

量子场论

第 8 章 量子电动力学

8.6 节 Compton 散射

余钊焕


中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>


更新日期：2024 年 1 月 22 日





8.6 节 Compton 散射

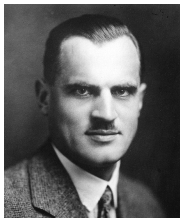
 电子与光子的散射过程 $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射**

 1923 年, Arthur Compton 用 **X 射线**照射**核外电子**, 发现 X 射线因**失去能量**而**波长变长**

 他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV, 远大于原子结合能, 因而核外电子可以看成是**自由的**


 根据**相对论运动学**, Compton 推导出光子的波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系
$$\Delta\lambda = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta)$$


 他的实验证实了这条公式, 为光的**粒子性**提供了直接证据





Arthur Holly Compton
(1892–1962)


8.6 节 Compton 散射


 电子与光子的散射过程 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 称为 **Compton 散射**

 1923 年, Arthur Compton 用 **X 射线** 照射 **核外电子**, 发现 X 射线因 **失去能量** 而 **波长变长**

 他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV, 远大于原子结合能, 因而核外电子可以看成是 **自由的**

 根据 **相对论运动学**, Compton 推导出光子的波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系
$$\Delta\lambda = \frac{2\pi}{m_e} (1 - \cos\theta)$$

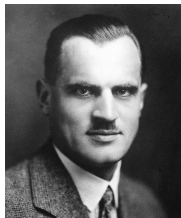
 他的实验证实了这条公式, 为光的 **粒子性** 提供了直接证据

 另一方面, 对于 **低能电磁辐射** 与 **电子** 散射的过程, Joseph Thomson 根据 **经典电磁学** 推导出微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \pi r_e^2 (1 + \cos^2\theta) = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2\theta)$$

 $r_e \equiv \alpha/m_e$ 是电子的 **经典半径**

 **QED** 将给出这条微分散射截面公式的 **相对论修正**



Arthur Holly Compton
(1892–1962)



Joseph John Thomson
(1856–1940)

Compton 散射振幅

Compton 散射在 QED 领头阶具有 s 通道和 u 通道的 Feynman 图，不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= \varepsilon_\mu^*(p_2) \bar{u}(p_1) (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e)}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} (ie\gamma^\nu) u(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \\
 &\quad + \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e)}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} (ie\gamma^\mu) u(k_1) \varepsilon_\mu^*(p_2) \\
 &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left[\frac{\gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \gamma^\mu}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1)
 \end{aligned}$$

两幅图的电子线拓扑结构相同，可通过连续变形相互转换，因而相对符号为正

化简振幅

🍌 根据质壳关系 $k_1^2 = m_e^2$ 和 $k_2^2 = p_2^2 = 0$, 传播子的分母化为

$$(k_1 + k_2)^2 - m_e^2 = 2k_1 \cdot k_2, \quad (k_1 - p_2)^2 - m_e^2 = -2k_1 \cdot p_2$$

🍌 利用 $\not{k}_1 \gamma^\nu = 2k_1^\nu - \gamma^\nu \not{k}_1$ 和运动方程 $(\not{k}_1 - m_e)u(k_1) = 0$, 有


$$\begin{aligned} (\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu u(k_1) &= (2k_1^\nu - \gamma^\nu \not{k}_1 + m_e\gamma^\nu)u(k_1) \\ &= 2k_1^\nu u(k_1) - \gamma^\nu (\not{k}_1 - m_e)u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1) \end{aligned}$$

🍌 利用这些结果化简振幅, 得

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left[\frac{\gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \gamma^\mu}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\ &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2k_1 \cdot p_2} \right) u(k_1) \end{aligned}$$

8.6.1 小节 光子极化求和与 Ward 恒等式

 接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算**非极化**振幅模方

 这将涉及**对光子螺旋度求和**，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_{\mu}^*(p) \varepsilon_{\nu}(p) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\mathbf{p}, \lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_{\mu} n_{\nu} + p_{\nu} n_{\mu}}{p \cdot n}$$

 第二步用到**极化矢量求和关系**，本小节讨论光子极化求和的**简化方法**

8.6.1 小节 光子极化求和与 Ward 恒等式

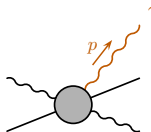
🍆 接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算**非极化**振幅模方

✈️ 这将涉及**对光子螺旋度求和**，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_{\mu}^*(p) \varepsilon_{\nu}(p) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\mathbf{p}, \lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_{\mu} n_{\nu} + p_{\nu} n_{\mu}}{p \cdot n}$$

🚢 第二步用到**极化矢量求和关系**，本小节讨论光子极化求和的**简化方法**

🎯 考虑**出射**一个动量为 p^{μ} 的光子的**任意 QED 过程**，不变振幅为



$$= i\mathcal{M}(p) = iM^{\mu}(p) \varepsilon_{\mu}^*(p)$$

🚀 对**光子极化求和**，振幅模方变成

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 &= \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\mathbf{p}, \lambda) M^{\mu}(p) M^{\nu*}(p) \\ &= \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_{\mu} n_{\nu} + p_{\nu} n_{\mu}}{p \cdot n} \right] M^{\mu}(p) M^{\nu*}(p) \end{aligned}$$

守恒流方程的推论

🍌 QED 相互作用项为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu$ ，其中**电磁流** $J_{\text{EM}}^\mu = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$

🛵 因此，上述过程的 T 矩阵元具有以下形式，

$$\begin{aligned} \langle f | iT | i \rangle &\propto \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle \cdots ; \mathbf{p}, \lambda | \overline{\mathbf{N}}[A_\mu(x_1) J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathbf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \end{aligned}$$

🛵 可见 $M^\mu(p) \propto \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathbf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$

守恒流方程的推论

🍌 QED 相互作用项为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu$ ，其中**电磁流** $J_{\text{EM}}^\mu = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$

🚲 因此，上述过程的 T 矩阵元具有以下形式，

$$\begin{aligned} \langle f | iT | i \rangle &\propto \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \langle \cdots ; \overline{\mathbf{p}, \lambda} | \mathbf{N}[A_\mu(x_1) J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathbf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \end{aligned}$$

🚲 可见 $M^\mu(p) \propto \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathbf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$

🚲 在**经典**层面上，电磁流 J_{EM}^μ 满足**守恒流方程** $\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu = 0$

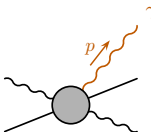
👉 如果**假设** $\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu = 0$ 在**量子**层面上也**成立**，就可以推出

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathbf{N}[\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ \text{分部积分} \downarrow &= - \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n (\partial_\mu e^{ip \cdot x_1}) \langle \cdots | \mathbf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= -ip_\mu \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathbf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \propto p_\mu M^\mu(p) \end{aligned}$$

Ward 恒等式

🌶️ 于是得到 **Ward 恒等式**

$$p_\mu M^\mu(p) = 0$$



A Feynman diagram showing a central grey circle vertex. Two wavy lines (representing photons) enter from the left. One wavy line exits to the right, and another wavy line exits upwards and to the right, labeled with a red arrow and the Greek letter gamma (γ). The momentum of the outgoing photon is labeled 'p'.

$$= iM^\mu(p) \varepsilon_\mu^*(p)$$

📡 它对于**入射光子**的情况同样成立

📡 Ward 恒等式表明，**只要将不变振幅中任何一个入射或**

出射光子的极化矢量替换成相应的**四维动量**，则结果**为零**

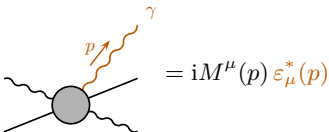


John Clive Ward
(1924–2000)

Ward 恒等式

🌶️ 于是得到 **Ward 恒等式**

$$p_\mu M^\mu(p) = 0$$



📡 它对于**入射光子**的情况同样成立

📡 Ward 恒等式表明，**只要将不变振幅中任何一个入射或**

出射光子的极化矢量替换成相应的**四维动量**，则结果为零

🚗 虽然这里利用了**经典的守恒流方程**，但实际上可以在**量子场论**中**严格证明** Ward 恒等式，相关证明留待后文叙述

🚗 Ward 恒等式是**电磁流守恒**在**量子**层面上的体现，与 QED 的**规范对称性**密切相关


🚲 **规范变换** $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ 在动量空间中体现为 $\varepsilon_\mu^*(p) \rightarrow \varepsilon_\mu^*(p) - ip_\mu$

🚲 因此振幅 $\varepsilon_\mu^*(p) M^\mu(p)$ 的**规范不变性**等价于 Ward 恒等式 $p_\mu M^\mu(p) = 0$




John Clive Ward
(1924–2000)


光子极化求和

 对前面的

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 &= \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\mathbf{p}, \lambda) M^{\mu}(p) M^{\nu*}(p) \\ &= \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_{\mu} n_{\nu} + p_{\nu} n_{\mu}}{p \cdot n} \right] M^{\mu}(p) M^{\nu*}(p) \end{aligned}$$

 应用 Ward 恒等式 $p_{\mu} M^{\mu}(p) = 0$ ，则方括号中后两项都没有贡献，得到

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\mathbf{p}, \lambda) M^{\mu}(p) M^{\nu*}(p) = -g_{\mu\nu} M^{\mu}(p) M^{\nu*}(p)$$

 也就是说，在 QED 计算中可以使用替换关系

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_{\mu}^*(p) \varepsilon_{\nu}(p) \rightarrow -g_{\mu\nu}$$

 这就是处理光子极化求和的简化方法

验证 Ward 恒等式


 现在用 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 散射振幅验证 Ward 恒等式

 将这个振幅表达为 $i\mathcal{M} = i\varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) M^{\mu\nu}$


$$M^{\mu\nu} = -e^2 \bar{u}(p_1) \left[\frac{\gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \gamma^\mu}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1)$$

 电子场旋量系数的运动方程为 $(\not{k}_1 - m_e)u(k_1) = 0$ ，即

$$\not{k}_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$$

 两边取厄米共轭，右乘 γ^0 ，得

$$\bar{u}(k_1) \not{k}_1 = \bar{u}(k_1) m_e, \quad \text{同理} \quad \bar{u}(p_1) \not{p}_1 = \bar{u}(p_1) m_e$$

 再利用 $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ ，推出


$$\not{p}_2 u(k_1) = -(\not{k}_1 - \not{p}_2 - \not{k}_1)u(k_1) = -(\not{k}_1 - \not{p}_2 - m_e)u(k_1)$$


$$\bar{u}(p_1) \not{p}_2 = \bar{u}(p_1) (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p}_1) = \bar{u}(p_1) (\not{k}_1 + \not{k}_2 - m_e)$$

验证 Ward 恒等式：光子外线

 从而

$$\begin{aligned}
 p_{2\mu} M^{\mu\nu} &= -e^2 \bar{u}(p_1) \left[\frac{\not{p}_2 (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \not{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\
 &= -e^2 \bar{u}(p_1) \left[\frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2 - m_e)(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e)(\not{k}_1 - \not{p}_2 - m_e)}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\
 &= -e^2 \bar{u}(p_1) \left[\frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 - m_e^2}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} \gamma^\nu - \gamma^\nu \frac{(\not{k}_1 - \not{p}_2)^2 - m_e^2}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1)
 \end{aligned}$$

 由 $\not{p}\not{p} = p^2$ 得 $(\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$ 和 $(\not{k}_1 - \not{p}_2)^2 = (k_1 - p_2)^2$

 故 Ward 恒等式 $p_{2\mu} M^{\mu\nu} = 0$ 对 $i\mathcal{M} = i\varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) M^{\mu\nu}$ 成立

 同理可以验证 Ward 恒等式 $k_{2\nu} M^{\mu\nu} = 0$ 成立

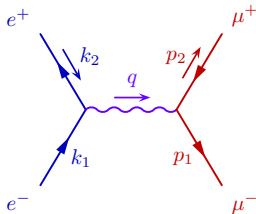
验证 Ward 恒等式：光子内线

🥦 其实，Ward 恒等式不仅对**光子外线**成立，对**光子内线**也成立

🚗 **光子传播子动量** q^μ 流入或流出的振幅 $M^\mu(q)$ 满足 **Ward 恒等式** $q_\mu M^\mu(q) = 0$

🚗 以 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 振幅 $i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)$ 为例

🚗 光子传播子动量为 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$ ，**电子线部分振幅**为 $M^\mu(q) = ie\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$



验证 Ward 恒等式：光子内线

🥦 其实，Ward 恒等式不仅对光子外线成立，对光子内线也成立

🚗 光子传播子动量 q^μ 流入或流出的振幅 $M^\mu(q)$ 满足 Ward 恒等式 $q_\mu M^\mu(q) = 0$

🚗 以 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 振幅 $i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)$ 为例

🚗 光子传播子动量为 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$ ，电子线部分振幅为 $M^\mu(q) = ie\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$

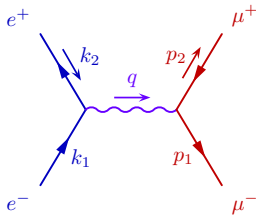
🚗 运动方程 $(\not{k}_2 + m_e)v(k_2) = 0$ 表明 $\not{k}_2 v(k_2) = -m_e v(k_2)$

🚗 两边取厄米共轭，右乘 γ^0 ，得 $\bar{v}(k_2)\not{k}_2 = -\bar{v}(k_2)m_e$


🚗 再利用 $\not{k}_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$ 即可推出 Ward 恒等式

$$\begin{aligned} q_\mu M^\mu(q) &= ie\bar{v}(k_2)\not{q}u(k_1) = ie\bar{v}(k_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2)u(k_1) \\ &= ie\bar{v}(k_2)(m_e - m_e)u(k_1) = 0 \end{aligned}$$


🚗 同理可验证 μ 子线部分振幅也满足 Ward 恒等式




8.6.2 小节 非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式

 对 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 不变振幅

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2k_1 \cdot p_2} \right) u(k_1)$$

 取复共轭, 利用 $[\bar{u}(p_1) \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu u(k_1)]^* = u^\dagger(k_1) (\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^\rho)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 u(p_1)$

$$= u^\dagger(k_1) \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(k_1) \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu u(p_1)$$

 得 $(i\mathcal{M})^* = ie^2 \varepsilon_\rho(p_2) \varepsilon_\sigma^*(k_2) \bar{u}(k_1) \left(\frac{\gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2k_1 \cdot p_2} \right) u(p_1)$

 非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\rho(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \varepsilon_\sigma^*(k_2) \\ &\quad \times \text{tr} \left[u(p_1) \bar{u}(p_1) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2k_1 \cdot p_2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times u(k_1) \bar{u}(k_1) \left(\frac{\gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2k_1 \cdot p_2} \right) \right] \end{aligned}$$

非极化振幅模方

对光子极化态和费米子螺旋度求和，得


$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{4} (-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma}) \text{tr} \left[(\not{p}_1 + m_e) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2k_1 \cdot p_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times (\not{k}_1 + m_e) \left(\frac{\gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2k_1 \cdot p_2} \right) \right] \\
 &= \frac{e^4}{16} \left[\frac{A}{(k_1 \cdot k_2)^2} + \frac{B+C}{(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1 \cdot p_2)^2} \right]
 \end{aligned}$$


$$A \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

$$B \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

$$C \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

$$D \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$


 A 来自 s 通道 Feynman 图， D 来自 u 通道 Feynman 图

 B 和 C 是两个通道的交叉项

化简 A


 利用 8.2.2 小节提供的**求迹和缩并公式**化简 A ，经过繁琐的计算，得到

$$A = 32(k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_2) - 32m_e^2 p_1 \cdot k_2 - 32m_e^2 p_1 \cdot k_1 + 64m_e^2 k_1 \cdot k_2 + 64m_e^4$$


 用 **Mandelstam 变量** $s = (k_1 + k_2)^2$ 、 $t = (k_1 - p_1)^2$ 和 $u = (k_1 - p_2)^2$ 表达，有

$$k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_e^2), \quad k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - 2m_e^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{t}{2},$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_e^2), \quad s + t + u = 2m_e^2$$

 进而将 A 化为

$$\begin{aligned} A &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(u - m_e^2) + 2m_e^2(t - 2m_e^2) + 4m_e^2(s - m_e^2) + 8m_e^4] \\ &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(2s + t + u) - 2m_e^4] \\ &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2s + 2m_e^4] \\ &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(s - m_e^2) + 4m_e^4] \end{aligned}$$

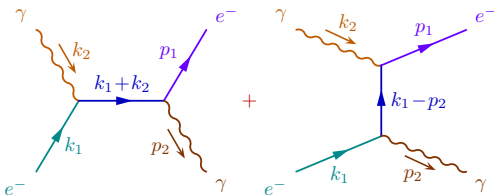
 这里**消去** t ，保留 s 和 u ，毕竟， $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 是 s 和 u 通道的过程

A 与 D 的交叉对称性

容易看出，对 $A = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$ 作动量替换 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$ ，就得到

$$D = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

注意到光子是自身的反粒子，将 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 过程 s 通道 Feynman 图的初态和末态光子相互交叉，就得到 u 通道 Feynman 图，因而动量替换规则是 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$



据此，对上面得到的 $A = 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(s - m_e^2) + 4m_e^4]$ 作替换 $(k_1 + k_2)^2 = s \leftrightarrow u = (k_1 - p_2)^2$ ，就得到 D 的表达式

$$D = 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(u - m_e^2) + 4m_e^4]$$

B 与 C

🍌 对 $B = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$ 作动量替换 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$, 即

$$C = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

🍀 经过复杂的计算, 得到

$$\begin{aligned} B &= -32(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2) - 32(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_1) + 32(p_1 \cdot k_1)(k_1 \cdot k_2) \\ &\quad + 16m_e^2 p_1 \cdot p_2 - 16m_e^2 p_1 \cdot k_2 - 16m_e^2 p_1 \cdot k_1 + 16m_e^2 p_2 \cdot k_2 \\ &\quad + 32m_e^2 p_2 \cdot k_1 - 32m_e^2 k_1 \cdot k_2 - 16m_e^4 \\ &= -8[m_e^2(s - m_e^2) + m_e^2(u - m_e^2) + 4m_e^4] \end{aligned}$$

🍀 作替换 $s \leftrightarrow u$, 就得到

$$C = -8[m_e^2(u - m_e^2) + m_e^2(s - m_e^2) + 4m_e^4] = B$$

🌱 s 与 u 通道的交叉项 B 和 C 恰好相等

非极化振幅模方

 现在重新用**四维动量内积**表达，有

$$A = 32[(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2) + m_e^2 k_1 \cdot k_2 + m_e^4]$$

$$B = C = 16(-m_e^2 k_1 \cdot k_2 + m_e^2 k_1 \cdot p_2 - 2m_e^4)$$

$$D = 32[(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2) - m_e^2 k_1 \cdot p_2 + m_e^4]$$

 代入到**非极化振幅模方**中，得

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{16} \left[\frac{A}{(k_1 \cdot k_2)^2} + \frac{2B}{(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{m_e^2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{m_e^4}{(k_1 \cdot k_2)^2} - \frac{m_e^2}{k_1 \cdot p_2} + \frac{m_e^2}{k_1 \cdot k_2} - \frac{2m_e^4}{(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} - \frac{m_e^2}{k_1 \cdot p_2} + \frac{m_e^4}{(k_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

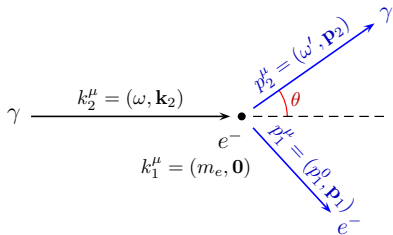
实验室参考系

🍪 考虑**实验室参考系**，**初态电子静止**

🌴 初态光子通过 Compton 散射将能量传递给末态电子，如**右图**所示

🌲 在**自然单位制**中， $\hbar = c = 1$ ，光子的**能量** E 等于**角频率** ω ，即 $E = \hbar\omega = \omega$ ，而**波长** λ 与角频率的关系为 $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$

🌳 因此可用**角频率** ω 和 ω' 分别表示初末态光子的**能量**



实验室参考系

🍪 考虑**实验室参考系**，**初态电子静止**

🌴 初态光子通过 Compton 散射将**能量**传递给末态电子，如**右图**所示

🌲 在**自然单位制**中， $\hbar = c = 1$ ，光子的**能量** E 等于**角频率** ω ，即 $E = \hbar\omega = \omega$ ，而**波长** λ 与角频率的关系为 $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$

🌳 因此可用**角频率** ω 和 ω' 分别表示初末态光子的**能量**

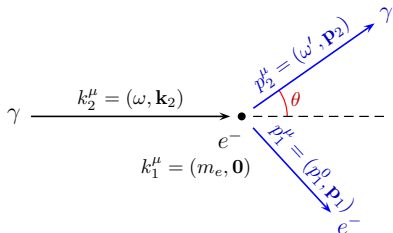
🌾 初末态四维动量表示为

$$k_1^\mu = (m_e, \mathbf{0}), \quad k_2^\mu = (\omega, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu = (p_1^0, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (\omega', \mathbf{p}_2)$$

🌽 其中 $\omega = |\mathbf{k}_2|$ ， $\omega' = |\mathbf{p}_2|$ ，利用**质壳条件**和**能量守恒**推出

$$\begin{aligned} m_e^2 &= p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_2)^2 = k_1^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_2) - 2k_2 \cdot p_2 \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$$(p_1^0)^2 = m_e^2 + |\mathbf{p}_1|^2 = m_e^2 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2|^2 = m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta$$



实验室系运动学

🍩 于是得到 $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$ 和 $p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta}$

🍏 由 $\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \omega'}{\omega'\omega} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e}$ 得到出射光子与入射光子的**波长之差**

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{2\pi}{m_e} (1 - \cos\theta)$$

🍉 这就是 **Arthur Compton** 得到的关系式

实验室系运动学

🍩 于是得到 $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$ 和 $p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta}$

🍏 由 $\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \omega'}{\omega'\omega} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e}$ 得到出射光子与入射光子的**波长之差**

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{2\pi}{m_e} (1 - \cos\theta)$$

🍉 这就是 **Arthur Compton** 得到的关系式

🍌 用**入射光子角频率** ω 和**散射角** θ 将**出射光子角频率**表达成

$$\omega' = \left(\frac{1 - \cos\theta}{m_e} + \frac{1}{\omega} \right)^{-1} = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m_e} (1 - \cos\theta)}$$

🍇 再利用 $k_1 \cdot k_2 = m_e\omega$ 和 $k_1 \cdot p_2 = m_e\omega'$ ，将**非极化振幅模方**化为

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m_e \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + m_e^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2m_e \frac{1 - \cos\theta}{m_e} + m_e^2 \frac{(1 - \cos\theta)^2}{m_e^2} \right] = 2e^4 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) \end{aligned}$$

末态相空间积分

对末态两体不变相空间积分，得

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\
 &= \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(m_e + \omega - p_1^0 - \omega') \\
 &= \int \frac{d\phi d\cos\theta d\omega' \omega'^2}{16\pi^2 \omega' p_1^0} \delta\left(m_e + \omega - \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} - \omega'\right) \\
 &= \int \frac{d\cos\theta \omega'}{8\pi p_1^0} \left| \frac{\partial(\sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} + \omega')}{\partial\omega'} \right|^{-1} \\
 &= \int \frac{d\cos\theta \omega'}{8\pi p_1^0} \left| \frac{2\omega' - 2\omega \cos\theta}{2p_1^0} + 1 \right|^{-1} = \int \frac{d\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{\omega' + p_1^0 - \omega \cos\theta} \\
 &= \int \frac{d\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{m_e + \omega(1 - \cos\theta)} = \int \frac{d\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{m_e + m_e(\omega - \omega')/\omega'} \\
 &= \int d\cos\theta \frac{\omega'^2}{8\pi m_e \omega}
 \end{aligned}$$

倒数第三步用到**能量守恒关系** $p_1^0 + \omega' = m_e + \omega$

倒数第二步用到 $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$

Klein-Nishina 公式

🍔 散射截面表达为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{1}{4k_1^0 k_2^0 |\mathbf{k}_2|/k_2^0} \int d\cos\theta \frac{\omega'^2}{8\pi m_e \omega} \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \int d\cos\theta \frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2 \omega^2} \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$

🍌 微分散射截面是

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2 \omega^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{2e^4 \omega'^2}{32\pi m_e^2 \omega^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2 \omega'^2}{m_e^2 \omega^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right)\end{aligned}$$

🍏 上式称为 **Klein-Nishina 公式**，它是 **Thomson 微分截面**

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2\theta) \text{ 的 QED 修正}$$



Oskar Benjamin Klein
(1894–1977)



仁科芳雄 (Yoshio Nishina)
(1890–1951)

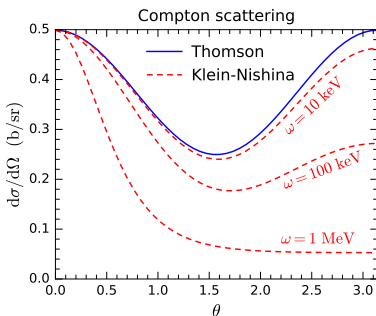
非相对论近似

🍷 在非相对论近似下，入射光子能量 $\omega \simeq 0$ ，

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m_e}(1 - \cos\theta)} \simeq 1$$

🍓 从而得到

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) \\ &\simeq \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2\theta) \end{aligned}$$



🍓 此时 Klein-Nishina 公式退化到 Thomson 微分截面公式

🍌 散射截面近似为 Thomson 散射截面

$$\sigma \simeq \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2\theta) = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}$$

8.6.3 小节 高能行为和极化振幅

🍌 下面讨论 Compton 散射的高能极限

🍏 在质心系中，动量如右图所示

🍒 散射角 θ 定义为初末态电子动量 \mathbf{k}_1 与 \mathbf{p}_1 方向之间的夹角

🍏 根据 6.5.3 小节知识，粒子能量为

$$k_1^0 = p_1^0 = \frac{s + m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv E_e$$

$$k_2^0 = p_2^0 = \frac{s - m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv \omega$$

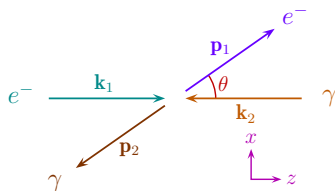
🍌 动量大小为 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \omega$

🍌 于是得到


$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = k_1^0 k_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \omega(E_e + \omega)$$

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = k_1^0 p_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \omega(E_e + \omega \cos \theta)$$


$$\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2} = \frac{E_e + \omega \cos \theta}{E_e + \omega}$$




高能极限

 在**高能极限**下, $\sqrt{s} \gg m_e$, 或者说, $\omega \gg m_e$, 因而可以**忽略电子质量**, 得到

$$E_e \simeq \omega \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}$$

 利用上述 $\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{E_e + \omega \cos \theta}{E_e + \omega}$, 将**非极化振幅模方**近似为

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right] \\ &\simeq 2e^4 \left(\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} \right) = 2e^4 \left(\frac{E_e + \omega \cos \theta}{E_e + \omega} + \frac{E_e + \omega}{E_e + \omega \cos \theta} \right) \\ &\simeq 4e^4 \left(\frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

 对于**向后**散射, $\theta = \pi$, 而 $\cos \theta = -1$, 上式**发散**, **奇性**来自圆括号中的第二项

避免发散

🥑 若要**避免发散**，则在奇性项分母处**不能忽略** m_e

🥥 将 E_e 展开到 m_e^2/ω^2 阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2 + \omega^2} = \omega \sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega \left(1 + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$$

🥑 奇性项分母化为 $E_e + \omega \cos \theta \simeq \omega \left(1 + \cos \theta + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$

避免发散

🍌 若要**避免发散**，则在奇性项分母处**不能忽略** m_e

🥥 将 E_e 展开到 m_e^2/ω^2 阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2 + \omega^2} = \omega \sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega \left(1 + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$$

🍌 奇性项分母化为 $E_e + \omega \cos \theta \simeq \omega \left(1 + \cos \theta + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$

🍌 因此，**不发散**的表达式是

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \simeq 4e^4 \left[\frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos \theta + m_e^2/(2\omega^2)} \right]$$

🍌 微分截面为


$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \simeq \frac{2\pi}{64\pi^2} \frac{1}{2\omega^2} \frac{\omega}{2\omega} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \simeq \frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2} \left[\frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos \theta + m_e^2/(2\omega^2)} \right]$$

🍌 当 $\omega \gg m_e$ 时，微分截面虽然在 $\theta = \pi$ 处**没有发散**，但**数值非常大**

极化振幅

 接下来分析 **Compton 散射** 的极化振幅

 **不变振幅**按 Feynman 图分解为 **s** 和 **u** 通道贡献的两个部分, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$

 将**螺旋度依赖**显明写出来, 两个通道的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = -\frac{e^2}{s - m_e^2} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

$$\simeq -\frac{e^2}{4\omega^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) (\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

$$\mathcal{M}_u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = -\frac{e^2}{u - m_e^2} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

$$\simeq \frac{e^2}{4\omega^2 c^2_{\theta/2}} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2) (\not{k}_1 - \not{p}_2) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

 第二步在**高能极限**下忽略电子质量, 并利用了

$$s - m_e^2 = (k_1 + k_2)^2 - m_e^2 = 2k_1 \cdot k_2 = 2\omega(E_e + \omega) \simeq 4\omega^2$$

$$u - m_e^2 = (k_1 - p_2)^2 - m_e^2 = -2k_1 \cdot p_2 = -2\omega(E_e + \omega \cos \theta) \simeq -4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

奇性分析

- 👉 容易看出, $\theta = \pi$ 处的奇性来自 u 通道振幅 $\mathcal{M}_u \propto (2c_{\theta/2}^2)^{-1}$
- 🏀 不过, 因子 $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1 + \cos\theta)^{-1}$ 在模方 $|\mathcal{M}_u|^2$ 中变成 $(1 + \cos\theta)^{-2}$
- 🏈 这样的奇性看起来强于非极化振幅模方 $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ 中 $\sim (1 + \cos\theta)^{-1}$ 的奇性
- 🏐 通过下面的计算将看到奇性是如何减弱的

奇性分析

- 容易看出, $\theta = \pi$ 处的奇性来自 u 通道振幅 $\mathcal{M}_u \propto (2c_{\theta/2}^2)^{-1}$
- 不过, 因子 $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1 + \cos \theta)^{-1}$ 在模方 $|\mathcal{M}_u|^2$ 中变成 $(1 + \cos \theta)^{-2}$
- 这样的奇性看起来强于非极化振幅模方 $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ 中 $\sim (1 + \cos \theta)^{-1}$ 的奇性
- 通过下面的计算将看到奇性是如何减弱的

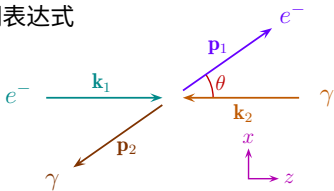
为计算极化振幅, 先导出振幅中各个因子的显明表达式

在高能极限下, 初末态电子四维动量近似为

$$k_1^\mu \simeq \omega(1, 0, 0, 1), \quad p_1^\mu \simeq \omega(1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

参照 8.2.4 小节, 相应的螺旋态为

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$



电子的平面波旋量系数

 根据 8.3 节，高能极限下的平面波旋量系数为


$$u(\mathbf{k}_1, +) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{k}_1) \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{k}_1, -) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{k}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(\mathbf{p}_1, +) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}_1, -) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 $u(\mathbf{p}_1, \lambda'_1)$ 的 Dirac 共轭是

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}_1, +) &= u^\dagger(\mathbf{p}_1, +)\gamma^0 \simeq \sqrt{2\omega} \left(0 \quad \xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) \right) \begin{pmatrix} & 1 \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2\omega} \left(\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) \quad 0 \right) \simeq \sqrt{2\omega} \left(c_{\theta/2} \quad s_{\theta/2} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \bar{u}(\mathbf{p}_1, -) &\simeq \sqrt{2\omega} \left(0 \quad \xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1) \right) \simeq \sqrt{2\omega} \left(0 \quad 0 \quad -s_{\theta/2} \quad c_{\theta/2} \right) \end{aligned}$$

光子的极化矢量

 初末态光子的四维动量是 $k_2^\mu = \omega(1, 0, 0, -1)$ 和 $p_2^\mu = \omega(1, -s\theta, 0, -c\theta)$

 根据极化矢量表达式


$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} (0, p^1 p^3 - i p^2 |\mathbf{p}|, p^2 p^3 + i p^1 |\mathbf{p}|, -|\mathbf{p}_T|^2)$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} (0, p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}|, p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}|, -|\mathbf{p}_T|^2)$$

 求得末态光子极化矢量为

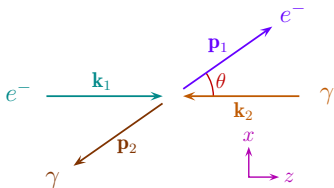
$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, c\theta, -i, -s\theta)$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, c\theta, i, -s\theta)$$


 与动量一样，末态光子极化矢量的空间分量转动的角度为 θ ，这是自旋为 1 的体现

 令 $\theta = 0$ ，即得初态光子极化矢量

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0), \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0)$$



初态极化矢量缩并

 初态极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) &= \gamma^\mu \epsilon_\mu(\mathbf{k}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^1 - i\gamma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & -\sigma^1 + i\sigma^2 \\ \sigma^1 - i\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) &= \gamma^\mu \epsilon_\mu(\mathbf{k}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma^1 - i\gamma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & -\sigma^1 - i\sigma^2 \\ \sigma^1 + i\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 0 & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

末态极化矢量缩并

末态极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) &= \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta \gamma^1 - i\gamma^2 + s_\theta \gamma^3) \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} & s_{\theta/2} c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 & \\ & s_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2} c_{\theta/2} & \\ -s_{\theta/2} c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 & & \\ -s_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2} c_{\theta/2} & & \end{pmatrix} \\ \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) &= \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta \gamma^1 + i\gamma^2 + s_\theta \gamma^3) \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} & s_{\theta/2} c_{\theta/2} & s_{\theta/2}^2 & \\ & -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2} c_{\theta/2} & \\ -s_{\theta/2} c_{\theta/2} & -s_{\theta/2}^2 & & \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2} c_{\theta/2} & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

s 通道极化振幅计算之一

第一步计算 s 通道极化振幅， \mathcal{M}_s 中的因子 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，当末态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献为零

$(k_1 + k_2)^\mu \simeq (2\omega, 0, 0, 0)$ 与 Dirac 矩阵的缩并表达成

$$\not{k}_1 + \not{k}_2 = (k_1 + k_2)_\mu \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \simeq 2\omega \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = 2\omega \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$ 后面，得


$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) (k_1 + k_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) (k_1 + k_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{\theta/2} & s_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) (k_1 + k_2) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) (k_1 + k_2) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


s 通道极化振幅计算之二

 \mathcal{M}_s 中最后两个因子 $\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 当初态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献也为零

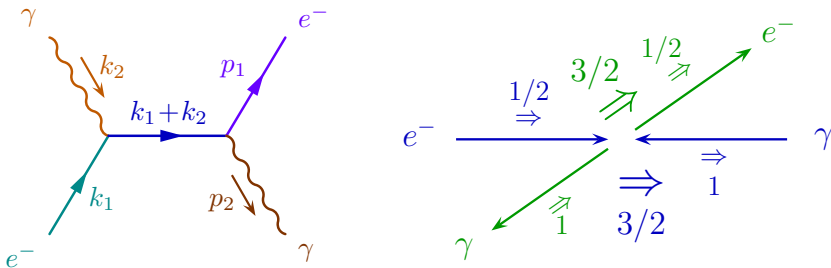
 将这些因子乘起来，就得到 \mathcal{M}_s 的计算结果

零贡献原因


🍌 以上结果表明，无论是初态还是末态，只要电子与光子具有相反螺旋度，对 s 通道振幅的贡献就是零

🏄 这是因为螺旋度相反的电子和光子组成一个角动量为 $3/2$ 的系统，而 s 通道电子传播子对应于一个自旋为 $1/2$ 的类时虚粒子，违背角动量守恒

🏂 如果不忽略电子质量，则会出现受到螺旋度压低而非零贡献




s 通道极化振幅计算之三

 \mathcal{M}_s 的初末态平面波旋量系数之间夹着 3 个 Dirac 矩阵

 由 $\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$ 推断螺旋度相反的初末态电子在高能极限下没有


贡献，即 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$

 对于初末态电子螺旋度相同的情况，高能极限下的非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)(\not{k}_1 + \not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$


$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)(\not{k}_1 + \not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

s 通道极化振幅计算之三

 \mathcal{M}_s 的初末态平面波旋量系数之间夹着 **3 个 Dirac 矩阵**


 由 $\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$ 推断**螺旋度相反**的初末态电子在高能极限下**没有**

贡献, 即 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$

 对于初末态电子**螺旋度相同**的情况, 高能极限下的**非零结果**只有


$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)(\not{k}_1 + \not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$


$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)(\not{k}_1 + \not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

 相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(+, +, +, +) = \mathcal{M}_s(-, -, -, -) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

 **s 通道**贡献只来自四个粒子**全部右旋极化**和**全部左旋极化**的螺旋度构型

 这两种构型在宇称变换下相互转换

 由于**宇称守恒**, 它们的振幅至多相差一个相位因子, 此处**相位因子**为 1

u 通道极化振幅计算之一


 第二步计算 u 通道极化振幅, \mathcal{M}_u 中因子 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $(k_1 - p_2)^\mu \simeq \omega(0, s_\theta, 0, 1 + c_\theta) = 2\omega(0, s_{\theta/2}c_{\theta/2}, 0, c_{\theta/2}^2)$ 与 Dirac 矩阵的缩并是

$$\not{k}_1 - \not{p}_2 = (k_1 - p_2)_\mu \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \simeq 2\omega \begin{pmatrix} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 - c_{\theta/2}^2\sigma^3 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 + c_{\theta/2}^2\sigma^3 & \end{pmatrix}$$

$$= 2\omega \begin{pmatrix} & -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 & \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 & \end{pmatrix}$$

u 通道极化振幅计算之二

🍷 将 $k_1 - \not{p}_2$ 乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$ 后面, 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) (k_1 - \not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) (k_1 - \not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} & -s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) (k_1 - \not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 & c_{\theta/2}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) (k_1 - \not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{\theta/2}^3 & s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 \end{pmatrix}$$

🍷 M_u 中最后两个因子 $\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ 的表达式是


$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2} c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2} c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

u 通道极化振幅计算之三

 同样，螺旋度相反的初末态电子没有贡献，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$$

 对于初末态电子螺旋度相同的情况，高能极限下的非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2}$$


$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3$$


$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3$$

$$\mathcal{M}_u(+, +, +, +) = \mathcal{M}_u(-, -, -, -) \simeq -\frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}}$$

$$\mathcal{M}_u(+, -, +, -) = \mathcal{M}_u(-, +, -, +) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

 $\theta = \pi$ 处的奇性来自全部粒子螺旋度相同的 u 通道振幅 $\mathcal{M}_u(\pm, \pm, \pm, \pm)$

 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \pm)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \pm)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \pm)u(\mathbf{k}_1, \pm)$ 包含一个 $c_{\theta/2}$ 因子

 将振幅中原本 $\sim c_{\theta/2}^{-2}$ 的奇性减弱成 $\sim c_{\theta/2}^{-1}$ 的奇性

非极化振幅模方

 将 s 和 u 通道的贡献加起来, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$, 得到**非零极化振幅**

$$\mathcal{M}(+, +, +, +) = \mathcal{M}(-, -, -, -) \simeq -2e^2 c_{\theta/2} - \frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}} = -\frac{2e^2}{c_{\theta/2}},$$

$$\mathcal{M}(+, -, +, -) = \mathcal{M}(-, +, -, +) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

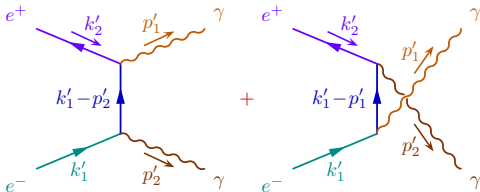
 于是, **非极化振幅模方**为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{1}{4} [2|\mathcal{M}(+, -, +, -)|^2 + 2|\mathcal{M}(+, +, +, +)|^2] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(4e^4 c_{\theta/2}^2 + \frac{4e^4}{c_{\theta/2}^2} \right) = 4e^4 \left(\frac{1 + c_{\theta}}{4} + \frac{1}{1 + c_{\theta}} \right) \end{aligned}$$

 与前面通过**求迹运算**得到的表达式**一致**

8.6.4 小节 正负电子湮灭到双光子

🍦 在 QED 领头阶，正负电子湮灭到双光子过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 的 Feynman 图如右上图所示



8.6.4 小节 正负电子湮灭到双光子

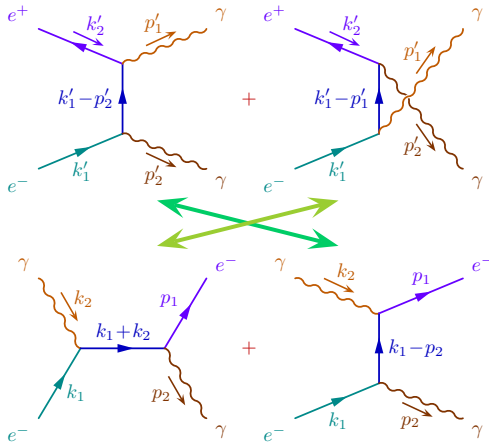
🍦 在 QED 领头阶，**正负电子湮灭到双光子**过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 的 Feynman 图如**右上图**所示

🎯 它与 **Compton 散射**过程 (右下图) 具有**交叉对称性**

🦋 设初态 e^- 和 e^+ 的动量为 k'_1 和 k'_2 ，末态两个光子的动量为 p'_1 和 p'_2

🎯 将 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 交叉成 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 时，需要把**初态 γ** (动量为 k_2) 换成**末态 γ** (动量为 p'_1)，同时把**末态 e^-** (动量为 p_1) 换成**初态 e^+** (动量为 k'_2)，引起动量替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow -k_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow p_2'^\mu$$





非极化振幅模方

 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 非极化振幅模方为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right]$$


 应用上面的替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow p_2'^\mu$

 由于只交叉一个费米子，需要移除一个整体负号

 从而得到 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 非极化振幅模方

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{k_1' \cdot p_2'}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{k_1' \cdot p_1'}{k_1' \cdot p_2'} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{1}{k_1' \cdot p_2'} \right) - m_e^4 \left(\frac{1}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{1}{k_1' \cdot p_2'} \right)^2 \right]$$

质心系中的微分散射截面

 在质心系中，记 \mathbf{k}'_1 与 \mathbf{p}'_1 之间的夹角为 θ ， $\beta_e = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ ，则

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 - \beta_e \cos \theta)$$


$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 + \beta_e \cos \theta)$$

$$\frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} = \frac{1 + \beta_e \cos \theta}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1 - \beta_e \cos \theta}{1 + \beta_e \cos \theta} = \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} = \frac{4}{s} \left(\frac{1}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1}{1 + \beta_e \cos \theta} \right) = \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)}$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 32\pi^2 \alpha^2 \left[\frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + 2m_e^2 \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - m_e^4 \frac{64}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

质心系中的微分散射截面

 在质心系中, 记 \mathbf{k}'_1 与 \mathbf{p}'_1 之间的夹角为 θ , $\beta_e = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$, 则

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 - \beta_e \cos \theta)$$

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 + \beta_e \cos \theta)$$


$$\frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} = \frac{1 + \beta_e \cos \theta}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1 - \beta_e \cos \theta}{1 + \beta_e \cos \theta} = \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} = \frac{4}{s} \left(\frac{1}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1}{1 + \beta_e \cos \theta} \right) = \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)}$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 32\pi^2 \alpha^2 \left[\frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + 2m_e^2 \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - m_e^4 \frac{64}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s \beta_e} = \frac{\alpha^2}{s \beta_e} \left[\frac{1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + \frac{8m_e^2}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

 对上式积分计算**散射截面** σ 时, 应当注意此过程的**末态对称性因子** $S = 2$

与实验数据对比

🔍 1983 年, PETRA 对撞机上 **JADE 探测器** 测量了质心能 $\sqrt{s} = 14, 22, 34.6$ GeV 的 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 微分散射截面, 数据如下图所示

🧩 将以上 **QED 领头阶预言值** 用实线画在图上, 与实验数据基本吻合。

