^\mu$  和  $\partial_\mu$  分别变换为  $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$  和  $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

🪵 将四维动量  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  变换为  $p'^\mu = (\mathcal{P}p)^\mu = (E, -\mathbf{p})$

🪵 但同时保持时空体积元不变， $d^4x' = |\det(\mathcal{P})| d^4x = d^4x$

🏗️ 如果场论系统的作用量  $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  在宇称变换下不变，则运动方程的形式也在宇称变换下不变，此时称系统是宇称守恒的，即具有空间反射对称性

🏠 在宇称守恒的理论中，拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  的宇称变换应当满足  $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ ，从而使得  $S' = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int d^4x \mathcal{L}(x) = S$

# $P$ 变换

☁ 类似于 3.1 节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的线性幺正变换  $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})|\Psi\rangle = P|\Psi\rangle$ ，称为  $P$  变换

🏠  $P \equiv U(\mathcal{P})$  是一个线性幺正算符，满足同态关系

$$U(\mathcal{P}^{-1})U(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}) = \mathbb{I} = U^{-1}(\mathcal{P})U(\mathcal{P})$$

🏛 由  $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$  得  $P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P$

🏠 即  $P$  是自身的逆变换算符，从而  $P^2 = P^{-1}P = \mathbb{I}$

🏠 由  $P$  的幺正性得  $P^\dagger = P^{-1} = P$ ，因而  $P$  是厄米算符

# $P$ 变换

☁ 类似于 3.1 节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的线性幺正变换  $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})|\Psi\rangle = P|\Psi\rangle$ ，称为  $P$  变换

🏠  $P \equiv U(\mathcal{P})$  是一个线性幺正算符，满足同态关系

$$U(\mathcal{P}^{-1})U(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}) = \mathbb{I} = U^{-1}(\mathcal{P})U(\mathcal{P})$$

🏛 由  $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$  得  $P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P$

🏠 即  $P$  是自身的逆变换算符，从而  $P^2 = P^{-1}P = \mathbb{I}$

🏠 由  $P$  的幺正性得  $P^\dagger = P^{-1} = P$ ，因而  $P$  是厄米算符

🏢 由量子场构成的拉氏量在宇称变换下不变意味着  $\mathcal{L}'(x') = P^{-1}\mathcal{L}(x')P = \mathcal{L}(x)$

🏠 作替换  $x' = \mathcal{P}x \rightarrow x$ ， $x \rightarrow \mathcal{P}^{-1}x = \mathcal{P}x$ ，将这个式子等价地写成

$$P^{-1}\mathcal{L}(x)P = +\mathcal{L}(\mathcal{P}x)$$

🏠 使拉氏量满足上式，也就是说，让拉氏量具有偶宇称（指上式右边的 + 号），就能得到宇称守恒的量子场论

## Poincaré 生成元算符的 $P$ 变换

 现在讨论量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  的生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  在宇称守恒理论中的  $P$  变换，此时可以将同态关系  $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$  推广到宇称变换  $\mathcal{P}$  上，于是

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a)$$

 相应的无穷小变换为  $P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon)$ ，这类似于 3.1.1 小节得到的  $U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)$

## Poincaré 生成元算符的 $P$ 变换

☁️ 现在讨论量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  的生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  在宇称守恒理论中的  $P$  变换, 此时可以将同态关系  $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$  推广到宇称变换  $P$  上, 于是

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(P)U(\Lambda, a)U(P) = U^{-1}(P)U(\Lambda P, a) = U(P^{-1}\Lambda P, P^{-1}a)$$

📖 相应的无穷小变换为  $P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + P^{-1}\omega P, P^{-1}\varepsilon)$ , 这类似于 3.1.1 小节得到的  $U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)$

🏠 由此推出类似于  $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$  的  $P$  变换规则

$$P^{-1}J^{\mu\nu}P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P^{-1}P^\mu P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu P^\nu$$

🏠 从而, 总角动量算符  $J^i \equiv \varepsilon^{ijk} J^{jk}/2$  和增速算符  $K^i \equiv J^{0i}$  在  $P$  变换下变成

$$P^{-1}J^i P = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} P^{-1}J^{jk}P = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{P}^j{}_l\mathcal{P}^k{}_m J^{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-\delta^j{}_l)(-\delta^k{}_m)J^{lm} = +J^i$$

$$P^{-1}K^i P = P^{-1}J^{0i}P = \mathcal{P}^0{}_0\mathcal{P}^i{}_j J^{0j} = -\delta^i{}_j J^{0j} = -K^i$$

# 总角动量、动量和哈密顿量的 $P$ 变换



写成三维矢量的形式，得

$$P^{-1}JP = +J, \quad P^{-1}KP = -K$$



总角动量算符  $J$  具有偶宇称，体现了它作为三维轴矢量的变换性质



因此角动量在宇称变换下不变

# 总角动量、动量和哈密顿量的 $P$ 变换

 写成三维矢量的形式，得  $P^{-1}\mathbf{J}P = +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P = -\mathbf{K}$

 总角动量算符  $\mathbf{J}$  具有偶宇称，体现了它作为三维轴矢量的变换性质

 因此角动量在宇称变换下不变

 将四维动量算符分解为  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ ，则  $P^{-1}P^\mu P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu P^\nu$  分解成

$$P^{-1}HP = +H, \quad P^{-1}\mathbf{P}P = -\mathbf{P}$$

 动量算符  $\mathbf{P}$  具有奇宇称，体现了它作为三维极矢量的变换性质

 因而动量方向在宇称变换下反转

# 总角动量、动量和哈密顿量的 $P$ 变换

☁️ 写成三维矢量的形式，得  $P^{-1}\mathbf{J}P = +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P = -\mathbf{K}$

🏠 总角动量算符  $\mathbf{J}$  具有偶宇称，体现了它作为三维轴矢量的变换性质

👉 因此角动量在宇称变换下不变

🏠 将四维动量算符分解为  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ ，则  $P^{-1}P^\mu P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu P^\nu$  分解成

$$P^{-1}HP = +H, \quad P^{-1}\mathbf{P}P = -\mathbf{P}$$

🏠 动量算符  $\mathbf{P}$  具有奇宇称，体现了它作为三维极矢量的变换性质

👉 因而动量方向在宇称变换下反转

🏠 哈密顿量算符  $H$  的宇称为偶，而  $P^{-1}HP = +H$  等价于  $[H, P] = 0$

🏠 这在量子理论中意味着宇称算符  $P$  是一个守恒量

🏠 在宇称守恒的相互作用理论中，如果散射或衰变过程的初态是宇称本征态，那么末态也将是宇称本征态，而且初末态的宇称本征值相等

# 宇称守恒和宇称破坏

☁️ 通常希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质

🍷 为了得到一个**宇称守恒**的量子场论，首先，需要让拉氏量中的**自由部分**在宇称变换下不变，这是容易做到的

🏰 其次，还得要求拉氏量中的**相互作用部分**也在宇称变换下不变，这一点**并不平庸**

🏰 尽管宇称在**电磁相互作用**和**强相互作用**中**守恒**，在**弱相互作用**中却遭到**极大破坏**

# 宇称守恒和宇称破坏

☁️ 通常希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质

🍷 为了得到一个**宇称守恒**的量子场论，首先，需要让拉氏量中的**自由部分**在宇称变换下不变，这是容易做到的

🏛️ 其次，还得要求拉氏量中的**相互作用部分**也在宇称变换下不变，这一点**并不平庸**

🕌 尽管宇称在**电磁相互作用**和**强相互作用**中**守恒**，在**弱相互作用**中却遭到**极大破坏**

🏰 这个出乎意料的现象是 1956 年李政道和杨振宁对实验结果作理论分析时发现的

🏰 随后由吴健雄在实验中确证

🕌 李政道和杨振宁因此获得 1957 年诺贝尔物理学奖

🏰 为了分析量子场论中的宇称守恒情况，我们需要知道各种量子场在  $P$  变换下的性质



李政道 (1926–)



杨振宁 (1922–)



吴健雄 (1912–1997)

## 复标量场产生湮灭算符的 $P$ 变换

 下面先讨论自由的复标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

  $\phi(x)$  的运动方程是 Klein-Gordon 方程  $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

 宇称变换翻转动量方向， $P$  变换对正标量玻色子  $\phi$  单粒子态  $|\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  的作用为  $P |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}^+\rangle$

  $\eta_P$  是一个复的相位因子，满足  $|\eta_P| = 1$

 出现  $\eta_P$  的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理

# 复标量场产生湮灭算符的 $P$ 变换

☀️ 下面先讨论自由的复标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

🏠  $\phi(x)$  的运动方程是 Klein-Gordon 方程  $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

👤 宇称变换翻转动量方向， $P$  变换对正标量玻色子  $\phi$  单粒子态  $|\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  的作用为  $P |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}^+\rangle$

🗽  $\eta_P$  是一个复的相位因子，满足  $|\eta_P| = 1$

🗽 出现  $\eta_P$  的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理

🏠 假设真空态在  $P$  变换下不变，即  $P |0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$P |\mathbf{p}^+\rangle = P^{-1} |\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} P^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger P |0\rangle$$

🏠 与  $P |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  比较，推出产生湮灭算符的  $P$  变换

$$P^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger P = \eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad P^{-1} a_{\mathbf{p}} P = \eta_P^* a_{-\mathbf{p}}$$

🏠 第二式由第一式取厄米共轭得到： $(P^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger P)^\dagger = (P^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger P)^\dagger = P^\dagger a_{\mathbf{p}} P = P^{-1} a_{\mathbf{p}} P$

## 复标量场平面波展开式的 $P$ 变换

☁ 另一方面,  $P$  变换对反标量玻色子  $\bar{\phi}$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  的作用为  $P|\mathbf{p}^-\rangle = \tilde{\eta}_P |-\mathbf{p}^-\rangle$ , 出现另一个相位因子  $\tilde{\eta}_P$ , 同理推出

$$P^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger P = \tilde{\eta}_P b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad P^{-1}b_{\mathbf{p}} P = \tilde{\eta}_P^* b_{-\mathbf{p}}$$

🏰 复标量场  $\phi(x)$  的平面波展开式在  $P$  变换下化为

$$\begin{aligned} P^{-1}\phi(x)P &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( P^{-1}a_{\mathbf{p}} P e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + P^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger P e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( \eta_P^* a_{-\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \tilde{\eta}_P b_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[ \eta_P^* a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathcal{P}\mathbf{x})} + \tilde{\eta}_P b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathcal{P}\mathbf{x})} \right] \end{aligned}$$

🏰 最后一步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , 并利用  $(\mathcal{P}\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot (\mathcal{P}\mathbf{x})$

# 复标量场的 $P$ 变换

☁️ 为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变，必须要求  $\eta_P$  和  $\tilde{\eta}_P$  满足关系式

$$\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$$

🦄 使得  $P^{-1}\phi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \eta_P^* a_p e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\eta}_P b_p^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] = \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x)$

⚠️ 故  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P = \eta_P \phi^\dagger(\mathcal{P}x)$$

👤 即  $P^{-1}\phi(x)P$  与  $\phi(\mathcal{P}x)$  只相差一个常数因子  $\eta_P^*$

# 复标量场的 $P$ 变换

☁️ 为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变，必须要求  $\eta_P$  和  $\tilde{\eta}_P$  满足关系式

$$\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$$

🧙 使得  $P^{-1}\phi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \eta_P^* a_p e^{-ip \cdot (Px)} + \tilde{\eta}_P b_p^\dagger e^{ip \cdot (Px)} \right] = \eta_P^* \phi(Px)$

⚠️ 故  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^* \phi(Px), \quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P = \eta_P \phi^\dagger(Px)$$

👤 即  $P^{-1}\phi(x)P$  与  $\phi(Px)$  只相差一个常数因子  $\eta_P^*$

👤 从而，作宇称变换之后的场  $\phi'(x') = P^{-1}\phi(x')P = \eta_P^* \phi(Px') = \eta_P^* \phi(x)$  也满足 Klein-Gordon 方程:  $(\partial'^2 + m^2)\phi'(x') = \eta_P^*(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

👤 这样的话， $b_p^\dagger$  和  $b_p$  的  $P$  变换  $P^{-1}b_p^\dagger P = \tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger$  和  $P^{-1}b_p P = \tilde{\eta}_P^* b_{-p}$  变成

$$P^{-1}b_p^\dagger P = \eta_P^* b_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}b_p P = \eta_P b_{-p}$$

# 拉氏量的 $P$ 变换

⚡ 现在讨论自由复标量场的拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$  的宇称变换性质

🏰 拉氏量中的动能项涉及到时空导数  $\partial_\mu$ ，它满足

$$\partial_{x,\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(\mathcal{P}^\nu{}_\rho x^\rho)}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}^\nu{}_\rho x^\rho)} = \mathcal{P}^\nu{}_\rho \delta^\rho{}_\mu \frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}x)^\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}x)^\nu}$$

🦂 即

$$\partial_{x,\mu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu}$$

🏔 这里在简写时把时空导数对时空点的依赖性明显写出来

🏔 在 Lorentz 逆变换定义式  $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta$  中取  $\Lambda = \mathcal{P}^{-1}$ ，得

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = g^{\mu\beta} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta g_{\nu\alpha}$$

🦊 据此将  $\partial_x^\mu = g^{\mu\beta} \partial_{x,\beta} = g^{\mu\beta} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta \partial_{\mathcal{P}x,\alpha} = g^{\mu\beta} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta g_{\alpha\nu} \partial_{\mathcal{P}x}^\nu$  化为

$$\partial_x^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{P}x}^\nu$$

# 由标量场构造的算符的 $P$ 变换

 于是，拉氏量中**动能项算符**  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P^{-1} \partial_x^\mu \phi^\dagger(x) \partial_{x,\mu} \phi(x) P &= \partial_x^\mu P^{-1} \phi^\dagger(x) P \partial_{x,\mu} P^{-1} \phi(x) P \\ &= |\eta_P|^2 \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{P}x}^\nu \phi^\dagger(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\rho} \phi(\mathcal{P}x) = + \partial_{\mathcal{P}x}^\mu \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \partial_{\mathcal{P}x,\mu} \phi(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

 **质量项算符**  $\phi^\dagger \phi$  的  $P$  变换为

$$P^{-1} \phi^\dagger(x) \phi(x) P = P^{-1} \phi^\dagger(x) P P^{-1} \phi(x) P = |\eta_P|^2 \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \phi(\mathcal{P}x) = + \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \phi(\mathcal{P}x)$$

 以上两式最右边表达式中的 **+** 号表明算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$  和  $\phi^\dagger \phi$  都具有**偶宇称**

 因此，拉氏量满足  $P^{-1} \mathcal{L}(x) P = + \mathcal{L}(\mathcal{P}x)$ ，即在宇称变换下**不变**；这说明**自由复标量场理论**是**宇称守恒**的，以上讨论是**自洽**的，而关系式  $\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$  是**合理**的

 在  $P$  变换下， $U(1)$  **守恒流算符**  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  变成

$$P^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x^\mu \phi(x) P = iP^{-1} \phi^\dagger(x) P \mathcal{P}^\mu{}_\nu \overleftrightarrow{\partial}_{\mathcal{P}x}^\nu P^{-1} \phi(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu i\phi^\dagger(\mathcal{P}x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mathcal{P}x}^\nu \phi(\mathcal{P}x)$$

 符合  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  作为**极矢量**的变换规则

# 正反标量玻色子态

 在质心系中考虑一对正反标量玻色子  $\phi\bar{\phi}$  组成的态  $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

  $\Phi(\mathbf{p})$  是动量空间波函数；当轨道角动量的量子数为  $L$ 、轨道磁量子数为  $M$  时，

$\Phi(\mathbf{p})$  正比于球谐函数  $Y_{LM}(\theta, \phi) = (-)^M \sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}} P_L^M(\cos\theta) e^{iM\phi}$

 其中  $\theta$  和  $\phi$  分别是球坐标系中动量  $\mathbf{p}$  的极角和方位角

 连带 Legendre 函数  $P_L^M(x) = \frac{(1-x^2)^{M/2}}{2^L L!} \frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}} (x^2-1)^L$  满足

$$P_L^M(-x) = (-)^{L+M} P_L^M(x)$$

  $-\mathbf{p}$  的极角为  $\pi - \theta$ ，方位角为  $\pi + \phi$ ，而  $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ ， $e^{iM\pi} = (-)^M$

 由  $Y_{LM}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-)^L Y_{LM}(\theta, \phi)$  得

$$\Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p})$$

# 轨道宇称和内禀宇称

于是， $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P|\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) P^{-1} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} P P^{-1} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} P |0\rangle = |\eta_P|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \\ &= \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$



第三步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$



这表明  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  是  $P$  算符的本征态，本征值  $(-)^L$  是可观测量，称作  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的宇称

# 轨道宇称和内禀宇称

于是， $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P|\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) P^{-1} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} P P^{-1} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} P |0\rangle = |\eta_P|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \\ &= \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$



第三步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$



这表明  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  是  $P$  算符的本征态，本征值  $(-)^L$  是可观测量，称作  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的宇称



宇称是一种相乘性量子数 (multiplicative quantum number)



态矢的总宇称是各部分贡献的宇称之积



波函数  $\Phi(\mathbf{p})$  对  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  宇称的贡献为  $(-)^L$ ，这部分称为轨道宇称 (orbital parity)



扣除轨道宇称之后，剩下的部分称为内禀宇称 (intrinsic parity)



$|\phi\bar{\phi}\rangle$  的内禀宇称为  $+$ ，即一对正反标量玻色子的内禀宇称为偶

# 实标量场的 $P$ 变换

 接下来讨论自由的实标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

 比较实标量场与复标量场的平面波展开式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在  $b_p = a_p$  的条件下进行，由此推出  $\eta_P = \tilde{\eta}_P = \eta_P^*$

 于是，相位因子  $\eta_P$  是实数，满足  $\eta_P^2 = |\eta_P|^2 = 1$ ，故  $\eta_P = \pm 1$

# 实标量场的 $P$ 变换

 接下来讨论自由的实标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

 比较实标量场与复标量场的平面波展开式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在  $b_p = a_p$  的条件下进行，由此推出  $\eta_P = \tilde{\eta}_P = \eta_P^*$

 于是，相位因子  $\eta_P$  是实数，满足  $\eta_P^2 = |\eta_P|^2 = 1$ ，故  $\eta_P = \pm 1$

 若  $\eta_P = +1$ ，则实标量场  $\phi(x)$  是狭义的标量场，宇称为偶， $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = +\phi(\mathcal{P}x)$$

 若  $\eta_P = -1$ ，则称它是赝标量场，宇称为奇， $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = -\phi(\mathcal{P}x)$$

 无论实标量场  $\phi(x)$  具有哪种宇称，拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  都在宇称变换下不变

 不过，与旋量场发生宇称守恒的相互作用时，宇称不同的实标量场  $\phi(x)$  具有不同的性质，可以通过实验来分辨

# U(1) 整体对称性与宇称变换

 对于复标量场  $\phi(x)$ ，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的

 2.4.3 小节中自由复标量场具有变换形式为  $\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x)$  的 U(1) 整体对称性

 相应的守恒荷算符  $Q$  满足  $[Q, \phi] = -q\phi$  (习题 2.4)，由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \dots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi$$

 再利用  $e^{-A}Be^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[B, A^{(n)}]$ ，推出

$$e^{i\theta Q}\phi e^{-i\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\phi, (-i\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!}[\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta q)^n}{n!}\phi = e^{-iq\theta}\phi$$

# U(1) 整体对称性与宇称变换

🧑 对于复标量场  $\phi(x)$ ，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的

📖 2.4.3 小节中自由复标量场具有变换形式为  $\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x)$  的 U(1) 整体对称性

🔦 相应的守恒荷算符  $Q$  满足  $[Q, \phi] = -q\phi$  (习题 2.4)，由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \dots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi$$

🚲 再利用  $e^{-A}Be^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[B, A^{(n)}]$ ，推出

$$e^{i\theta Q}\phi e^{-i\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\phi, (-i\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!}[\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iq\theta)^n}{n!}\phi = e^{-iq\theta}\phi$$

🚲 用厄米算符  $Q$  和  $P$  算符定义一个新的么正算符  $P' \equiv e^{-i\theta Q}P$

🚲 它满足  $P'^{-1} = P'^{\dagger} = P^{\dagger}e^{i\theta Q} = P^{-1}e^{i\theta Q}$ ，则复标量场  $\phi(x)$  的  $P'$  变换为

$$P'^{-1}\phi(x)P' = P^{-1}e^{i\theta Q}\phi(x)e^{-i\theta Q}P = e^{-iq\theta}P^{-1}\phi(x)P = e^{-iq\theta}\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x) = \eta_P'^*\phi(\mathcal{P}x)$$

🚲 其中  $\eta_P' \equiv e^{iq\theta}\eta_P$  是  $P'$  算符的相位因子

# 分立变换相位因子的任意性

 尽管  $P'$  算符不是厄米的，它的作用与  $P$  算符的作用在实质上是相同的，能够将  $\phi(x)$  变换成  $\phi(\mathcal{P}x)$ ，只相差一个相位因子  $\eta'_P$

 因此可以用  $P'$  取代  $P$  作为宇称变换算符，而相位因子  $\eta'_P$  将取代原来的  $\eta_P$

 由于  $U(1)$  变换参数  $\theta$  是任意的， $\eta'_P = e^{iq\theta} \eta_P$  的取值也是任意的

# 分立变换相位因子的任意性

 尽管  $P'$  算符不是厄米的，它的作用与  $P$  算符的作用在实质上是相同的，能够将  $\phi(x)$  变换成  $\phi(\mathcal{P}x)$ ，只相差一个相位因子  $\eta'_P$

 因此可以用  $P'$  取代  $P$  作为宇称变换算符，而相位因子  $\eta'_P$  将取代原来的  $\eta_P$

 由于  $U(1)$  变换参数  $\theta$  是任意的， $\eta'_P = e^{iq\theta} \eta_P$  的取值也是任意的

 另一方面，实标量场  $\phi(x)$  不具备  $U(1)$  整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性

 实标量场的  $U(1)$  荷  $q = 0$ ，守恒荷算符  $Q = 0$ ，因而  $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$  与  $P$  相同

# 分立变换相位因子的任意性

 尽管  $P'$  算符不是厄米的，它的作用与  $P$  算符的作用在**实质**上是**相同**的，能够将  $\phi(x)$  变换成  $\phi(\mathcal{P}x)$ ，只相差一个相位因子  $\eta'_P$

 因此可以用  $P'$  取代  $P$  作为**宇称变换算符**，而**相位因子**  $\eta'_P$  将**取代**原来的  $\eta_P$

 由于  $U(1)$  变换参数  $\theta$  是任意的， $\eta'_P = e^{iq\theta} \eta_P$  的**取值**也是**任意**的

 另一方面，**实标量场**  $\phi(x)$  **不具备**  $U(1)$  整体对称性，因而相应宇称变换相位因子**不具有这样的任意性**

 实标量场的  $U(1)$  荷  $q = 0$ ，守恒荷算符  $Q = 0$ ，因而  $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$  与  $P$  **相同**

 这个结论可以推广到**其它分立对称性**和**其它量子场**：

 **分立变换的相位因子**对于像复标量场这样的**复场**来说取值是**任意**的，对于像实标量场这样的**自共轭场**则是**确定**的

## 9.1.2 小节 标量场的 $T$ 变换

 时空坐标  $x^\mu$  的**时间反演**变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

 这是一种**非固有反时间** Lorentz 变换

 它将  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  变换为  $x'^\mu = (\mathcal{T}x)^\mu = (-t, \mathbf{x})$

 将  $\partial_\mu$  变换为  $\partial'_\mu = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

 将  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  变换为  $p'^\mu = (\mathcal{T}p)^\mu = (-E, \mathbf{p})$

 同时**保持时空体积元不变**,  $d^4x' = |\det(\mathcal{T})| d^4x = d^4x$

 于是, 只要拉氏量在时间反演变换下**不变**, 满足  $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ , 系统就具有**时间反演对称性**

# $T$ 变换

☂ 在具有**时间反演对称性**的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的  $T$  变换  $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{T})|\Psi\rangle = T|\Psi\rangle$ ，其中  $T \equiv U(\mathcal{T})$

🚜  $T$  是自身的逆变换算符， $T^{-1} = T$

🚗 仿照上面关于  $P$  变换的讨论，根据**同态关系**，量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  满足

$$T^{-1}U(\Lambda, a)T = U^{-1}(\mathcal{T})U(\Lambda, a)U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}a)$$

🚚 由此推出  $T$  变换规则  $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = iT^{\mu}_{\rho}T^{\nu}_{\sigma}J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}iP^{\mu}T = iT^{\mu}_{\nu}P^{\nu}$

🚚 这里保留了推导过程中的虚数  $i$

# $T$ 变换

☂ 在具有**时间反演对称性**的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的  $T$  变换  $|\Psi'\rangle = U(T)|\Psi\rangle = T|\Psi\rangle$ ，其中  $T \equiv U(T)$

🚗  $T$  是自身的逆变换算符， $T^{-1} = T$

🚗 仿照上面关于  $P$  变换的讨论，根据**同态关系**，量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  满足

$$T^{-1}U(\Lambda, a)T = U^{-1}(T)U(\Lambda, a)U(T) = U(T^{-1}\Lambda T, T^{-1}a)$$

🚚 由此推出  $T$  变换规则  $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = iT^\mu_\rho T^\nu_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}iP^\mu T = iT^\mu_\nu P^\nu$

🚚 这里保留了推导过程中的虚数  $i$

⚠ 如果时间反演算符  $T$  与宇称算符  $P$  一样是**线性么正算符**，那么，

$$T^{-1}HT = T^{-1}P^0T = T^0_0P^0 = -H$$

🚫 这意味着哈密顿量算符  $H$  在  $T$  变换下**发生改变**，导致理论**不具有**时间反演对称性，与我们的假设**矛盾**

🚫 因此， $T$  **不可能是线性么正算符**

# 反线性反么正算符

🌂 不过，对称变换在量子力学中不一定要用线性么正算符表述，也可以用反线性 (antilinear) 反么正 (antiunitary) 算符描述

🚆 一般地，在反线性反么正算符  $U$  的作用下，任意的态矢  $|\Psi_1\rangle$  和  $|\Psi_2\rangle$  满足

$$U(a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle) = a^*U|\Psi_1\rangle + b^*U|\Psi_2\rangle, \quad \langle U\Psi_1|U\Psi_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^*$$

🚆 其中  $a$  和  $b$  是任意复数，第一个等式代表反线性，第二个等式代表反么正

🚆 反线性意味着  $-i|\Psi_1\rangle = U^{-1}U(-i|\Psi_1\rangle) = U^{-1}iU|\Psi_1\rangle$ ，即

$$U^{-1}iU = -i$$

🚆 对任意复数  $a$ ，则有  $U^{-1}aU = a^*$

# 反线性反么正算符

🌂 不过，对称变换在量子力学中不一定要用线性么正算符表述，也可以用反线性 (antilinear) 反么正 (antiunitary) 算符描述

🚆 一般地，在反线性反么正算符  $U$  的作用下，任意的态矢  $|\Psi_1\rangle$  和  $|\Psi_2\rangle$  满足

$$U(a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle) = a^*U|\Psi_1\rangle + b^*U|\Psi_2\rangle, \quad \langle U\Psi_1|U\Psi_2\rangle = \langle \Psi_1|\Psi_2\rangle^*$$

🚆 其中  $a$  和  $b$  是任意复数，第一个等式代表反线性，第二个等式代表反么正

🚆 反线性意味着  $-i|\Psi_1\rangle = U^{-1}U(-i|\Psi_1\rangle) = U^{-1}iU|\Psi_1\rangle$ ，即

$$U^{-1}iU = -i$$

🚆 对任意复数  $a$ ，则有  $U^{-1}aU = a^*$

🚆 反线性反么正算符  $U$  的厄米共轭算符  $U^\dagger$  通过下式定义，

$$\langle \Psi_1|U^\dagger\Psi_2\rangle \equiv \langle U\Psi_1|\Psi_2\rangle^* = \langle \Psi_2|U\Psi_1\rangle$$

🚆 因而反么正意味着  $\langle \Psi_1|U^{-1}U\Psi_2\rangle = \langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = \langle U\Psi_1|U\Psi_2\rangle^* = \langle \Psi_1|U^\dagger U\Psi_2\rangle$

🚆 故  $U^{-1} = U^\dagger$ ，这个等式与线性么正算符满足的等式相同

# $T$ 变换的反线性反么正性

 现在将  $T$  算符定义为反线性反么正算符，满足

$$T^{-1}iT = -i, \quad T^{-1} = T^\dagger$$

 那么， $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = iT^\mu{}_\rho T^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}iP^\mu T = iT^\mu{}_\nu P^\nu$  表明生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}J^{\mu\nu}T = -T^\mu{}_\rho T^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}P^\mu T = -T^\mu{}_\nu P^\nu$$

 即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}\mathbf{H}T = +\mathbf{H}, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}$$

# $T$ 变换的反线性反么正性

 现在将  $T$  算符定义为反线性反么正算符，满足

$$T^{-1}iT = -i, \quad T^{-1} = T^\dagger$$

 那么， $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = iT^\mu{}_\rho T^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}iP^\mu T = iT^\mu{}_\nu P^\nu$  表明生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}J^{\mu\nu}T = -T^\mu{}_\rho T^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}P^\mu T = -T^\mu{}_\nu P^\nu$$

 即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}HT = +H, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}$$

 从而，哈密顿量算符  $H$  在时间反演变换下不变，满足  $[H, T] = 0$ ，符合理论具有时间反演对称性的假设

 动量算符  $\mathbf{P}$  和总角动量算符  $\mathbf{J}$  在  $T$  变换下分别反转成  $-\mathbf{P}$  和  $-\mathbf{J}$

 时间反演变换相当于逆着时间方向进行观察，因而动量和角动量的方向都会反转

# 复标量场平面波展开式的 $T$ 变换

 下面讨论自由复标量场  $\phi(x)$  的  $T$  变换

  $T$  变换会翻转粒子态对应的动量方向，因而产生湮灭算符的  $T$  变换为

$$T^{-1}a_p^\dagger T = \eta_T a_{-p}^\dagger, \quad T^{-1}a_p T = \eta_T^* a_{-p}, \quad T^{-1}b_p^\dagger T = \tilde{\eta}_T b_{-p}^\dagger, \quad T^{-1}b_p T = \tilde{\eta}_T^* b_{-p}$$

  $\eta_T$  和  $\tilde{\eta}_T$  是两个模为 1 的相位因子

# 复标量场平面波展开式的 $T$ 变换

 下面讨论自由复标量场  $\phi(x)$  的  $T$  变换

  $T$  变换会翻转粒子态对应的动量方向，因而产生湮灭算符的  $T$  变换为

$$T^{-1}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}T = \eta_T a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p}}T = \eta_T^* a_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}}^{\dagger}T = \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}}T = \tilde{\eta}_T^* b_{-\mathbf{p}}$$

  $\eta_T$  和  $\tilde{\eta}_T$  是两个模为 1 的相位因子

 复标量场平面波展开式的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}\phi(x)T &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( T^{-1}a_{\mathbf{p}}T T^{-1}e^{-ip \cdot x}T + T^{-1}b_{\mathbf{p}}^{\dagger}T T^{-1}e^{ip \cdot x}T \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( \eta_T^* a_{-\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} + \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[ \eta_T^* a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\eta}_T b_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right] \end{aligned}$$

 最后一步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ，并利用  $(\mathcal{P}p) \cdot x = p \cdot (\mathcal{P}x) = -p \cdot (\mathcal{T}x)$

# 复标量场的 $T$ 变换

 为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变， $T^{-1}\phi(x)T$  与  $\phi(\mathcal{T}x)$  最多只能相差一个常数因子，因此必须要求

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T$$

 使得  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^*\phi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T\phi^\dagger(\mathcal{T}x)$$

# 复标量场的 $T$ 变换

🌂 为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变， $T^{-1}\phi(x)T$  与  $\phi(Tx)$  最多只能相差一个常数因子，因此必须要求

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T$$

🕒 使得  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^*\phi(Tx), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T\phi^\dagger(Tx)$$

🌐 类似于  $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu}$  和  $\partial_x^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{P}x}^\nu$ ，时空导数满足

$$\partial_{x,\mu} = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}, \quad \partial_x^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{T}x}^\nu$$

🌙 那么算符  $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$ 、 $\phi^\dagger\phi$  和  $i\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi$  的  $T$  变换是

$$T^{-1}\partial_x^\mu\phi^\dagger(x)\partial_{x,\mu}\phi(x)T = \mathcal{T}^\mu{}_\nu(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu\partial_{\mathcal{T}x}^\nu\phi^\dagger(Tx)\partial_{\mathcal{T}x,\rho}\phi(Tx) = +\partial_{\mathcal{T}x}^\mu\phi^\dagger(Tx)\partial_{\mathcal{T}x,\mu}\phi(Tx)$$

$$T^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)T = \phi^\dagger(Tx)\phi(Tx) = +\phi^\dagger(Tx)\phi(Tx)$$

$$T^{-1}i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}_x^\mu\phi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu i\phi^\dagger(Tx)\overleftrightarrow{\partial}_{\mathcal{T}x}^\nu\phi(Tx) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu i\phi^\dagger(Tx)\overleftrightarrow{\partial}_{\mathcal{T}x}^\nu\phi(Tx)$$

★ 自由复标量场的拉氏量在时间反演变换下不变，满足  $T^{-1}\mathcal{L}(x)T = +\mathcal{L}(Tx)$

# 实标量场的 $T$ 变换

 令  $b_p = a_p$ ，就得到自由实标量场  $\phi(x)$  的情况，此时  $\eta_T = \tilde{\eta}_T = \eta_T^*$

 故  $\eta_T^2 = |\eta_T|^2 = 1$ ，有

$$\eta_T = \pm 1$$

 因此，存在两类实标量场

 一类实标量场具有  $\eta_T = +1$ ，相应的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = +\phi(\mathcal{T}x)$$

 另一类实标量场具有  $\eta_T = -1$ ，相应的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = -\phi(\mathcal{T}x)$$

 无论哪一类实标量场  $\phi(x)$ ，自由拉氏量都具有时间反演不变性

## 9.1.3 小节 标量场的 $C$ 变换

 除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

 电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反  $U(1)$  荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

## 9.1.3 小节 标量场的 $C$ 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反  $U(1)$  荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

在具有**电荷共轭对称性**的量子理论中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的**线性么正变换**

$$|\Psi'\rangle = C |\Psi\rangle$$

这个变换称为  $C$  变换

$C$  是自身的逆变换算符，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C$$

因而  $C$  算符是厄米的

# 复标量场的 $C$ 变换

对于自由复标量场  $\phi(x)$ ， $C$  变换将正粒子态转化成反粒子态， $C |p^+\rangle = \eta_C |p^-\rangle$

$\eta_C$  是相位因子，假设真空态在  $C$  变换下不变，即  $C |0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$\sqrt{2E_p} C^{-1} a_p^\dagger C |0\rangle = C \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle = C |p^+\rangle = \eta_C |p^-\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_C b_p^\dagger |0\rangle$$

$$C^{-1} a_p^\dagger C = \eta_C b_p^\dagger, \quad C^{-1} a_p C = \eta_C^* b_p$$

第一个等式等价于  $a_p^\dagger = \eta_C C b_p^\dagger C^{-1}$ ，因而  $\eta_C^* a_p^\dagger = |\eta_C|^2 C b_p^\dagger C^{-1} = C b_p^\dagger C^{-1}$ ，即

$$C^{-1} b_p^\dagger C = \eta_C^* a_p^\dagger, \quad C^{-1} b_p C = \eta_C a_p$$

# 复标量场的 $C$ 变换

对于自由复标量场  $\phi(x)$ ， $C$  变换将正粒子态转化成反粒子态， $C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle$

$\eta_C$  是相位因子，假设真空态在  $C$  变换下不变，即  $C |0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$\sqrt{2E_p} C^{-1} a_p^\dagger C |0\rangle = C \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle = C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_C b_p^\dagger |0\rangle$$

$$C^{-1} a_p^\dagger C = \eta_C b_p^\dagger, \quad C^{-1} a_p C = \eta_C^* b_p$$

第一个等式等价于  $a_p^\dagger = \eta_C C b_p^\dagger C^{-1}$ ，因而  $\eta_C^* a_p^\dagger = |\eta_C|^2 C b_p^\dagger C^{-1} = C b_p^\dagger C^{-1}$ ，即

$$C^{-1} b_p^\dagger C = \eta_C^* a_p^\dagger, \quad C^{-1} b_p C = \eta_C a_p$$

于是，复标量场  $\phi(x)$  的  $C$  变换为

$$\begin{aligned} C^{-1} \phi(x) C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (C^{-1} a_p C e^{-ip \cdot x} + C^{-1} b_p^\dagger C e^{ip \cdot x}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\eta_C^* b_p e^{-ip \cdot x} + \eta_C a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) = \eta_C^* \phi^\dagger(x) \end{aligned}$$

可见， $C$  变换使  $\phi(x)$  与其厄米共轭场  $\phi^\dagger(x)$  相互转换：

$$C^{-1} \phi(x) C = \eta_C^* \phi^\dagger(x), \quad C^{-1} \phi^\dagger(x) C = \eta_C \phi(x)$$

注意到等时对易关系，算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $C$  变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = +\partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x)$$

$$C^{-1} \phi^\dagger(x) \phi(x) C = |\eta_C|^2 \phi(x) \phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x) \phi(x)$$

$$C^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 i\phi(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x)$$

因此，自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下**不变**，满足  $C^{-1} \mathcal{L}(x) C = +\mathcal{L}(x)$

# 内禀 $C$ 宇称

注意到等时对易关系，算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $C$  变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = +\partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x)$$

$$C^{-1} \phi^\dagger(x) \phi(x) C = |\eta_C|^2 \phi(x) \phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x) \phi(x)$$

$$C^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 i\phi(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x)$$

因此，自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下**不变**，满足  $C^{-1} \mathcal{L}(x) C = +\mathcal{L}(x)$

对正反标量玻色子态  $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  作  $C$  变换，得

$$C |\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) C^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger C C^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger C |0\rangle = |\eta_C|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$$[a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad \Rightarrow \quad = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad \Leftarrow \text{变量替换 } \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$$

$$\Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle$$

# 内禀 $C$ 宇称

注意到等时对易关系，算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $C$  变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = +\partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x)$$

$$C^{-1} \phi^\dagger(x) \phi(x) C = |\eta_C|^2 \phi(x) \phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x) \phi(x)$$

$$C^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 i\phi(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x)$$

因此，自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下**不变**，满足  $C^{-1} \mathcal{L}(x) C = +\mathcal{L}(x)$

对正反标量玻色子态  $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  作  $C$  变换，得

$$\begin{aligned} C |\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) C^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger C C^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger C |0\rangle = |\eta_C|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$

$|\phi\bar{\phi}\rangle$  是  $C$  算符的本征态，本征值  $(-)^L$  是可观测量，称为  **$C$  宇称** ( $C$ -parity)

扣除波函数  $\Phi(\mathbf{p})$  贡献的  $(-)^L$  因子之后，剩下的  $C$  宇称为 **+**

即一对正反标量玻色子的**内禀  $C$  宇称为偶**

# 实标量场的 $C$ 变换

🌀 对于自由实标量场,  $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$

💚  $C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x)$  和  $C^{-1}\phi^\dagger(x)C = \eta_C\phi(x)$  表明  $\eta_C = \eta_C^*$

💖 故  $\eta_C^2 = |\eta_C|^2 = 1$ , 有  $\eta_C = \pm 1$

💛 这是  $C$  宇称的两种取值, 也就是说, 存在两类实标量场

💙 一类实标量场具有偶的  $C$  宇称,  $\eta_C = +1$ , 相应的  $C$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = +\phi(x)$$

💛 另一类实标量场具有奇的  $C$  宇称,  $\eta_C = -1$ , 相应的  $C$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = -\phi(x)$$

💜 无论实标量场  $\phi(x)$  具有哪种  $C$  宇称, 自由拉氏量都具有电荷共轭不变性

## 9.2 节 旋量场的分立变换

9.2.1 小节 旋量场的  $C$  变换

 现在讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $C$  变换

  $C$  变换在互换正反粒子的同时，不改变动量  $\mathbf{p}$  和螺旋度  $\lambda = \pm$ ，因此将正费米子态  $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$  转化成反费米子态  $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$ ，

$$C |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_C |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$$

  $\zeta_C$  是相位因子

## 9.2 节 旋量场的分立变换

9.2.1 小节 旋量场的  $C$  变换

 现在讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $C$  变换

  $C$  变换在互换正反粒子的同时，不改变动量  $\mathbf{p}$  和螺旋度  $\lambda = \pm$ ，因此将正费米子态  $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$  转化成反费米子态  $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$ ,

$$C |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_C |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$$

  $\zeta_C$  是相位因子，由此推出

$$C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger C = \zeta_C b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, \quad C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C = \zeta_C^* b_{\mathbf{p}, \lambda}, \quad C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger C = \zeta_C^* a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, \quad C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda} C = \zeta_C a_{\mathbf{p}, \lambda}$$

  $\psi(x)$  平面波展开式的  $C$  变换为

$$\begin{aligned} C^{-1} \psi(x) C &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + v(\mathbf{p}, \lambda) C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger C e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_C^* u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \zeta_C v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \end{aligned}$$

# 螺旋态关系式

 为了得到  $\psi(x)$  的**电荷共轭场**，需要探讨  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  之间**相互转换**的关系

 在 **Weyl 表象**中，对  $\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$  进行**转置**，得

$$\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

 另一方面，按照螺旋态的具体形式， $i\sigma^2$  对  $\xi_\lambda^*(\mathbf{p})$  的作用为

$$i\sigma^2\xi_+^*(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 - ip^2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ -(|\mathbf{p}| + p^3) \end{pmatrix} = -\xi_-(\mathbf{p})$$

$$i\sigma^2\xi_-^*(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| + p^3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} = +\xi_+(\mathbf{p})$$

 其中归一化因子  $N \equiv [2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)]^{-1/2}$ ，归纳起来，得

$$i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \quad i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = \lambda\xi_\lambda(\mathbf{p})$$

# 电荷共轭场

 引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$C \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

 就可以导出平面波旋量系数  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  之间的转换关系式：

$$C\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$C\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$

# 电荷共轭场

 引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$C \equiv i\gamma^0 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

 就可以导出平面波旋量系数  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  之间的转换关系式:

$$C\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$C\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$

 于是,  $\psi(x)$  的  $C$  变换化为

$$\begin{aligned} C^{-1}\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda \left[ \zeta_C^* u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda \left[ \zeta_C^* C\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* C\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] = \zeta_C^* \psi^C(x) \end{aligned}$$

 这里  $\psi^C(x) \equiv C\bar{\psi}^T(x)$  便是  $\psi(x)$  的**电荷共轭场**

# 电荷共轭矩阵的性质

 现在研究**电荷共轭矩阵  $C$**  的性质

 利用  $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 $\gamma^0$  的厄米性、 $\gamma^2$  的反厄米性和  $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ ，有

$$C^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -C$$

$$C^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -C$$

$$C^\dagger C = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = 1$$

 可见， $C$  是**么正矩阵**，满足

$$C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C$$

# 电荷共轭矩阵的性质

 现在研究**电荷共轭矩阵  $C$**  的性质

 利用  $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 $\gamma^0$  的厄米性、 $\gamma^2$  的反厄米性和  $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ ，有

$$C^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -C$$

$$C^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -C$$

$$C^\dagger C = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = 1$$

 可见， $C$  是**么正矩阵**，满足

$$C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C$$

 **Pauli 矩阵**满足  $\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = i\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^1 = -(\sigma^1)^T$ 、 $\sigma^2\sigma^2\sigma^2 = \sigma^2 = -(\sigma^2)^T$  和  $\sigma^2\sigma^3\sigma^2 = i\sigma^1\sigma^2 = -\sigma^3 = -(\sigma^3)^T$ ，归纳得到  $\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2 = \mathbf{1}^T$  和  $\sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = -\boldsymbol{\sigma}^T$ ，因此

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T, \quad \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$$

# Dirac 矩阵的电荷共轭变换

🐼 利用  $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$  和  $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$  推出

$$\begin{aligned}
 C^{-1} \gamma^\mu C &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & \\ & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} & \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \\ \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 & \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} & (\bar{\sigma}^\mu)^T \\ (\sigma^\mu)^T & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$C^{-1} \gamma^5 C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

🔔 即得  $\gamma^\mu$  和  $\gamma^5$  关于  $C$  的相似变换性质

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T, \quad C^{-1} \gamma^5 C = \gamma^5$$

🔔 由于  $C^{-1} = -C$ ，这两个式子等价于

$$C^{-1} (\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu, \quad C^{-1} (\gamma^5)^T C = \gamma^5$$

# $\psi^C(x)$ 的运动方程

 如果 **Dirac 旋量场**  $\psi(x)$  携带**电荷**  $Q$ ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

 对上式取厄米共轭，再右乘  $\gamma^0$ ，得

$$0 = \psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger (-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar{\psi} [-\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

 **转置**，推出  $[-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$

# $\psi^C(x)$ 的运动方程

 如果 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  携带电荷  $Q$ ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

 对上式取厄米共轭，再右乘  $\gamma^0$ ，得

$$0 = \psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger (-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m] \gamma^0 = \bar{\psi} [-\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

 转置，推出  $[-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m] \bar{\psi}^T = 0$

 利用  $C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$ ，将上式化为

$$0 = [C^{-1}\gamma^\mu C (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m C^{-1} C] \bar{\psi}^T = C^{-1} [\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m] C \bar{\psi}^T$$

 从而得到电荷共轭场  $\psi^C(x)$  的运动方程

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^C = 0$$

 对比  $\psi(x)$  的运动方程，可以看出  $\psi^C(x)$  确实携带相反的电荷  $-Q$

 同理， $\psi^C(x)$  携带的任何  $U(1)$  荷都与  $\psi(x)$  相反

# $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 $C$ 变换

 根据  $C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C$  和  $C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$

 **电荷共轭场**  $\psi^C(x) = C\bar{\psi}^T(x)$  的 **Dirac 共轭** 为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (C\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} C^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 C^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T C \gamma^0 \psi]^T \\ &= [C C^{-1} (\gamma^0)^T C \gamma^0 \psi]^T = -(C \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (C^T \psi)^T\end{aligned}$$

 即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) C$$

# $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 $C$ 变换

🐵 根据  $C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C$  和  $C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$

🎬 电荷共轭场  $\psi^C(x) = C\bar{\psi}^T(x)$  的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (C\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} C^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 C^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T C \gamma^0 \psi]^T \\ &= [C C^{-1} (\gamma^0)^T C \gamma^0 \psi]^T = -(C \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (C^T \psi)^T\end{aligned}$$

🎥 即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) C$$

🎬 于是  $C^{-1}\bar{\psi}C = C^\dagger \psi^\dagger C \gamma^0 = (C^{-1}\psi C)^\dagger \gamma^0 = (\zeta_C^* \psi^C)^\dagger \gamma^0 = \zeta_C \bar{\psi}^C = \zeta_C \psi^T C$

🎥 也就是说，Dirac 旋量场  $\psi(x)$  及其 Dirac 共轭场  $\bar{\psi}(x)$  的  $C$  变换是

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \zeta_C^* C \bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C \bar{\psi}^C(x) = \zeta_C \psi^T(x) C$$

🎥 仿照  $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) C$  的推导，由  $C\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = v(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $C\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = u(\mathbf{p}, \lambda)$  得

$$\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) = u^T(\mathbf{p}, \lambda) C, \quad \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) = v^T(\mathbf{p}, \lambda) C$$

## 一般旋量双线性型的 $C$ 变换

 考虑一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中  $\Gamma$  是旋量空间中的任意  $4 \times 4$  矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2 \psi^T C \Gamma C \bar{\psi}^T = \psi^T C \Gamma C \bar{\psi}^T = -\bar{\psi} C^T \Gamma^T C^T \psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，**转置两个旋量场会交换两者的位置，为**

**了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号**

## 一般旋量双线性型的 $C$ 变换

 考虑一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中  $\Gamma$  是旋量空间中的任意  $4 \times 4$  矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2 \psi^T C \Gamma C \bar{\psi}^T = \psi^T C \Gamma C \bar{\psi}^T = -\bar{\psi} C^T \Gamma^T C^T \psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，**转置两个旋量场会交换两者的位置，为**

**了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号**

 从而，由  $C^T = C^{-1} = -C$  得到  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  的  $C$  变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)C^{-1}\Gamma^T C\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^C\psi(x)$$

 其中  $\Gamma^C \equiv C^{-1}\Gamma^T C$  可视为矩阵  $\Gamma$  的**电荷共轭变换**

# 一般旋量双线性型的 $C$ 变换

 考虑一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中  $\Gamma$  是旋量空间中的任意  $4 \times 4$  矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^T C\Gamma C\bar{\psi}^T = \psi^T C\Gamma C\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}C^T\Gamma^T C^T\psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，**转置两个旋量场会交换两者的位置，为**

**了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号**

 从而，由  $C^T = C^{-1} = -C$  得到  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  的  $C$  变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)C^{-1}\Gamma^T C\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^C\psi(x)$$

 其中  $\Gamma^C \equiv C^{-1}\Gamma^T C$  可视为矩阵  $\Gamma$  的**电荷共轭变换**

 根据  $C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$  和  $C^{-1}(\gamma^5)^T C = \gamma^5$ ，有

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^C &= C^{-1}\mathbf{1}^T C = +\mathbf{1}, & (i\gamma^5)^C &= C^{-1}(i\gamma^5)^T C = +i\gamma^5 \\ (\gamma^\mu)^C &= C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu, & (\gamma^\mu\gamma^5)^C &= C^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^T C = +\gamma^\mu\gamma^5 \\ (\gamma^\mu\gamma^\nu)^C &= C^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^T C = +\gamma^\nu\gamma^\mu, & (\sigma^{\mu\nu})^C &= C^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^T C = -\sigma^{\mu\nu} \end{aligned}$$

# 旋量双线性型的 $C$ 变换

 于是，各种旋量双线性型的  $C$  变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

# 旋量双线性型的 $C$ 变换

 于是，各种旋量双线性型的  $C$  变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

 拉氏量中的**动能项算符**  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  在  $C$  变换下化为

$$\begin{aligned} C^{-1}i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= i\psi^T C\gamma^\mu C\partial_\mu\bar{\psi}^T = -i\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C\partial_\mu\bar{\psi}^T = i\psi^T(\gamma^\mu)^T\partial_\mu\bar{\psi}^T \\ &= -i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = -i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \end{aligned}$$

 最后的表达式中第一项是**全散度**，全时空积分后对作用量没有贡献，可以**丢弃**

 因而上式表明动能项算符在  $C$  变换下**不变**

 自由 Dirac 旋量场的**拉氏量**  $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$  具有**电荷共轭不变性**

## 手征旋量场算符的 $C$ 变换

 对于 8.3 节的**手征旋量场**  $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$ ，算符  $\bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}P_L\psi = \bar{\psi}(1 - \gamma^5)\psi/2$  和  $\bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}P_R\psi = \bar{\psi}(1 + \gamma^5)\psi/2$  在  $C$  变换下**不变**，满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)C = +\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)$$

# 手征旋量场算符的 $C$ 变换

 对于 8.3 节的**手征旋量场**  $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$ ，算符  $\bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}P_L\psi = \bar{\psi}(1 - \gamma^5)\psi/2$  和  $\bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}P_R\psi = \bar{\psi}(1 + \gamma^5)\psi/2$  在  $C$  变换下**不变**，满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)C = +\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)$$

 另一方面，**左手流算符**  $\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L = \bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\psi$  和

**右手流算符**  $\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R = \bar{\psi}\gamma^\mu P_R\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1 + \gamma^5)\psi$  的  $C$  变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\psi_L(x)C = -\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\psi_R(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\psi_R(x)C = -\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\psi_L(x)$$

 两者在  $C$  变换下**相互转化**，并出现一个**负号**

 在**弱相互作用**中，轻子和夸克的**左手流算符**和**右手流算符**参与不同的规范相互作用，因而**电荷共轭对称性遭到破坏**

## 9.2.2 小节 Majorana 旋量场

🐼 如果  $\psi(x)$  与它的电荷共轭场相同， $\psi(x) = \psi^C(x)$ ，即满足**自共轭条件**

$$\psi(x) = C\bar{\psi}^T(x)$$

🍲 那么， $\psi(x)$  就是一种**纯中性**的场，**不能携带**任何  $U(1)$  荷，称为 **Majorana 旋量场**，上式称为 **Majorana 条件**

🍵 于是，Majorana 旋量场满足  $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$



Ettore Majorana  
(1906-?)

## 9.2.2 小节 Majorana 旋量场

🐼 如果  $\psi(x)$  与它的电荷共轭场相同， $\psi(x) = \psi^C(x)$ ，即满足 **自共轭条件**

$$\psi(x) = C\bar{\psi}^T(x)$$

🍲 那么， $\psi(x)$  就是一种**纯中性**的场，**不能携带任何**  $U(1)$  荷，称为 **Majorana 旋量场**，上式称为 **Majorana 条件**

🍵 于是，Majorana 旋量场满足  $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$

🔍 根据  $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x)C$ ，Majorana 条件等价于  $\bar{\psi}(x) = \psi^T(x)C$

🍷 这里没出现  $\psi^\dagger(x)$ ，而出现  $\psi^T(x)$ ，表明  $\bar{\psi}_a(x) = \psi_b(x)C_{ba}$  与  $\psi_a(x)$  **线性相关**

🍷 因此， $\bar{\psi}_a(x)$  **并不是独立于**  $\psi_a(x)$  的场变量，这一点与 Dirac 旋量场**不同**

📖 根据前面的讨论， $\psi^C(x)$  的平面波展开式为

$$\psi^C(x) = \zeta_C C^{-1} \psi(x) C = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$



Ettore Majorana  
(1906–?)

# Majorana 费米子

👤 将上式与  $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right]$  比较

🍷 可知 Majorana 条件  $\psi(x) = \psi^C(x)$  意味着  $b_{\mathbf{p}, \lambda} = a_{\mathbf{p}, \lambda}$

🍷 因此, Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right]$$

🍷 产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^{\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^{\dagger}\} = 0$$

# Majorana 费米子

🧠 将上式与  $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right]$  比较

🍜 可知 Majorana 条件  $\psi(x) = \psi^C(x)$  意味着  $b_{\mathbf{p}, \lambda} = a_{\mathbf{p}, \lambda}$

🍜 因此, Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right]$$

🍜 产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^{\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^{\dagger}\} = 0$$

🍜 类似于实标量场, Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子

🍜 即正费米子与反费米子相同, 称为 Majorana 费米子

🍜  $C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C = \zeta_C^* b_{\mathbf{p}, \lambda}$ 、 $C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda} C = \zeta_C a_{\mathbf{p}, \lambda}$  和  $b_{\mathbf{p}, \lambda} = a_{\mathbf{p}, \lambda}$  表明  $\zeta_C = \zeta_C^*$

🍜 故  $\zeta_C = \pm 1$ , 也就是说, Majorana 旋量场的  $C$  宇称要么为偶, 要么为奇

## Majorana 旋量场双线性型的 $C$ 变换

🐸 对于 Majorana 旋量场,  $C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x)$  和  $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x)$  化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}(x)$$

👉 在  $C$  变换下, 由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$

🌀 即非平庸的  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  算符的  $C$  宇称必须为偶

## Majorana 旋量场双线性型的 $C$ 变换

🐸 对于 Majorana 旋量场， $C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \psi^C(x)$  和  $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C \bar{\psi}^C(x)$  化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C \psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C \bar{\psi}(x)$$

👉 在  $C$  变换下，由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2 \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$

🌀 即非平庸的  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  算符的  $C$  宇称必须为偶

🍪 这表明 Majorana 旋量场不能构成  $C$  宇称为奇的算符  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  和  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ ，即

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = 0$$

👉 由 Majorana 旋量场构成的非平庸双线性型则具有与 Dirac 旋量场相同的  $C$  变换规则

# 自由 Majorana 旋量场拉氏量

 自由 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T C \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T C \psi$$

 应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中  $\psi^T$  扮演的角色跟  $\psi$  相同

 如果将前后两个旋量场分别标记为  $\psi_1$  和  $\psi_2$ ，动能项算符可化为

$$\begin{aligned} \psi_1^T C \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T C \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T)(\gamma^\mu)^T C^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) C \gamma^\mu \psi_1 \end{aligned}$$

# 自由 Majorana 旋量场拉氏量

 自由 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T C \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T C \psi$$

 应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中  $\psi^T$  扮演的角色跟  $\psi$  相同

 如果将前后两个旋量场分别标记为  $\psi_1$  和  $\psi_2$ ，动能项算符可化为

$$\begin{aligned} \psi_1^T C \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T C \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T)(\gamma^\mu)^T C^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) C \gamma^\mu \psi_1 \end{aligned}$$

 质量项算符可化为  $\psi_1^T C \psi_2 = (\psi_1^T C \psi_2)^T = -\psi_2^T C^T \psi_1 = \psi_2^T C \psi_1$ ，则

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi_2^T) C \gamma^\mu - \frac{1}{2} m \psi_2^T C, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{1}{2} m \psi_1^T C$$

  $\psi_1$  和  $\psi_2$  都是  $\psi$ ，因而

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T C \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) C \gamma^\mu - m \psi^T C$$

# 自由 Majorana 旋量场运动方程

🐱 根据  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T C \gamma^\mu$  和  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) C \gamma^\mu - m \psi^T C$

📖 Euler-Lagrange 方程给出  $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) C \gamma^\mu + m \psi^T C$

🍰 对上式转置，并利用  $(\gamma^\mu)^T C^T = -C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C = C \gamma^\mu = -C^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T C^T \partial_\mu \psi + m C^T \psi = C^T (-i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi)$$

# 自由 Majorana 旋量场运动方程

🐱 根据  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T C \gamma^\mu$  和  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) C \gamma^\mu - m \psi^T C$

🍷 Euler-Lagrange 方程给出  $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) C \gamma^\mu + m \psi^T C$

🍰 对上式转置，并利用  $(\gamma^\mu)^T C^T = -C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C = C \gamma^\mu = -C^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T C^T \partial_\mu \psi + m C^T \psi = C^T (-i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi)$$

🍰 可见，自由的 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  也满足 Dirac 方程

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$$

🍰 这与上述平面波展开式

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-i p \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{i p \cdot x} \right]$$

相容

## 9.2.3 小节 旋量场的 $P$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $P$  变换

 宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度  $\lambda$  的符号

 平面波旋量系数  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  都是用螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  表达出来的

 而宇称变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$

## 9.2.3 小节 旋量场的 $P$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $P$  变换

 宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度  $\lambda$  的符号

 平面波旋量系数  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  都是用螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  表达出来的

 而宇称变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$

 第五章中的本征方程  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$  表明， $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$  都是  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  的归一化本征矢量，两者至多相差一个相位因子

 这个相位因子的具体形式与螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  的约定有关

 将螺旋态  $\xi_+(\mathbf{p})$  化为

$$\begin{aligned} \xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}| + p^3}{p^1 - ip^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{(|\mathbf{p}| + p^3)(p^1 + ip^2)}{(p^1)^2 + (p^2)^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# 螺旋态的宇称变换相位因子

🐎 利用  $(|\mathbf{p}| + p^3)(|\mathbf{p}| - p^3) = |\mathbf{p}|^2 - (p^3)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2$ ，推出

$$\begin{aligned} \xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)} \left( \frac{(|\mathbf{p}| + p^3)(p^1 + ip^2)}{(p^1)^2 + (p^2)^2} (p^1 - ip^2) \right. \\ &\quad \left. \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)} \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| - p^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| - p^3)} \frac{p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| - p^3 \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},+} \xi_-(-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

# 螺旋态的宇称变换相位因子

🐎 利用  $(|\mathbf{p}| + p^3)(|\mathbf{p}| - p^3) = |\mathbf{p}|^2 - (p^3)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2$ ，推出

$$\begin{aligned} \xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \left( \frac{(|\mathbf{p}| + p^3)(p^1 + ip^2)}{(p^1)^2 + (p^2)^2} (p^1 - ip^2) \right. \\ &\quad \left. \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| - p^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| - p^3)}} \frac{p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| - p^3 \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},+} \xi_-(-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

🏠 其中  $\kappa_{\mathbf{p},+}$  是相位因子  $\kappa_{\mathbf{p},\lambda} \equiv \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}}$  在  $\lambda = +$  时的结果

🟡 再由  $\kappa_{\mathbf{p},+}^* \kappa_{\mathbf{p},+} = 1$  推出  $\xi_-(-\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},+}^* \xi_+(\mathbf{p})$ ，故

$$\xi_-(\mathbf{p}) = \kappa_{-\mathbf{p},+}^* \xi_+(-\mathbf{p}) = \frac{-p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \xi_+(-\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},-} \xi_+(-\mathbf{p})$$

🌐 归纳起来，有  $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ ，可见  $\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$  就是想要得到的相位因子

$\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda)$ 

 由于  $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ ，Weyl 表象中的  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  满足

$$\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} \begin{pmatrix} \omega_\lambda(-\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ \lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$= \kappa_{\mathbf{p},-\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_\lambda(-\mathbf{p}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

 注意到  $\kappa_{\mathbf{p},-\lambda} = \frac{-\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = -\frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^*$ ，有

$$\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda), \quad \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda)$$

 可见， $\gamma^0$  对平面波旋量系数  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  作用**反转**了相应的**动量**和**螺旋度**，相当于作**宇称变换**

# 产生湮灭算符的 $P$ 变换

🐻 为得到自洽的宇称变换结果，将正反费米子态  $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$  和  $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$  的  $P$  变换设为

$$P|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^+, -\lambda\rangle, \quad P|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^-, -\lambda\rangle$$

🍌 其中  $\zeta_P$  和  $\tilde{\zeta}_P$  是两个相位因子，从而推出  $a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$  和  $a_{\mathbf{p}, \lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* a_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} P = \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} a_{-\mathbf{p}, -\lambda}$$

🍌 以及  $b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$  和  $b_{\mathbf{p}, \lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda} P = \tilde{\zeta}_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} b_{-\mathbf{p}, -\lambda}$$

# 产生湮灭算符的 $P$ 变换

🐹 为得到自洽的宇称变换结果，将正反费米子态  $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$  和  $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$  的  $P$  变换设为

$$P|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^+, -\lambda\rangle, \quad P|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^-, -\lambda\rangle$$

🍌 其中  $\zeta_P$  和  $\tilde{\zeta}_P$  是两个相位因子，从而推出  $a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$  和  $a_{\mathbf{p}, \lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* a_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} P = \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} a_{-\mathbf{p}, -\lambda}$$

🍌 以及  $b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$  和  $b_{\mathbf{p}, \lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda} P = \tilde{\zeta}_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} b_{-\mathbf{p}, -\lambda}$$

🍌 Dirac 旋量场平面波展开式的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P^{-1} \psi(x) P &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} P e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$

# $\psi(x)$ 的 $P$ 变换

👤 作变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  和  $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，得

$$\begin{aligned}
 & P^{-1}\psi(x)P \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p},-\lambda} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathcal{P}\mathbf{x})} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathcal{P}\mathbf{x})} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathcal{P}\mathbf{x})} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathcal{P}\mathbf{x})} \right]
 \end{aligned}$$

🍷 最后一步用到  $\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda)$  和  $\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda)$

# $\psi(x)$ 的 $P$ 变换

👉 作变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  和  $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，得

$$\begin{aligned}
 & P^{-1}\psi(x)P \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p},-\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right]
 \end{aligned}$$

🍷 最后一步用到  $\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda)$  和  $\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda)$

🧀 为了保持  $\psi(x)$  的运动方程形式不变，必须要求  $\zeta_P^* = -\tilde{\zeta}_P$ ，使  $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$  和  $b_{\mathbf{p},\lambda}$  的  $P$  变换化为  $P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = -\zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger$  和  $P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} P = -\zeta_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} b_{-\mathbf{p},-\lambda}$

🥥 从而  $\psi(x)$  的  $P$  变换为  $P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x)$

🍷 其中  $D(\mathcal{P}) \equiv \gamma^0$  正是 5.1 节引入的旋量空间中的宇称变换矩阵，它是幺正的

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $P$ 变换

🐧 现在，作宇称变换后， $\psi'(x') = P^{-1}\psi(x')P = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x') = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(x)$  也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= \zeta_P^* [i\gamma^\mu (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] D(\mathcal{P})\psi(x) \\ &= \zeta_P^* D(\mathcal{P}) [iD^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= \zeta_P^* D(\mathcal{P}) [i\mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) = \zeta_P^* D(\mathcal{P}) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

🧀 第三步用到 5.1 节公式  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $P$ 变换

🐣 现在，作宇称变换后， $\psi'(x') = P^{-1}\psi(x')P = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x') = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(x)$  也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= \zeta_P^* [i\gamma^\mu (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] D(\mathcal{P})\psi(x) \\ &= \zeta_P^* D(\mathcal{P}) [iD^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= \zeta_P^* D(\mathcal{P}) [i\mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) = \zeta_P^* D(\mathcal{P}) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

🧀 第三步用到 5.1 节公式  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

🍪 宇称变换矩阵  $D(\mathcal{P})$  的么正性表明  $D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$

🍷 由  $P^{-1}\psi^\dagger(x)P = [P^{-1}\psi(x)P]^\dagger = [\zeta_P^* \gamma^0 \psi(\mathcal{P}x)]^\dagger = \zeta_P \psi^\dagger(\mathcal{P}x) \gamma^0$  得

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P = P^{-1}\psi^\dagger(x)P \gamma^0 = \zeta_P \psi^\dagger(\mathcal{P}x) \gamma^0 \gamma^0 = \zeta_P \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^0$$

🍷 即  $\bar{\psi}(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P = \zeta_P \bar{\psi}(\mathcal{P}x) D^{-1}(\mathcal{P})$$

## 旋量双线性型的 $P$ 变换

🐧 从而，一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)P = P^{-1}\bar{\psi}(x)P\Gamma P^{-1}\psi(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x)$$

🌀 利用在 5.1 节推导出来的结果， $D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}$

$$D^{-1}(\mathcal{P})i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -i\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

# 旋量双线性型的 $P$ 变换

🐧 从而，一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)P = P^{-1}\bar{\psi}(x)P\Gamma P^{-1}\psi(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x)$$

🌀 利用在 5.1 节推导出来的结果， $D^{-1}(\mathcal{P})1D(\mathcal{P}) = +1$

$$D^{-1}(\mathcal{P})i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -i\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

🧀 得到

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)P = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)P = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)i\gamma^5\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x)$$

🍌 因此， $\bar{\psi}\psi$  是狭义的标量算符， $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$  是赝标量算符

🍌  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  是极矢量算符， $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$  是轴矢量算符

# 手征旋量双线性型的 $P$ 变换

 进一步推出

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) P = \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) P = \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$

 左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$  和右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$  在  $P$  变换下相互转化

 在弱相互作用中，轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏，即宇称不守恒

# 手征旋量双线性型的 $P$ 变换

 进一步推出

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) P = \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) P = \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$

 左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$  和右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$  在  $P$  变换下相互转化

 在弱相互作用中，轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏，即宇称不守恒

 利用  $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu}$ ，动能项算符  $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$  的  $P$  变换为

$$P^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_{x,\mu} \psi(x) P = iP^{-1} \bar{\psi}(x) P \gamma^\mu \partial_{x,\mu} P^{-1} \psi(x) P$$

$$= i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu D(\mathcal{P}) (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu} \psi(\mathcal{P}x)$$

$$= i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu} \psi(\mathcal{P}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\mu \partial_{\mathcal{P}x,\mu} \psi(\mathcal{P}x)$$

 因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在宇称变换下不变

# 正反费米子态的 $P$ 变换

 在质心系中考虑一对正反费米子  $\psi\bar{\psi}$  组成的系统

 设两个粒子的螺旋度相反，轨道角动量量子数为  $L$  的态矢为

$$|\psi\bar{\psi}\rangle = \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} |0\rangle, \quad \Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p})$$

 相应的  $P$  变换是

$$\begin{aligned} P |\psi\bar{\psi}\rangle &= \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) P^{-1} a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} P P^{-1} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} P |0\rangle \\ &= -|\zeta_P|^2 \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* a_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} b_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} |0\rangle \\ &= - \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} |0\rangle \end{aligned}$$

 最后一步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  和  $\lambda \rightarrow -\lambda$

# 内禀宇称

🐞 利用  $\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* = \frac{\lambda p^1 - i p^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \frac{\lambda p^1 + i p^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = 1$ ，推出

$$\begin{aligned}
 P |\psi\bar{\psi}\rangle &= - \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} |0\rangle \\
 &= -(-)^L \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} |0\rangle = (-)^{L+1} |\psi\bar{\psi}\rangle
 \end{aligned}$$

☕ 可见， $|\psi\bar{\psi}\rangle$  的总宇称为  $(-)^{L+1}$ ，包含轨道宇称  $(-)^L$  和内禀宇称  $-$

🍵 也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇

# 内禀宇称

🐞 利用  $\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* = \frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = 1$ ，推出

$$\begin{aligned} P |\psi\bar{\psi}\rangle &= - \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} |0\rangle \\ &= -(-)^L \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger} |0\rangle = (-)^{L+1} |\psi\bar{\psi}\rangle \end{aligned}$$

☕ 可见， $|\psi\bar{\psi}\rangle$  的总宇称为  $(-)^{L+1}$ ，包含轨道宇称  $(-)^L$  和内禀宇称  $-$

🍵 也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇

🦋 对于自由的 Majorana 旋量场  $\psi(x)$ ， $b_{\mathbf{p},\lambda} = a_{\mathbf{p},\lambda}$ ，则  $\tilde{\zeta}_P = \zeta_P$

🍵 从而  $\zeta_P^* = -\tilde{\zeta}_P = -\zeta_P$ ，因此

$$\zeta_P = \pm i$$

🍵 故 Majorana 旋量场的宇称是虚数

## 9.2.4 小节 旋量场的 $T$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $T$  变换

 时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度  $\lambda$  不变

 另一方面， $T$  变换是反线性的，将一个复数变换成它的复共轭

 因此  $T$  变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$

## 9.2.4 小节 旋量场的 $T$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $T$  变换

 时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度  $\lambda$  不变

 另一方面， $T$  变换是反线性的，将一个复数变换成它的复共轭

 因此  $T$  变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$

 对 9.2.1 小节推出的关系  $i\sigma^2 \xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$  取复共轭

 再利用  $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ ，得到  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$  之间的关系

$$i\sigma^2 \xi_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = -\lambda \kappa_{\mathbf{p},-\lambda}^* \xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$$

 作变量替换  $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，有  $i\sigma^2 \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$

  $i\sigma^2$  出现在矩阵  $C\gamma^5 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$  的两个对角分块中

# 产生湮灭算符的 $T$ 变换

🍏 现在, 
$$C\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = -\lambda\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}^* \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$C\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \begin{pmatrix} \lambda\omega_{\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

🍷 由  $\kappa_{\mathbf{p},-\lambda} = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^*$  得  $\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}^* = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$ , 从而推出

$$C\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda), \quad C\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$$

🍷 可见,  $D(T) \equiv C\gamma^5$  是旋量空间中的**时间反演矩阵**, 它对  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  的作用**反转**了相应的**动量**, 并将它们转换成各自的**复共轭**

# 产生湮灭算符的 $T$ 变换

🍏 现在, 
$$C\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = -\lambda\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}^* \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_\lambda^*(-\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_\lambda^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$C\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

🍷 由  $\kappa_{\mathbf{p},-\lambda} = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^*$  得  $\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}^* = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$ , 从而推出

$$C\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda), \quad C\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$$

🍷 可见,  $D(T) \equiv C\gamma^5$  是旋量空间中的**时间反演矩阵**, 它对  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  的作用**反转**了相应的**动量**, 并将它们转换成各自的**复共轭**

🍷 为得到**自洽时间反演变换**结果, 设正反费米子态  $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$  和  $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$  的  $T$  变换为

$$T|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* |-\mathbf{p}^+, \lambda\rangle, \quad T|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* |-\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$$

🍷 其中  $\zeta_T$  和  $\tilde{\zeta}_T$  是两个**相位因子**, 由此得到  $a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 、 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 、 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$  和  $b_{\mathbf{p},\lambda}$  的  $T$  变换

$$T^{-1} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* a_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1} a_{\mathbf{p},\lambda} T = \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}$$

$$T^{-1} b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* b_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1} b_{\mathbf{p},\lambda} T = \tilde{\zeta}_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}$$

# 平面波展开式的 $T$ 变换

 注意到  $T^{-1}iT = -i$ ，Dirac 旋量场平面波展开式的  $T$  变换是

$$\begin{aligned}
 & T^{-1}\psi(x)T \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} T^{-1} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right] T \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} u^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, \lambda} e^{ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{-ip \cdot x} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right]
 \end{aligned}$$

 第三步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$

 第四步用到  $\mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda)$  和  $\mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$

# $\psi(x)$ 的 $T$ 变换

🍊 为了让  $\psi(x)$  的运动方程具有时间反演对称性,

$$T^{-1}\psi(x)T = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right]$$

与  $\psi(\mathcal{T}x)$  最多只能相差一个常数矩阵, 因而必须要求

$$\zeta_T^* = \tilde{\zeta}_T$$

🍲 使得  $T^{-1}b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger T = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$  和  $T^{-1}b_{\mathbf{p}, \lambda} T = \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} b_{-\mathbf{p}, \lambda}$  化为

$$T^{-1}b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger T = \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}, \lambda} T = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} b_{-\mathbf{p}, \lambda}$$

🔪 从而  $\psi(x)$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^* D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$$

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $T$ 变换

🍊 由  $D^\dagger(\mathcal{T})D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} \gamma^5 = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^5 = \mathbf{1}$  可知

🍴 时间反演矩阵  $D(\mathcal{T})$  是幺正的，满足  $D^{-1}(\mathcal{T}) = D^\dagger(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$

🍽️ 对  $T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^* D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$  取厄米共轭，得

$$T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \zeta_T \psi^\dagger(\mathcal{T}x)D^\dagger(\mathcal{T}) = \zeta_T \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$$

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $T$ 变换

🍊 由  $D^\dagger(T)D(T) = \gamma^5 C^\dagger C \gamma^5 = \gamma^5 C^{-1} C \gamma^5 = \mathbf{1}$  可知

🍴 时间反演矩阵  $D(T)$  是**么正的**，满足  $D^{-1}(T) = D^\dagger(T) = \gamma^5 C^{-1}$

🍽️ 对  $T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^* D(T)\psi(Tx)$  取厄米共轭，得

$$T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \zeta_T \psi^\dagger(Tx)D^\dagger(T) = \zeta_T \psi^\dagger(Tx)\gamma^5 C^{-1}$$

🔪 由  $\gamma^0$  的**厄米性**有  $(\gamma^0)^* = (\gamma^0)^T$ ，由  $C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$  得  $C^{-1}(\gamma^0)^T = -\gamma^0 C^{-1}$

🔪 再利用  $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$  推出

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T = T^{-1}\psi^\dagger(x)T(\gamma^0)^* = \zeta_T \psi^\dagger(Tx)\gamma^5 C^{-1}(\gamma^0)^T = \zeta_T \psi^\dagger(Tx)\gamma^0 \gamma^5 C^{-1}$$

🔪 即  $\bar{\psi}(x)$  的  $T$  变换为  $T^{-1}\bar{\psi}(x)T = \zeta_T \bar{\psi}(Tx)D^{-1}(T)$

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $T$ 变换

🍊 由  $D^\dagger(T)D(T) = \gamma^5 C^\dagger C \gamma^5 = \gamma^5 C^{-1} C \gamma^5 = \mathbf{1}$  可知

🍴 时间反演矩阵  $D(T)$  是**么正的**，满足  $D^{-1}(T) = D^\dagger(T) = \gamma^5 C^{-1}$

🍽️ 对  $T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^* D(T)\psi(Tx)$  取厄米共轭，得

$$T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \zeta_T \psi^\dagger(Tx) D^\dagger(T) = \zeta_T \psi^\dagger(Tx) \gamma^5 C^{-1}$$

🔪 由  $\gamma^0$  的**厄米性**有  $(\gamma^0)^* = (\gamma^0)^T$ ，由  $C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$  得  $C^{-1}(\gamma^0)^T = -\gamma^0 C^{-1}$

🔪 再利用  $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$  推出

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T = T^{-1}\psi^\dagger(x)T(\gamma^0)^* = \zeta_T \psi^\dagger(Tx) \gamma^5 C^{-1}(\gamma^0)^T = \zeta_T \psi^\dagger(Tx) \gamma^0 \gamma^5 C^{-1}$$

✂️ 即  $\bar{\psi}(x)$  的  $T$  变换为  $T^{-1}\bar{\psi}(x)T = \zeta_T \bar{\psi}(Tx) D^{-1}(T)$

🛡️ 据此，**一般旋量双线性型**  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  的  $T$  变换是

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)T = T^{-1}\bar{\psi}(x)TT^{-1}\Gamma TT^{-1}\psi(x)T = \bar{\psi}(Tx) D^{-1}(T)\Gamma^* D(T)\psi(Tx)$$

✂️ 即问题归结为计算  $D^{-1}(T)\Gamma^* D(T)$

# 旋量空间中矩阵的 $T$ 变换

根据  $\gamma^5$  的厄米性、 $\gamma^i$  的反厄米性、 $C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$  和  $C^{-1}(\gamma^5)^T C = \gamma^5$ ，有

$$D^{-1}(T)(\gamma^5)^* D(T) = \gamma^5 C^{-1}(\gamma^5)^T C \gamma^5 = (\gamma^5)^3 = \gamma^5$$

$$D^{-1}(T)(\gamma^0)^* D(T) = \gamma^5 C^{-1}(\gamma^0)^T C \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^5 = \gamma^0$$

$$D^{-1}(T)(\gamma^i)^* D(T) = -\gamma^5 C^{-1}(\gamma^i)^T C \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^i \gamma^5 = -\gamma^i$$

进而得到

$$D^{-1}(T)\mathbf{1}^* D(T) = +\mathbf{1}$$

$$D^{-1}(T)(i\gamma^5)^* D(T) = -i\gamma^5$$

$$D^{-1}(T)(\gamma^\mu)^* D(T) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(T)(\gamma^\mu \gamma^5)^* D(T) = D^{-1}(T)(\gamma^\mu)^* D(T) D^{-1}(T)(\gamma^5)^* D(T) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$

$$D^{-1}(T)(\sigma^{\mu\nu})^* D(T) = -\frac{i}{2} D^{-1}(T)[(\gamma^\mu)^*(\gamma^\nu)^* - (\gamma^\nu)^*(\gamma^\mu)^*] D(T)$$

$$= -\frac{i}{2} \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho) = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

# 旋量双线性型的 $T$ 变换

🍌 于是，各种旋量双线性型的  $T$  变换为

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)T = +\bar{\psi}(Tx)\psi(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)T = -\bar{\psi}(Tx)i\gamma^5\psi(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(Tx)\gamma^\nu\psi(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(Tx)\gamma^\nu\gamma^5\psi(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(Tx)\sigma^{\rho\sigma}\psi(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)T = +\bar{\psi}_R(Tx)\psi_L(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)T = +\bar{\psi}_L(Tx)\psi_R(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\psi_L(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_L(Tx)\gamma^\nu\psi_L(Tx)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\psi_R(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_R(Tx)\gamma^\nu\psi_R(Tx)$$

# 拉氏量和运动方程的时间反演对称性

🍌 利用  $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}$ ，动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$  的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_{x,\mu} \psi(x) T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) D^{-1}(\mathcal{T}) (\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T}) (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu} \psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu} \psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\mu \partial_{\mathcal{T}x,\mu} \psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

🔪 因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演变换下不变

## 拉氏量和运动方程的时间反演对称性

🍌 利用  $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}$ ，动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$  的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_{x,\mu}\psi(x)T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}\psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}\psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\mu \partial_{\mathcal{T}x,\mu}\psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

🔪 因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演变换下不变

🔪 由于  $T$  变换是反线性的，Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  的时间反演对称性意味着运动方程  $[-i(\gamma^\mu)^* \partial'_\mu - m]\psi'(x') = 0$  成立，这一点在下面的推导中得到验证：

$$\begin{aligned} [-i(\gamma^\mu)^* \partial'_\mu - m]\psi'(x') &= [-i(\gamma^\mu)^*(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]T^{-1}\psi(x')T \\ &= \zeta_T^* D(\mathcal{T})[-iD^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(\mathcal{T}x') \\ &= \zeta_T^* D(\mathcal{T})[i\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= \zeta_T^* D(\mathcal{T})(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

# 拉氏量和运动方程的时间反演对称性

🍌 利用  $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}$ ，动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$  的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_{x,\mu}\psi(x)T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}\psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}\psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\mu \partial_{\mathcal{T}x,\mu}\psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

🔪 因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演变换下不变

🔪 由于  $T$  变换是反线性的，Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  的时间反演对称性意味着运动方程  $[-i(\gamma^\mu)^* \partial'_\mu - m]\psi'(x') = 0$  成立，这一点在下面的推导中得到验证：

$$\begin{aligned} [-i(\gamma^\mu)^* \partial'_\mu - m]\psi'(x') &= [-i(\gamma^\mu)^*(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]T^{-1}\psi(x')T \\ &= \zeta_T^* D(\mathcal{T})[-iD^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(\mathcal{T}x') \\ &= \zeta_T^* D(\mathcal{T})[i\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= \zeta_T^* D(\mathcal{T})(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

🍒 对于自由的 Majorana 旋量场  $\psi(x)$ ， $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$ ，则  $\zeta_T = \tilde{\zeta}_T = \zeta_T^*$ ，故

$\zeta_T = \pm 1$