

量子场论

第 8 章 量子电动力学

8.3 节至 8.5 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 3 月 10 日



8.3 节 手征性与螺旋度



本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系




在 **Weyl 表象** 中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ,


$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$




它们是**厄米**的, 而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, **正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$, 由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

8.3 节 手征性与螺旋度


 本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

 在 **Weyl 表象** 中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

 它们是**厄米**的, 而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, **正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$, 由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$


 将 **Dirac 旋量场** ψ 分解为**左手 Weyl 旋量场** η_L 和**右手 Weyl 旋量场** η_R

 **左手**的四分量**旋量场**定义为

$$\psi_L \equiv P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

 **右手**的四分量**旋量场**定义为

$$\psi_R \equiv P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_R \end{pmatrix}$$

 我们称**左手旋量场**和**右手旋量场**具有**相反的手征性**, 而**左右手投影矩阵**正好挑选出具有**相应手征性**的 Weyl 旋量场分量

左右手投影分解

🔨 将 $1 \pm \gamma^5$ 的简化地写成 $1 \pm \gamma^5$ ，左手旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

📖 同理得右手旋量场 ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

左右手投影分解

🔧 将 $1 \pm \gamma^5$ 的简化地写成 $1 \pm \gamma^5$ ，左手旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5)\psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

📖 同理得右手旋量场 ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

📌 对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解，得

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(P_L + P_R)\psi = \bar{\psi}(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi + \bar{\psi}P_L\gamma^\mu P_R\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_L + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_R$$

包含偶数 (奇数) 个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反 (相同) 的旋量场

📄 拉氏量中的 Dirac 旋量场质量项分解为 $-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$

📖 把上式看作微扰，那么 质量 m 将左手旋量场 ψ_L 与右手旋量场 ψ_R 耦合起来

高能极限

在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_{\mathbf{p}} \simeq |\mathbf{p}|$

故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ ， $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} - |\mathbf{p}|} \simeq 0$


按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

高能极限


 在**高能极限**下，**忽略旋量场的质量** m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$ ， $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

 按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有


$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$


$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

 此时，**螺旋度不同的** u 和 v 显示出**不同手征性**

 $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是**右手**的， $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是**左手**的

 可见，高能极限下**手征性等价于螺旋度**

 注意， $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与**螺旋度为 λ 的正费米子**相关

 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与**螺旋度为 λ 的反费米子**相关

旋量系数的左右手投影

 由于高能极限下 $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的， $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的

 17 用投影矩阵作用，得

$$u_L(\mathbf{p}, -) = P_L u(\mathbf{p}, -) \simeq u(\mathbf{p}, -), \quad u_R(\mathbf{p}, +) = P_R u(\mathbf{p}, +) \simeq u(\mathbf{p}, +)$$

$$u_L(\mathbf{p}, +) = P_L u(\mathbf{p}, +) \simeq 0, \quad u_R(\mathbf{p}, -) = P_R u(\mathbf{p}, -) \simeq 0$$

$$v_L(\mathbf{p}, +) = P_L v(\mathbf{p}, +) \simeq v(\mathbf{p}, +), \quad v_R(\mathbf{p}, -) = P_R v(\mathbf{p}, -) \simeq v(\mathbf{p}, -)$$

$$v_L(\mathbf{p}, -) = P_L v(\mathbf{p}, -) \simeq 0, \quad v_R(\mathbf{p}, +) = P_R v(\mathbf{p}, +) \simeq 0$$

 相应的 Dirac 共轭满足


$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, -), \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, +)$$

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq 0, \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq 0$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq \bar{v}(\mathbf{p}, +), \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq \bar{v}(\mathbf{p}, -)$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq 0, \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq 0$$

高能极限下的手征旋量场

 将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 平面波解上，得到**手征旋量场**的平面波解


$$\psi_L(x) = P_L \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$


$$\psi_R(x) = P_R \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[u(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

 相应的 Dirac 共轭为


$$\bar{\psi}_L(x) = [\psi_L(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} \right]$$

$$\bar{\psi}_R(x) = [\psi_R(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} \right]$$


 在高能极限下，忽略质量，那么，


 **左手旋量场** $\psi_L(x)$ 描述**左旋极化的正费米子**和**右旋极化的反费米子**

 **右手旋量场** $\psi_R(x)$ 描述**右旋极化的正费米子**和**左旋极化的反费米子**

 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 成为两个**相互独立**的场

标准模型中的中微子


 作为对**高能极限**的**微扰**，**质量项** $-m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$ 耦合着**左旋极化** ($\lambda = -$) 与**右旋极化** ($\lambda = +$) 的**正费米子**，也耦合着**左旋极化**与**右旋极化**的**反费米子**

 所以我们在 8.2.4 小节说 “**质量可以翻转螺旋度**”

 在**标准模型**中，每一种**无质量中微子**由一个**左手旋量场**


$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p},-} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p},+}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

描述

 相应地，以 $a_{\mathbf{p},-}^\dagger$ **算符**产生的粒子是**左旋正中微子**，以 $b_{\mathbf{p},+}^\dagger$ **算符**产生的粒子是**右旋反中微子**，它们互为**正反粒子**

 标准模型中**没有**由**右手旋量场**描述的中微子

旋量系数的左右手投影


 在**高能极限**下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$


$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

 此时两个旋量系数之间夹着**零**个 Dirac 矩阵，**不能耦合相同螺旋度**，只能耦合**相反螺旋度**，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

旋量系数的左右手投影


 在**高能极限**下，由投影矩阵性质推出


$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

 此时两个旋量系数之间夹着**零个** Dirac 矩阵，**不能耦合相同螺旋度**，只能耦合**相反螺旋度**，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

 一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

🔗 对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

🔗 对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

🔗 容易看出，在**高能极限**下，**忽略质量**，只有 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 且 $\lambda'_1 = -\lambda'_2$ 的螺旋度构型对 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 极化振幅

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = \frac{e^2}{E_{\text{CM}}^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$$

的贡献**非零**，与上一小节的计算结果一致

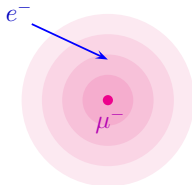
🔗 如果**不忽略质量**，则其它螺旋度构型的**贡献正比于质量**，表现出**螺旋度压低**效应

8.4 节 Coulomb 散射

8.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

🔍 现在讨论与 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程

🔗 这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射



Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

8.4 节 Coulomb 散射

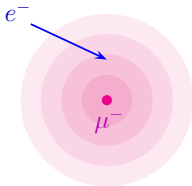
8.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

🔦 现在讨论与 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程

💡 这个过程对应于电子受 μ^- 子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射

🕯️ 它的领头阶费曼图与 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 类似，但线的方向不同，相应的不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \\
 &= \bar{u}(p'_1) (ie\gamma^\mu) u(k'_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q'^2} \bar{u}(p'_2) (ie\gamma^\nu) u(k'_2) \\
 &= \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(k'_2)
 \end{aligned}$$




Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

💡 这里将旋量系数 u 和 \bar{u} 简写成在壳四维动量的函数，且没有写出对螺旋度的依赖

💡 虚光子的四维动量 $q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu - k_2'^\mu$

非极化振幅模方

 $i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2)$ 的复共轭是

$$(i\mathcal{M})^* = -\frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2)$$

 非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2) \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \text{tr}[u(p'_1)\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1)\bar{u}(k'_1)\gamma^\nu] \text{tr}[u(p'_2)\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2)\bar{u}(k'_2)\gamma_\nu] \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu] \end{aligned}$$




\sum_{spins} 表示对自旋求和，即对螺旋度求和

交叉对称性


 比较 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭与 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 散射的非极化振幅模方：

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu]$$

 容易看出， $\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}|^2}$ 相当于对 $\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2}$ 作**动量替换**

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu$ ，这种关系称为**交叉对称性** (crossing symmetry)

交叉对称性

🍷 比较 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭与 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 散射的非极化振幅模方：

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu]$$

📦 容易看出， $\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}|^2}$ 相当于对 $\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2}$ 作**动量替换**

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

✉ $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu$ ，这种关系称为**交叉对称性** (crossing symmetry)


📖 通过这样的**动量替换**，从 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的计算结果

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + 2m_e^2 m_\mu^2]$$

📖 直接得到 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 非极化振幅模方的表达式

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q'^2)^2} [(k'_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot k'_2) + (k'_1 \cdot k'_2)(p'_1 \cdot p'_2) - m_e^2(p'_2 \cdot k'_2) - m_\mu^2(k'_1 \cdot p'_1) + 2m_e^2 m_\mu^2]$$

质心系


 在**质心系**中，根据 6.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子动量满足

$$|\mathbf{k}'_1| = |\mathbf{k}'_2| = |\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_e^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \equiv Q$$

 也就是说，初末态四个粒子的**动量大小**都是 Q ，相应的能量是

$$k_1'^0 = p_1'^0 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_e, \quad k_2'^0 = p_2'^0 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_\mu$$

 E_e 是初末态**电子能量**， E_μ 是初末态 μ **子能量**

 设**散射角** θ 为 \mathbf{k}'_1 与 \mathbf{p}'_1 方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$k'_1 \cdot p'_1 = k'_1{}^0 p'_1{}^0 - |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e^2 - Q^2 \cos \theta$$

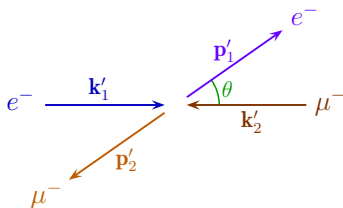
$$k'_1 \cdot p'_2 = k'_1{}^0 p'_2{}^0 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta = E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$k'_2 \cdot p'_2 = k'_2{}^0 p'_2{}^0 - |\mathbf{k}'_2| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta = E_\mu^2 - Q^2 \cos \theta$$


$$k'_2 \cdot p'_1 = k'_2{}^0 p'_1{}^0 + |\mathbf{k}'_2| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$k'_1 \cdot k'_2 = k'_1{}^0 k'_2{}^0 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{k}'_2| = E_e E_\mu + Q^2$$

$$p'_1 \cdot p'_2 = p'_1{}^0 p'_2{}^0 + |\mathbf{p}'_1| |\mathbf{p}'_2| = E_e E_\mu + Q^2$$




质心系中的非极化振幅模方

 虚光子的四维动量 q'^{μ} 满足


$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

 对任意 $\theta > 0$, 有 $q'^2 < 0$, 即虚光子是类空的

质心系中的非极化振幅模方


 虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

 对任意 $\theta > 0$, 有 $q'^2 < 0$, 即虚光子是类空的

 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1 - \cos \theta)^2} \left[(E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta)^2 + (E_e E_\mu - Q^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - m_e^2 (E_\mu^2 - Q^2 \cos \theta) - m_\mu^2 (E_e^2 - Q^2 \cos \theta) + 2m_e^2 m_\mu^2 \right] \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} \left\{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 + Q^4(1 + \cos^2 \theta) \right. \\ &\quad \left. + Q^2 [2E_e E_\mu(1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta] \right\} \end{aligned}$$

 微分截面的入射流因子是

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = E_e E_\mu \left(\frac{Q}{E_e} + \frac{Q}{E_\mu} \right) = E_e E_\mu \frac{Q(E_\mu + E_e)}{E_e E_\mu} = Q E_{CM}$$

质心系中的微分截面

🔑 于是, $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 微分截面为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{Q E_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos\theta)^2} \left\{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \right. \\ &\quad \left. + Q^4 (1 + \cos^2\theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos\theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos\theta] \right\} \end{aligned}$$

📡 由于分母上的 $(1 - \cos\theta)^2$ 因子, 微分截面对于向前散射 ($\theta \rightarrow 0$) 具有奇性

📡 这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

质心系中的微分截面

于是, $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 微分截面为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{Q E_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos\theta)^2} \left\{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \right. \\ &\quad \left. + Q^4 (1 + \cos^2\theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos\theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos\theta] \right\} \end{aligned}$$

由于分母上的 $(1 - \cos\theta)^2$ 因子, 微分截面对于向前散射 ($\theta \rightarrow 0$) 具有奇性

这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

当散射角 θ 很小时, $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \mathcal{O}(\theta^4)$, 有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta \rightarrow 0$$

$(1 - \cos\theta)^2$ 因子来源于光子传播子贡献的 $q'^2 = -2Q^2(1 - \cos\theta)$

故奇性来自接近质壳的虚光子 ($q'^2 \simeq 0$)

微分截面的近似

 当 $E_{CM} \gg m_e$ 时，**忽略电子质量**，有 $E_e \simeq Q \simeq \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$ ，微分截面化为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^2 (1 - \cos\theta)^2} [2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2 \cos^2\theta + 2QE_\mu \\ &\quad + 2QE_\mu \cos\theta + m_\mu^2 \cos\theta] \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^2 (1 - \cos\theta)^2} [(E_\mu + Q)^2 + (E_\mu + Q \cos\theta)^2 - m_\mu^2 (1 - \cos\theta)] \end{aligned}$$

 在**高能极限** ($E_{CM} \gg m_\mu > m_e$) 下， $Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{CM}/2$ ，则微分截面变成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2 [4 + (1 + \cos\theta)^2]}{2E_{CM}^2 (1 - \cos\theta)^2} = \frac{\alpha^2 [1 + \cos^4(\theta/2)]}{2E_{CM}^2 \sin^4(\theta/2)}$$

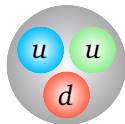
 第二步用到**三角函数倍角公式** $1 + \cos\theta = 2 \cos^2(\theta/2)$ 和 $1 - \cos\theta = 2 \sin^2(\theta/2)$

8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

🥁 质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3 \text{ MeV}$

🌐 它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

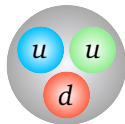
🖱️ 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$



8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

🥁 **质子** (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的**稳定费米子**，质量为 $m_p = 938.3 \text{ MeV}$

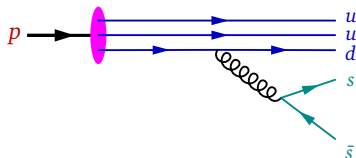
🌐 它是一种**复合粒子**，具有内部结构，可以看作由 **2 个 u 夸克** 和 **1 个 d 夸克** 组成的束缚态



🖱️ 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的**电荷之和**，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$


📖 像这样**贡献**到质子的**相加性量子数** (如电荷) 的夸克称为**价夸克** (valence quark)

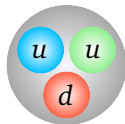
🖨️ 由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对**正反夸克 $q\bar{q}$** ， q 与 \bar{q} 携带的相加性量子数正好**相互抵消**，这样的夸克称为**海夸克** (sea quark)




8.4.2 小节 $e^- p$ 散射


 **质子** (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的**稳定费米子**，质量为 $m_p = 938.3$ MeV


 它是一种**复合粒子**，具有内部结构，可以看作由 **2 个 u 夸克** 和 **1 个 d 夸克** 组成的束缚态

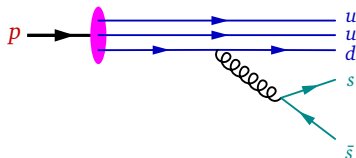



 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的**电荷之和**，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$


 像这样**贡献**到质子的**相加性量子数** (如电荷) 的夸克称为**价夸克** (valence quark)

 由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对**正反夸克 $q\bar{q}$** ， q 与 \bar{q} 携带的相加性量子数正好**相互抵消**，这样的夸克称为**海夸克** (sea quark)

 一个相互作用过程通常涉及一个**典型的能量** 或**动量大小**，比如质心能 E_{CM} 或上一小节用到的动量 Q ，这样的量称为**能标** (energy scale)



 当**能标远小于 m_p** 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的**点粒子**一样

 此时可以用 **Dirac 旋量场**来描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 **QED 相互作用顶点**

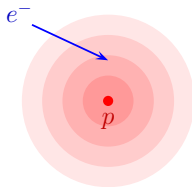
Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 **Coulomb 散射** $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p

从而可取 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的

初末态电子运动速率相同，记为 v ，运动方向相差散射角 θ



Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 **Coulomb 散射** $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p

从而可取 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的

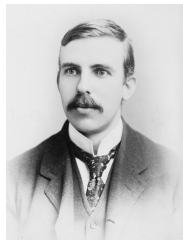
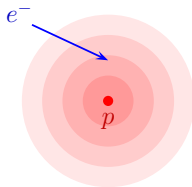
初末态电子运动速率相同，记为 v ，运动方向相差散射角 θ

那么，Coulomb 力引起的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

这个式子就是 **Rutherford 公式**

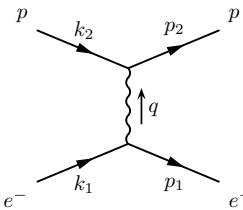
可见， $\theta \rightarrow 0$ 时 $d\sigma/d\Omega \propto \theta^{-4}$ 的奇性在经典物理层面就已经出现了



Ernest Rutherford
(1871–1937)

$e^- p$ Coulomb 散射

在 QED 中, $e^- p \rightarrow e^- p$ 散射过程的领头阶不变振幅为



$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p_1) (ie\gamma^\mu) u(k_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2) (-ie\gamma^\nu) u(k_2)$$

$$= -\frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(k_2)$$

相比于 $e^- \mu^-$ 散射, 这个结果多出一个负号, 这是因为 $Q_p = -Q_\mu = +1$

由于这里只有一幅 Feynman 图, 这个符号差异不会影响振幅模方

类比于 $e^- \mu^-$ 散射, $e^- p \rightarrow e^- p$ 非极化振幅模方为

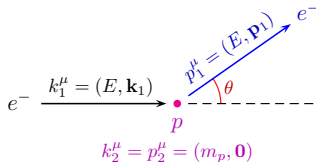
$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2) - m_e^2(p_2 \cdot k_2) - m_p^2(k_1 \cdot p_1) + 2m_e^2 m_p^2]$$

运动学

🔔 下面在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导

Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

🏠 如右图所示，此时散射前后的质子^{是静止的}，
初末态电子的能量都是 E ，四维动量分解为



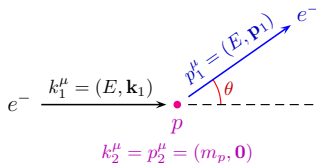
$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

运动学

🔔 下面在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导

Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

🏠 如右图所示，此时散射前后的质子^{是静止的}，初末态电子的能量都是 E ，四维动量分解为



$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (E, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

🏠 初末态电子的动量大小相等，记为 $Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$

🚽 根据狭义相对论中的定义，初末态电子的运动速率为 $v = \frac{Q}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}$

🚿 因而 $m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2)$ ，四维动量的内积可以表达成

$$k_1 \cdot p_1 = E^2 - Q^2 \cos \theta = E^2(1 - v^2 \cos \theta), \quad k_2 \cdot p_2 = m_p^2$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E$$

$$q^2 = (k_1 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2E^2 + 2Q^2 \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

非极化振幅模方

 从而，非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1 - \cos \theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1 - v^2 \cos \theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos \theta + m_e^2 m_p^2) \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos \theta + m_p^2 E^2(1 - v^2)] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2(1 - \cos \theta)^2} [2 - v^2(1 - \cos \theta)] = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

非极化振幅模方


从而，非极化振幅模方化为


$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1 - \cos \theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1 - v^2 \cos \theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos \theta + m_e^2 m_p^2) \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos \theta + m_p^2 E^2(1 - v^2)] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2(1 - \cos \theta)^2} [2 - v^2(1 - \cos \theta)] = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

末态两体不变相空间积分是

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\
 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(k_1^0 + k_2^0 - p_1^0 - p_2^0) = \int \frac{d\Omega dQ Q^2}{16\pi^2 E m_p} \delta(E + m_p - \sqrt{Q^2 + m_e^2} - m_p) \\
 &= \int \frac{d\Omega Q^2}{16\pi^2 E m_p} \left| \frac{d(E - \sqrt{Q^2 + m_e^2})}{dQ} \right|^{-1} = \int \frac{d\Omega Q^2}{16\pi^2 E m_p} \frac{\sqrt{Q^2 + m_e^2}}{Q} = \int d\Omega \frac{Q}{16\pi^2 m_p}
 \end{aligned}$$


Mott 公式


 **入射流因子** $E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = E m_p \frac{Q}{E} = Q m_p$

 此过程末态对称性因子 $S = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4Q m_p} \int d\Omega \frac{Q |\overline{\mathcal{M}}|^2}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega |\overline{\mathcal{M}}|^2 \end{aligned}$$

Mott 公式

 **入射流因子** $E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = E m_p \frac{Q}{E} = Q m_p$

 此过程末态对称性因子 $S = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4Q m_p} \int d\Omega \frac{Q |\overline{\mathcal{M}}|^2}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega |\overline{\mathcal{M}}|^2 \end{aligned}$$

 **微分散射截面**为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad Q \ll m_p$$


 这是 **QED** 对 **Rutherford 公式** 的修正，称为 **Mott 公式**

 Mott 公式跟 Rutherford 公式一样**不依赖于** m_p ，因而 $m_p \rightarrow \infty$ 的**极限是存在的**



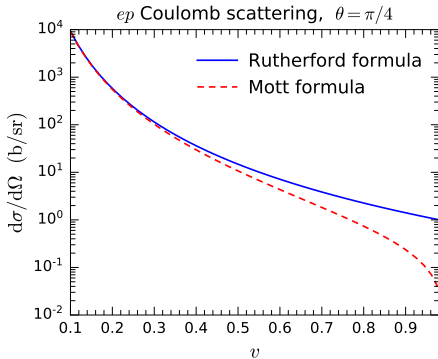
Nevill Francis Mott
(1905–1996)

Mott 公式与 Rutherford 公式

 在低速极限下, $v \ll 1$, $Q \simeq m_e v$, **Mott 公式**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

退化成 **Rutherford 公式** $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$



8.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

🔊 从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

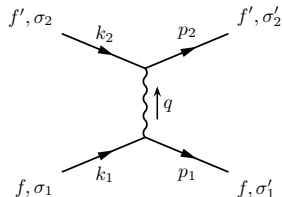
📺 在**非相对论近似**下，Mott 公式**退化**为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

📁 这是接下来要**论证**的观点

🪣 考虑两种带电费米子 f 和 f' ，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$

🍷 讨论 **Coulomb 散射过程** $f f' \rightarrow f f'$

🛒 初态四维动量为 k_1 和 k_2 ，末态四维动量为 p_1 和 p_2



8.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

🔊 从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

🔦 在**非相对论近似**下，Mott 公式**退化**为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

📁 这是接下来要**论证**的观点

🪣 考虑两种带电费米子 f 和 f' ，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$

🍷 讨论 **Coulomb 散射过程** $f f' \rightarrow f f'$

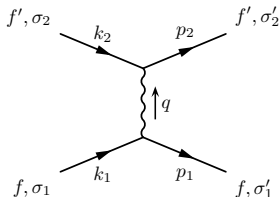
🛒 初态四维动量为 k_1 和 k_2 ，末态四维动量为 p_1 和 p_2

🪜 在**非相对论近似**下， $|\mathbf{k}_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$ ，粒子**能量近似为质量**，即

$$k_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{p}_2)$$

🪴 在此近似下，可将正费米子的平面波旋量系数表达为 $u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix}$

📦 \mathbf{p} 是动量；不依赖于 \mathbf{p} 的 ζ_σ 是某个固定方向上的**二分量子自旋本征态**，**本征值**为 $\sigma = \pm 1/2$ ，满足正交归一关系 $\zeta_{\sigma'}^\dagger \zeta_\sigma = \delta_{\sigma'\sigma}$ 和完备性关系 $\sum_{\sigma=\pm 1/2} \zeta_\sigma \zeta_\sigma^\dagger = 1$



非相对论近似

这样的 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 在 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = 0$$

满足正交归一关系, $u^\dagger(\mathbf{p}, \sigma')u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'}^\dagger & \zeta_{\sigma'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = 2m\zeta_{\sigma'}^\dagger\zeta_\sigma \simeq 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma'\sigma}$

非相对论近似

这样的 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 在 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = 0$$

满足正交归一关系, $u^\dagger(\mathbf{p}, \sigma')u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'}^\dagger & \zeta_{\sigma'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = 2m\zeta_{\sigma'}^\dagger \zeta_\sigma \simeq 2E_p \delta_{\sigma' \sigma}$

于是, $ff' \rightarrow ff'$ 散射过程的 QED 领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{Diagram} \\
 &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) (-iQ_f e \gamma^\mu) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) (-iQ_{f'} e \gamma^\nu) u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \\
 &= \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_\mu u(\mathbf{k}_2, \sigma_2)
 \end{aligned}$$

非相对论近似下的 Coulomb 散射振幅

† 由 $u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \simeq \sqrt{m_f} (\zeta_{\sigma'_1}^\dagger \quad \zeta_{\sigma'_1}^\dagger)$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f (\zeta_{\sigma'_1}^\dagger \quad \zeta_{\sigma'_1}^\dagger) \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \zeta_{\sigma_1} = 2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f (\zeta_{\sigma'_1}^\dagger \quad \zeta_{\sigma'_1}^\dagger) \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 0$$

👉 同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 2m_f \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 0$

👉 因此在非相对论近似下只有时间分量 $\bar{u} \gamma^0 u$ 的贡献

非相对论近似下的 Coulomb 散射振幅

† 由 $u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \simeq \sqrt{m_f} (\zeta_{\sigma'_1}^\dagger \quad \zeta_{\sigma'_1}^\dagger)$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f (\zeta_{\sigma'_1}^\dagger \quad \zeta_{\sigma'_1}^\dagger) \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \zeta_{\sigma_1} = 2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f (\zeta_{\sigma'_1}^\dagger \quad \zeta_{\sigma'_1}^\dagger) \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 0$$

🦾 同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 0$

🦾 因此在非相对论近似下只有时间分量 $\bar{u} \gamma^0 u$ 的贡献

🦾 再注意到 $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$, 则 $q^2 = (q^0)^2 - |\mathbf{q}|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$

🦾 将不变振幅化为 $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1}) (2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$

🦾 $i\mathcal{M}$ 只在 $\sigma'_1 = \sigma_1$ 且 $\sigma'_2 = \sigma_2$ 时非零

🦾 也就是说, 非相对论性的 Coulomb 散射不改变费米子的自旋状态


非相对论性归一化


☒ $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ 因子跟归一化取法有关


💰 依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法，正费米子态为 $|\mathbf{p}^+, \sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger |0\rangle$


📄 $c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger$ 是相应的产生算符，有 $\langle \mathbf{k}^+, \sigma' | \mathbf{p}^+, \sigma \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

非相对论性归一化


 $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ 因子跟归一化取法有关

 依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法，正费米子态为 $|\mathbf{p}^+, \sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger |0\rangle$


 $c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger$ 是相应的产生算符，有 $\langle \mathbf{k}^+, \sigma' | \mathbf{p}^+, \sigma \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

 在非相对论性量子力学中，通常将正费米子态定义为

$$|\mathbf{p}^+, \sigma\rangle_{\text{NR}} \equiv c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} |\mathbf{p}^+, \sigma\rangle$$

 满足内积关系 ${}_{\text{NR}}\langle \mathbf{k}^+, \sigma' | \mathbf{p}^+, \sigma \rangle_{\text{NR}} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ ，相应外线规则变成

$$f, \sigma \longrightarrow \overset{p}{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} u(\mathbf{p}, \sigma), \quad \overset{p}{\bullet} \longrightarrow f, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)$$

 非相对论性归一化不变振幅是 $i\mathcal{M}_{\text{NR}} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$ ， $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$

 相应的 T 矩阵元为

$${}_{\text{NR}}\langle \mathbf{p}_2^+, \sigma'_2; \mathbf{p}_1^+, \sigma'_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^+, \sigma_2 \rangle_{\text{NR}} = i\mathcal{M}_{\text{NR}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

Born 近似

🎧 另一方面, 对于 f 粒子进入**势场** $V(\mathbf{x})$ 发生的散射过程, **非相对论性量子力学**的 **Born 近似**给出 T 矩阵元

$${}_{\text{NR}}\langle \mathbf{p}_1^+, \sigma_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, \sigma_1 \rangle_{\text{NR}} = -i\tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

🌐 其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**,

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

Born 近似

🎧 另一方面，对于 f 粒子进入**势场** $V(\mathbf{x})$ 发生的散射过程，**非相对论性量子力学**的 **Born 近似**给出 T 矩阵元

$${}_{\text{NR}}\langle \mathbf{p}_1^+, \sigma_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, \sigma_1 \rangle_{\text{NR}} = -i\tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

🌐 其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

💎 这里相当于**对引起势场** $V(\mathbf{x})$ 的 f' 粒子动量作积分

💠 因而**没有相关的三维动量 δ 函数因子**

💍 与以上 **Coulomb 散射**的 T 矩阵元 ${}_{\text{NR}}\langle \mathbf{p}_2^+, \sigma_2'; \mathbf{p}_1^+, \sigma_1' | iT | \mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^+, \sigma_2 \rangle_{\text{NR}}$

$$= -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{\sigma_1' \sigma_1} \delta_{\sigma_2' \sigma_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

比较，得到 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$

Coulomb 势能


对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 Fourier 逆变换, 记 $r \equiv |\mathbf{x}|$, 推出 Coulomb 势能

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\
 &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\
 &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right)
 \end{aligned}$$


Coulomb 势能


 对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 Fourier 逆变换, 记 $r \equiv |\mathbf{x}|$, 推出 Coulomb 势能

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right) \end{aligned}$$


 作变量替换 $Q = -|\mathbf{q}|$, 将第二个积分化为

$$-\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \int_0^{-\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{-Q} = \int_{-\infty}^0 dQ \frac{e^{iQr}}{Q} = \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$$

 最后一步作了变量替换 $|\mathbf{q}| = Q$

 因而可将 $V(\mathbf{x})$ 表达成 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

Coulomb 势

 利用留数定理计算积分 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

 被积函数在 $|\mathbf{q}| = 0$ 处存在单极点，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=0} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi$$

 Coulomb 势能化为

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$$

Coulomb 势

🎥 利用留数定理计算积分 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

👉 被积函数在 $|\mathbf{q}| = 0$ 处存在单极点，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=0} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi$$

🎀 Coulomb 势能化为

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$$

👑 f' 粒子的 Coulomb 势 $\Phi_{f'}(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}$

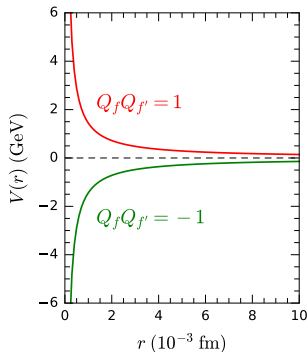
🎓 这正是电动力学中点电荷电势的形式

👉 Coulomb 势是长程势，以 r^{-1} 规律衰减

👑 $V(r)$ 的符号由 Q_f 和 $Q_{f'}$ 的符号决定

👑 当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 同号时， $V(r) > 0$ ， r 越小，势能越大，Coulomb 势是排斥势

👑 当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 异号时， $V(r) < 0$ ， r 越小，势能越小，Coulomb 势是吸引势



不变振幅的绝对符号

⏸ 上述推导过程通过比较 $f f' \rightarrow f f'$ 不变振幅和 Born 近似下的 T 矩阵元来推导

Coulomb 势能

👏 这是振幅层面上的对比，振幅的绝对符号会影响最后得到的 Coulomb 势能

👉 因此，严格来说，需要检验场算符与初末态缩并的情况来确定这个绝对符号

👉 此时应该对末态采取左矢的严格定义，而不能使用第 7 章那样让左矢中动量排列次序与湮灭算符相同的约定

不变振幅的绝对符号

▣ 上述推导过程通过比较 $ff' \rightarrow ff'$ 不变振幅和 Born 近似下的 T 矩阵元来推导

Coulomb 势能

👏 这是振幅层面上的对比，振幅的绝对符号会影响最后得到的 Coulomb 势能

👉 因此，严格来说，需要检验场算符与初末态缩并的情况来确定这个绝对符号

👉 此时应该对末态采取左矢的严格定义，而不能使用第 7 章那样让左矢中动量排列次序与湮灭算符相同的约定

👉 如果用 $a_{p,\sigma}^\dagger$ 和 $b_{p,\sigma}^\dagger$ 分别代表 f 和 \bar{f} 费米子的产生算符

用 $c_{p,\sigma}^\dagger$ 和 $d_{p,\sigma}^\dagger$ 分别代表 f' 和 \bar{f}' 费米子的产生算符

👉 那么， $ff' \rightarrow ff'$ 散射的初态是 $|\mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^+, \sigma_2\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} a_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle$

👉 末态 $|\mathbf{p}_1^+, \sigma'_1; \mathbf{p}_2^+, \sigma'_2\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1}^\dagger c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2}^\dagger |0\rangle$ 对应的左矢依照定义写成

$$\langle \mathbf{p}_1^+, \sigma'_1; \mathbf{p}_2^+, \sigma'_2 | = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} \langle 0 | c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1}$$

解开缩并线

▶ 参考 7.1 节计算方法, $ff' \rightarrow ff'$ 不变振幅对应的缩并形式是

$$\begin{aligned} & \langle 0 | c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1} N [A_\mu(x) \bar{\psi}_{f,a}(x) \gamma_{ab}^\mu \psi_{f,b}(x) A_\nu(y) \bar{\psi}_{f',c}(y) \gamma_{cd}^\nu \psi_{f',d}(y)] a_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1} N [\bar{\psi}_{f,a}(x) \bar{\psi}_{f',c}(y) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x) A_\nu(y) \gamma_{cd}^\nu \psi_{f',d}(y) \psi_{f,b}(x)] a_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

👉 注意这里将缩并线连接到产生湮灭算符头上

👉 第二步在正规乘积中调换场算符的位置, 将纠缠的缩并线解开

👉 这涉及到偶数次费米子算符之间的交换, 没有给出额外的负号

👉 因此上面得到的 Coulomb 势能是正确的

$f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 散射

如果考虑 $f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 散射过程，就会出现不一样的情况

此时初态变成 $|k_1^+, \sigma_1; k_2^-, \sigma_2\rangle = \sqrt{4E_{k_1} E_{k_2}} a_{k_1, \sigma_1}^\dagger d_{k_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle$

末态 $|p_1^+, \sigma'_1; p_2^-, \sigma'_2\rangle = \sqrt{4E_{p_1} E_{p_2}} a_{p_1, \sigma'_1}^\dagger d_{p_2, \sigma'_2}^\dagger |0\rangle$ 对应的左矢依照定义写成

$$\langle p_1^+, \sigma'_1; p_2^-, \sigma'_2 | = \sqrt{4E_{p_1} E_{p_2}} \langle 0 | d_{p_2, \sigma'_2} a_{p_1, \sigma'_1}$$

不变振幅对应的缩并形式是

$$\begin{aligned} & \langle 0 | d_{p_2, \sigma'_2} a_{p_1, \sigma'_1} N[A_\mu(x) \bar{\psi}_{f,a}(x) \gamma_{ab}^\mu \psi_{f,b}(x) A_\nu(y) \bar{\psi}_{f',c}(y) \gamma_{cd}^\nu \psi_{f',d}(y)] a_{k_1, \sigma_1}^\dagger d_{k_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle \\ &= - \langle 0 | d_{p_2, \sigma'_2} a_{p_1, \sigma'_1} N[\bar{\psi}_{f,a}(x) \psi_{f',d}(y) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x) A_\nu(y) \gamma_{cd}^\nu \bar{\psi}_{f',c}(y) \psi_{f,b}(x)] a_{k_1, \sigma_1}^\dagger d_{k_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

第二步将缩并线解开时涉及奇数次费米子算符之间的交换，给出一个额外的负号

$f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 不变振幅

应该把这个额外的负号加入到 $f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 的领头阶不变振幅中，得到

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= - \\
 & \begin{array}{c} \bar{f}', \sigma_2 \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ f, \sigma_1 \quad \quad p_1 \quad \quad f, \sigma'_1 \end{array} \\
 &= - \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) (-iQ_f e \gamma^\mu) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) (-iQ_{f'} e \gamma^\mu) v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \\
 &= - \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2)
 \end{aligned}$$

在非相对论近似下，反费米子的平面波旋量系数表达为 $v(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma} \\ -\eta_{-\sigma} \end{pmatrix}$

η_σ 是类似于 ζ_σ 的二分量自旋本征态，满足以下正交归一关系和完备性关系，

$$\eta_{\sigma'}^\dagger \eta_\sigma = \delta_{\sigma'\sigma}, \quad \sum_{\sigma=\pm 1/2} \eta_\sigma \eta_\sigma^\dagger = 1$$

反费米子的平面波旋量系数

▶ 这样的 $v(\mathbf{p}, \sigma)$ 在 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} + m)v(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & m \end{pmatrix} v(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma} \\ -\eta_{-\sigma} \end{pmatrix} = 0$$

🙏 也满足正交归一关系,

$$v^\dagger(\mathbf{p}, \sigma') v(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'}^\dagger & -\eta_{-\sigma'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma} \\ -\eta_{-\sigma} \end{pmatrix} = 2m \eta_{\sigma'}^\dagger \eta_\sigma \simeq 2E_{\mathbf{p}} \delta_{\sigma' \sigma}$$

👉 从而

$$\begin{aligned} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \gamma^0 v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) &\simeq m_{f'} \begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'_2} \\ -\eta_{-\sigma'_2} \end{pmatrix} \\ &= 2m_{f'} \eta_{-\sigma_2}^\dagger \eta_{-\sigma'_2} = 2m_{f'} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2} \end{aligned}$$

$$\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \gamma^i v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \simeq m_{f'} \begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'_2} \\ -\eta_{-\sigma'_2} \end{pmatrix} = 0$$

反费米子的 Coulomb 势

🔼 再利用 $q^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$ ，将 $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 不变振幅化为

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2})$$

👉 与 $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 不变振幅比较，上式相差一个源于奇数次费米子算符交换的负号

👉 于是，相应的 Coulomb 势能也多了个负号，形式为

$$V(r) = -\frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$$


👍 可见，反费米子 \bar{f}' 引起的 Coulomb 势为

$$\Phi_{\bar{f}'}(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{-Q_{f'} e}{4\pi r}$$

👉 它与正费米子 f' 引起的 Coulomb 势 $\Phi_{f'}(r) = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}$ 符号相反

👏 这符合我们对反费米子 \bar{f}' 携带 $-Q_{f'}$ 电荷的认知

Yukawa 势

 我们已经看到，光子传播子^{光子传播子}在非相对论近似下的效应等价于 Coulomb 势

 类似地，Yukawa 理论中标量玻色子 ϕ 的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

 与光子不同的是， ϕ 具有质量 m_ϕ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

Yukawa 势

🏠 我们已经看到，光子传播子^{光子传播子}在非相对论近似下的效应等价于 Coulomb 势

🌿 类似地，Yukawa 理论中标量玻色子 ϕ 的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

🧑 与光子不同的是， ϕ 具有质量 m_ϕ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

🕶 假设存在两种参与 Yukawa 相互作用的费米子 f 和 f' ，相应的耦合常数均为 κ

🕶 根据 7.2 节的 Feynman 规则， $ff' \rightarrow ff'$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{Diagram} \\
 &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) (-i\kappa) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) (-i\kappa) u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \\
 &= -\frac{i\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) u(\mathbf{k}_2, \sigma_2)
 \end{aligned}$$

Yukawa 理论的 $\tilde{V}(\mathbf{q})$



由于

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$$



振幅化为

$$i\mathcal{M} = \frac{i\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$$



类比前面 **Coulomb** 散射的计算：


$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}) \quad \text{👉} \quad \tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$$




即得 **Yukawa 势场** $V(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$


Yukawa 势能

 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$ 对应的 **Yukawa 势能**为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{|\mathbf{q}|^2 e^{i|\mathbf{q}|r\cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \\ &= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r} - e^{-i|\mathbf{q}|r}}{i|\mathbf{q}|r} = -\frac{\kappa^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \end{aligned}$$

 被积函数在**上半复平面** $|\mathbf{q}| = im_\phi$ 处存在**单极点**，**沿实轴和上半圆周积分**，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=im_\phi} \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \left. \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}| + im_\phi} \right|_{|\mathbf{q}|=im_\phi} = i\pi e^{-m_\phi r}$$

 因此，Yukawa 势能的形式是

$$V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r}$$

$f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 散射

▶▶ 对于 $f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 散射，类似于 QED，要在不变振幅中引入一个额外负号，得到

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= - \\
 & \begin{array}{c} \bar{f}', \sigma_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \phi \\ \quad \quad \quad \uparrow q \\ \quad \quad \quad \phi \\ \swarrow \quad \searrow \\ f, \sigma_1 \quad \quad p_1 \quad \quad f, \sigma_1' \end{array} \\
 &= - \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1') (-i\kappa) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) (-i\kappa) v(\mathbf{p}_2, \sigma_2') \\
 &= \frac{i\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1') u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) v(\mathbf{p}_2, \sigma_2')
 \end{aligned}$$

👉 不过， $\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) v(\mathbf{p}_2, \sigma_2') \simeq m_{f'} \begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma_2'} \\ -\eta_{-\sigma_2'} \end{pmatrix} = -2m_{f'} \eta_{-\sigma_2}^\dagger \eta_{-\sigma_2'} =$

$-2m_{f'} \delta_{\sigma_2 \sigma_2'}$ 里面也出现一个负号，导致非相对论近似下不变振幅与 $f f' \rightarrow f f'$ 相同

👉 于是， $f \bar{f}' \rightarrow f \bar{f}'$ 散射过程对应的 Yukawa 势能与 $f f' \rightarrow f f'$ 是一样的

短程吸引势



Yukawa 势能 $V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} < 0$



r 越小, 势能越小; 无论对 ff' 散射还是 ff' 散射, Yukawa 势都是**吸引势**



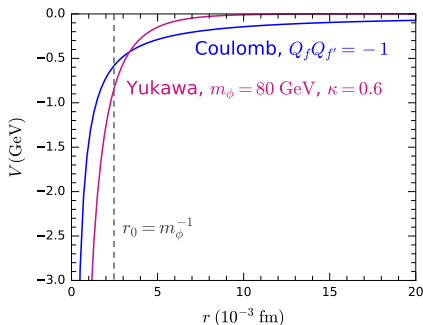
在**长距离处**, **指数因子** $e^{-m_\phi r}$ 使 Yukawa 势**迅速衰减**, 因而它是**短程势**



$r_0 \equiv 1/m_\phi$ 是 Yukawa 势的特征长度, 即 Yukawa 相互作用的**力程**




若标量玻色子 ϕ **没有质量**, 则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式**类似**





8.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

 上一节讨论表明, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 与 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 过程具有交叉对称性, 利用相应的**动量替换规则**, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

 **交叉对称性**的一般表述如下

 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的**粒子** Φ

 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的**反粒子** $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程


 那么, 这两个过程的**不变振幅**可以通过**动量替换** $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来,


$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$


8.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

 上一节讨论表明, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 与 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 过程具有交叉对称性, 利用相应的**动量替换规则**, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方


 **交叉对称性**的一般表述如下


 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的**粒子 Φ**

 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的**反粒子 $\bar{\Phi}$** 而得到另一个过程

 那么, 这两个过程的**不变振幅**可以通过**动量替换 $k^\mu = -p^\mu$** 联系起来,

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

 **物理**的初末态粒子必须具有**正能量**, 但 $k^\mu = -p^\mu$ 意味着 Φ 和 $\bar{\Phi}$ **不可能同时具有正能量**, 因而看起来有一个过程是**非物理**的

 实际上, 应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的**数学技巧**: 对第一个过程的振幅作**动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$** , 再**解析延拓**到**物理区域**就得到第二个过程的振幅

 可以这样**想象**交叉对称性: 一个**粒子沿着时间方向运动**等价于它的**反粒子逆着时间方向运动**, 这样的反粒子具有**负能量和相反动量**

交叉对称性与动量替换

把 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 的过程如下

先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p'_1)，引起动量替换 $k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu$

再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k'_2)，引起动量替换 $p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$

初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到**替换规则**

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

交叉对称性与动量替换

把 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 的过程如下

先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p'_1)，引起动量替换 $k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu$

再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k'_2)，引起动量替换 $p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$

初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到**替换规则**

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$$

交叉一个粒子的 Feynman 图如右下图所示，灰色圆形象征一些 Feynman 图结构

图 (a) 中有一个**正粒子** Φ 进入顶点

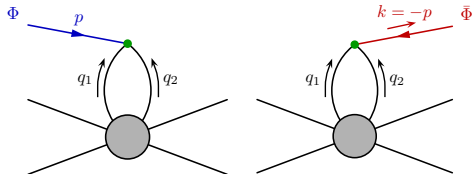
图 (b) 相应地替换成一个**反粒子** $\bar{\Phi}$

离开顶点，两幅图其余部分完全相同

由于**顶点处能动量守恒**，图 (a) 中

四维动量满足 $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$

图 (b) 则满足 $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$



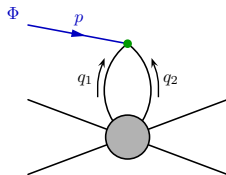
(a) 正粒子 Φ 入射

(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 出射

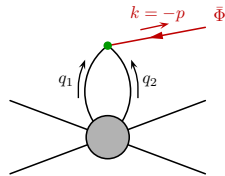
玻色子的交叉对称性

👉 只要 $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使**能动量守恒**，而两幅图在振幅上的**差异**就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子**（即**极化矢量**、**平面波旋量系数**等）之间的差异

🔪 如果 Φ 是**标量玻色子**，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子**都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立



(a) 正粒子 Φ 入射



(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 入射

玻色子的交叉对称性

👛 只要 $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使**能动量守恒**，而两幅图在振幅上的**差异**就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子**（即**极化矢量**、**平面波能量系数**等）之间的差异

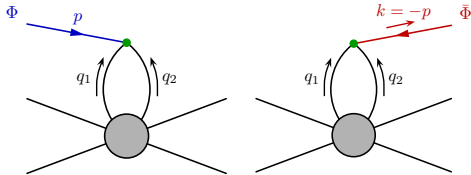
🔪 如果 Φ 是**标量玻色子**，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子**都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立

👉 如果 Φ 是**正矢量玻色子**，则 $\Phi(p)$ 的**外线因子**为极化矢量 $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ ：

$$\varepsilon^\mu(p, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu(p, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ \mp p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix}$$

👁️ 可见， $\varepsilon_\mu(-p, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$ 对 $\lambda = 0, \pm$ 成立

👛 因此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，有 $\varepsilon_\mu(p, \lambda) = \varepsilon_\mu(-k, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$ ，这恰好是 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子**，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立



(a) 正粒子 Φ 入射

(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 入射

费米子的交叉对称性

☕ 如果 Φ 是 Dirac 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$

🔒 在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

🔓 因而两个过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 相差一个整体负号

🔑 可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的 $|\mathcal{M}|^2$

费米子的交叉对称性

☕ 如果 Φ 是 **Dirac 正费米子**，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$

🔒 在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

🔒 因而两个过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 相差一个**整体负号**

🔑 可见，**交叉一个费米子**时，除了作**动量替换** $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要**去除一个整体负号**才能得到正确的 $|\mathcal{M}|^2$

🔒 将 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 时，**交叉了两个费米子**，产生了**两个整体负号**，它们正好**相互抵消**


🔑 交叉一个费米子时，如果想让交叉对称性**在振幅层面上成立**，则需要对 $v(p, \lambda)$ 采取**特殊的定义**，而 $u(p, \lambda)$ 可保持**原先的定义**

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$v(p, \lambda)$ 的特殊定义

 由螺旋态本征方程 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$ ，故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$


 即 $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态，从而可以将 $v(p, \lambda)$ 的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$


$v(p, \lambda)$ 的特殊定义


 由螺旋态本征方程 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$ ，故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$


 即 $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态，从而可以将 $v(p, \lambda)$ 的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

 $v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$, $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$, $\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$

 利用 $m = \sqrt{(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{(p^0 + \lambda|\mathbf{p}|)(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)}$ ，推出

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{m} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 - \lambda|\mathbf{p}|) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

 因此，这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足运动方程 $(\not{p} + m)v(p, \lambda) = 0$

振幅的费米子交叉对称性

☕ 也可以验证这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足**正交归一关系**和**自旋求和关系**

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

振幅的费米子交叉对称性

☕ 也可以验证这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足**正交归一关系**和**自旋求和关系**

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

✎ 如此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，可以推出


$$\begin{aligned} u(p, \lambda) &= u(-k, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e^{i\pi}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ [e^{-i\pi}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\pi/2}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ e^{-i\pi/2}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{k^0 + \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ -i\sqrt{k^0 - \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = v(k, \lambda) \end{aligned}$$

📎 即 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子相等**

🛡️ 故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立

🔗 注意，**平方根函数是多值函数**，在上式推导过程中，利用 $e^{\pm i\pi} = -1$ 对两个平方根函数采用了**不同的**取值方式

Mandelstam 变量

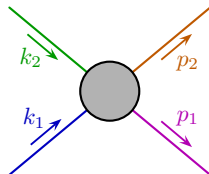
 现在定义一些便于应用**交叉关系**的物理量

 对于 $2 \rightarrow 2$ 散射，按照右图表示的四维动量，定义三个 **Lorentz 不变** 的 **Mandelstam 变量**：

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$t \equiv (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2$$



 第二步均用到**能动量守恒关系** $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

 记这些四维动量对应的**质量**为 m_1 、 m_2 、 m_1' 、 m_2' ，

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m_1'^2, \quad p_2^2 = m_2'^2$$



Stanley Mandelstam
(1928–2016)

Mandelstam 变量性质


 四维动量的内积可以用 Mandelstam 变量和质量表示为

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}(s - k_1^2 - k_2^2) = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2), \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1'^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - k_1^2 - p_1^2) = -\frac{1}{2}(t - m_1^2 - m_1'^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(t - m_2^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(u - k_1^2 - p_2^2) = -\frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2'^2), \quad k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_2^2 - m_1'^2)$$

 因为 $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ 只是这些四维动量内积的函数，所以用 3 个 Mandelstam 变量就足以表达任意 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的非极化振幅模方 $|\overline{\mathcal{M}}|^2$

 进一步推出

$$\begin{aligned} s + t + u &= (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - p_1)^2 + (k_1 - p_2)^2 \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_1 - p_2) \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2 \end{aligned}$$

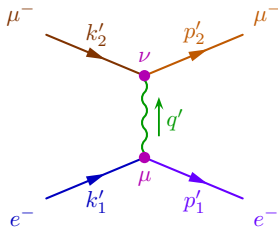
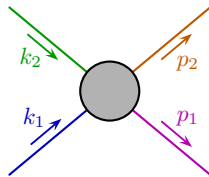
 即 Mandelstam 变量之和是初末态粒子质量平方和

Mandelstam 变量的进一步说明

👉 $t = (k_1 - p_1)^2$ 和 $u = (k_1 - p_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

👉 实际应用通常用初末态中两个性质相近的粒子定义 t

👉 比如，对于 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k'_1 与末态电子动量 p'_1 定义 $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$



Mandelstam 变量的进一步说明

👉 $t = (k_1 - p_1)^2$ 和 $u = (k_1 - p_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

👉 实际应用通常用初末态中两个性质相近的粒子定义 t

👉 比如，对于 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k'_1 与末态电子动量 p'_1 定义 $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$

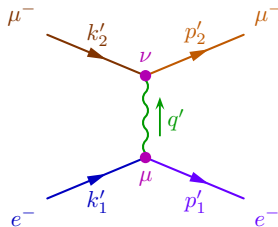
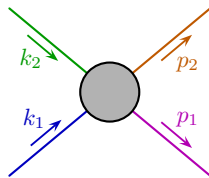
👉 在质心系中， $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ ，有 $s = (k_1 + k_2)^2 = (k_1^0 + k_2^0)^2 = E_{\text{CM}}^2$

👉 故 $\sqrt{s} = E_{\text{CM}}$ 就是质心能


👉 对于任意 $2 \rightarrow n$ 散射过程，将 s 定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \left(\sum_i p_i \right)^2$$

👉 于是， \sqrt{s} 就是这个 $2 \rightarrow n$ 过程的质心能




$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

 可以用 **Mandelstam 变量表达**任意 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的非极化振幅模方

 对于 8.2 节的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程, **非极化振幅模方**可化为

$$\begin{aligned} & |\overline{\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}|^2 \\ &= \frac{8e^4}{s^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2m_\mu^2] \\ &= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{1}{4}(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{4}(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{2}m_\mu^2(s - 2m_e^2) + \frac{1}{2}m_e^2(s - 2m_\mu^2) \right. \\ &\quad \left. + 2m_e^2m_\mu^2 \right] \\ &= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{t + u}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right] \end{aligned}$$

 由 $s + t + u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$ 得 $t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) - s$, 故

$$\begin{aligned} & |\overline{\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}|^2 \\ &= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{2(m_e^2 + m_\mu^2) - s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right] \\ &= \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2] \end{aligned}$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

📖 现在将 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

👉 根据动量替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, 有

$$(k_1 + k_2)^2 \rightarrow (k_1' - p_1')^2, \quad (k_1 - p_1)^2 \rightarrow (k_1' - p_2')^2, \quad (k_1 - p_2)^2 \rightarrow (k_1' + k_2')^2$$

👉 即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

🍷 现在将 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

👉 根据动量替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, 有

$$(k_1 + k_2)^2 \rightarrow (k_1' - p_1')^2, \quad (k_1 - p_1)^2 \rightarrow (k_1' - p_2')^2, \quad (k_1 - p_2)^2 \rightarrow (k_1' + k_2')^2$$

👉 即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

👉 可见, 交叉对称性对应于 Mandelstam 变量的调换

👉 据此, 从 $|\overline{\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$


直接得到 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 过程的非极化振幅模方


$$|\overline{\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} [u^2 + s^2 + 4t(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$$

👉 容易验证此结果与前面得到的 $|\overline{\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)}|^2 = \frac{8e^4}{(q'^2)^2} [(k_1' \cdot p_2')(p_1' \cdot k_2')$

$+ (k_1' \cdot k_2')(p_1' \cdot p_2') - m_e^2(p_2' \cdot k_2') - m_\mu^2(k_1' \cdot p_1') + 2m_e^2m_\mu^2]$ 一致

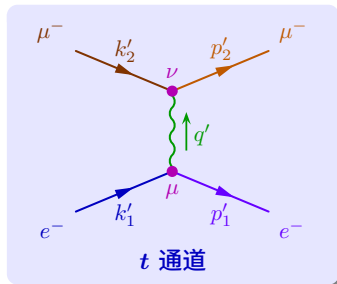
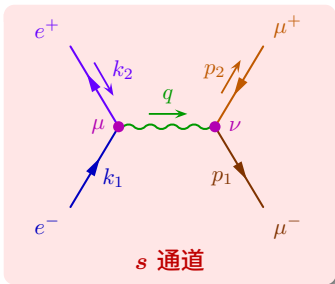
s 、 t 和 u 通道

 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的虚光子动量满足 $q^2 = (k_1 + k_2)^2 = s$ ，交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 之后，虚光子动量满足 $q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = t$


 一般来说，当 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的 Feynman 图只包含一条内线时，内线动量的内积等于一个 Mandelstam 变量 s 、 t 或 u

 相应地称这种图为 s 通道 (channel)、 t 通道或 u 通道的 Feynman 图

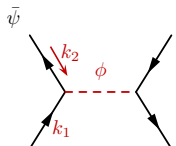
 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 和 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ Feynman 图分别对应于 s 通道和 t 通道



三种通道的特点

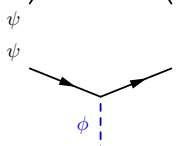
 以 Yukawa 理论为例，三种通道具有如下特点

s 通道:



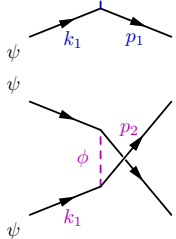
$$\propto \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 - m_\phi^2} = \frac{1}{s - m_\phi^2}$$

t 通道:



$$\propto \frac{1}{(k_1 - p_1)^2 - m_\phi^2} = \frac{1}{t - m_\phi^2}$$

u 通道:

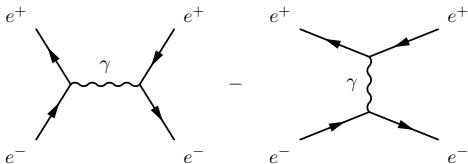


$$\propto \frac{1}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} = \frac{1}{u - m_\phi^2}$$

Bhabha 散射和 Møller 散射

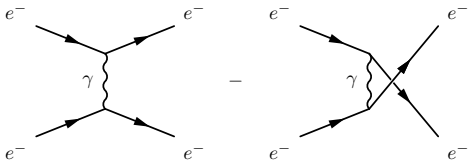
🍺 一个散射过程可以包含多个通道的 Feynman 图

👞 **Bhabha 散射** $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 具有 1 个 s 通道和 1 个 t 通道领头阶 Feynman 图



Homi Jehangir Bhabha
(1909–1966)

👞 **Møller 散射** $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ 具有 1 个 t 通道和 1 个 u 通道领头阶 Feynman 图



Christian Møller
(1904–1980)

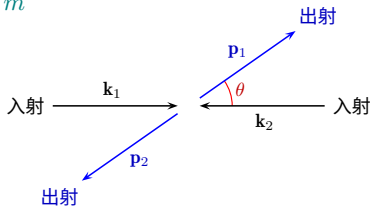
Mandelstam 变量与散射角的关系

🍷 在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是 m

✍️ 动量如右图所示，则有

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\text{CM}}}{2} = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \equiv Q$$



🍴 从而得到

$$t = (k_1 - p_1)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_1^0 + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1| \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_2^0 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta = -2Q^2(1 + \cos \theta)$$

🍴 于是， $\theta \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$ ， $\theta \rightarrow \pi$ 时 $u \rightarrow 0$ ，而 $s = E_{\text{CM}}^2$ 与散射角 θ 无关

🍴 三种通道的传播子对散射角 θ 的依赖截然不同