

# 量子场论

## 第 7 章 Feynman 图 7.3 节和 7.4 节

余钊焕


中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>


更新日期：2024 年 1 月 22 日




## 7.3 节 $\phi^4$ 理论与对称性因子

 如果拉氏量的相互作用项中含有多个**全同**的量子场，那么，在应用 Wick 定理时需要考虑一些**等价的缩并方式**，涉及到一些**组合因子**和**对称性因子**

 本节以**实标量场  $\phi(x)$  的  $\phi^4$  理论**为例讨论这种情况

  $\phi^4$  理论的拉氏量是  $\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ ， $m$  是  $\phi$  玻色子质量


 相互作用拉氏量为  $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ ， $\lambda$  是一个**实耦合常数**

 相互作用哈密顿量密度为  $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

  $iT$  展开式的**第  $n$  阶通项**是


$$\begin{aligned} iT^{(n)} &= \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)] \\ &= \frac{1}{n!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}[\phi^4(x_1) \cdots \phi^4(x_n)] \end{aligned}$$

# $\lambda^1$ 阶


 在  $iT$  展开式的第 1 阶，即  $\lambda^1$  阶， $iT^{(1)}$  涉及 4 个实标量场算符的时序乘积

$$iT^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \text{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \sum_{j=1}^3 iT_j^{(1)}$$


 这里 4 个实标量场算符  $\phi(x)$  是**全同的**

 根据 Wick 定理，**第一项**不包含缩并，

$$iT_1^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \text{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]$$


  $C_4^2 = 6$  种包含 1 次缩并的项彼此相等，贡献到**第二项**

$$iT_2^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} 6 \int d^4x \text{N}[\overline{\phi(x)\phi(x)}\phi(x)\phi(x)]$$

  $C_3^1 = 3$  种包含 2 次缩并的项彼此相等，贡献到**第三项**

$$iT_3^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x \text{N}[\overline{\phi(x)\phi(x)}\overline{\phi(x)\phi(x)}]$$


# $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程


 现在考虑  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射过程，设初态为  $|i\rangle = |\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\rangle$ ，末态为  $\langle f| = \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2|$ ，则  $iT_1^{(1)}$  对  $T$  矩阵元的贡献是

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= \frac{-i\lambda}{4!} 4! \int d^4x \overbrace{\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle} \\ &= -i\lambda \int d^4x e^{i(p_1+p_2)\cdot x} e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$

 第二步让  2 个场算符与全同玻色子初态缩并

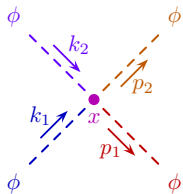
 2 个场算符与全同玻色子末态缩并

 一共有  $A_4^4 = 4!$  种缩并方式，因而出现一个组合因子 4!

 这个组合因子恰好与来自相互作用拉氏量的  $1/4!$  因子抵消

$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射的 Feynman 图

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | \overbrace{\mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}^{\text{orange}} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\
&= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}$$




 实标量玻色子内外线的位置空间 Feynman 规则与 6.1 节的 Yukawa 理论相同

$$\phi \overset{p}{\dashrightarrow} \bullet x = \langle 0 | \overline{\phi(x)} | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

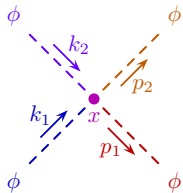
$$x \bullet \overset{p}{\dashrightarrow} \phi = \langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \overset{p}{\dashrightarrow} \bullet y = \overline{\phi(y)}\phi(x) = D_F(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

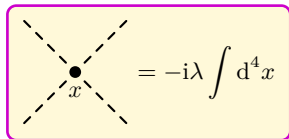
 实际上, 内外线 Feynman 规则是由拉氏量中的自由部分决定的, 因而不依赖于相互作用理论, 具有一般性

# 顶点 Feynman 规则

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | \mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$

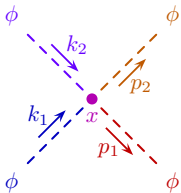


🚗 归纳出  $\phi^4$  理论的**顶点 Feynman 规则**:



# 顶点 Feynman 规则

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | \mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$



🚚 归纳出  $\phi^4$  理论的**顶点 Feynman 规则**:

$$= -i\lambda \int d^4x$$


🚚 应用这些 Feynman 规则，就可以根据 Feynman 图直接写出第二步结果

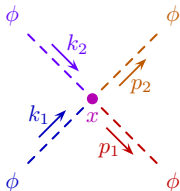
🚚 相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$  包含 4 个全同  $\phi(x)$  之积，当它们与初末态缩并时，会出现 4! 种等价的缩并方式，产生**组合因子 4!**，它恰好与  $\mathcal{L}_1$  中的 **1/4! 因子**抵消

🚚 也就是说，我们在  $\mathcal{L}_1$  中引入一个 **1/4! 因子**是为了使**顶点规则**中**不会出现额外的组合因子**，方便 Feynman 图的计算

# 组合因子

 从 Feynman 图的角度也可以讨论组合因子 4! 的来源


 由于实标量玻色子是纯中性粒子，它的粒子线上没有箭头  
(注意，并非指表示动量方向的箭头)，四条粒子线对顶点而言是不可区分的








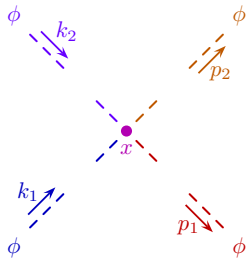
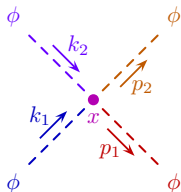


# 组合因子


 从 Feynman 图的角度也可以讨论**组合因子 4!** 的来源


 由于实标量玻色子是**纯中性粒子**，它的粒子线**没有箭头**（注意，并非指表示动量方向的箭头），四条粒子线**对顶点而言是不可区分的**


-  **第一条外线**有 **4 种** 连接顶点的选择
-  **第二条外线**有 **3 种** 连接顶点的选择
-  **第三条外线**只剩 **2 种** 连接顶点的选择
-  **第四条外线**只有 **1 种** 连接顶点的选择
-  一共有  **$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$**  种连接方式，得到**组合因子 4!**




$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射截面

  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  的  $T$  矩阵元  $\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$


  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  领头阶不变振幅  $i\mathcal{M} = -i\lambda$

 由于初末态四个粒子质量相同，根据 6.5.3 小节知识，质心系中关于  $\mathbf{p}_1$  的立体角  $\Omega$  的微分散射截面是

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

 它不依赖于  $\mathbf{p}_1$  的极角  $\theta$  和方位角  $\phi$ ，只依赖于质心能  $E_{\text{CM}}$

 由于末态两个  $\phi$  玻色子是全同的，末态对称性因子  $S = 2$

 对立体角  $\Omega$  积分，得到  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射截面

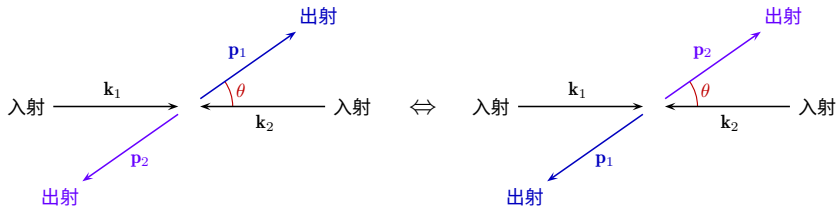
$$\sigma = \frac{1}{S} \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{2} 4\pi \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{CM}}^2}$$

# 末态对称性因子

🍌 由于  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  末态中两个  $\phi$  玻色子是全同的，末态对称性因子  $S = 2$

🍌 计算散射截面时需要除以  $S$  来避免量子态的重复计算

🍌 具体来说，在质心系中，末态中两个  $\phi$  玻色子的动量大小相等，方向相反



🍌 当  $p_1$  的方向是  $(\theta, \phi)$  时， $p_2$  的方向是  $(\pi - \theta, \phi + \pi)$


🍌 当  $p_1$  的方向是  $(\pi - \theta, \phi + \pi)$  时， $p_2$  的方向则是  $(\theta, \phi)$


🍌 因为这两个  $\phi$  玻色子是全同的，这两个情况实际上对应于同一个量子态

🍌 如果我们对  $\Omega$  作  $4\pi$  立体角的积分，就会双重计算每个量子态


🍌 这就是需要除以  $S = 2$  的原因


# $iT_2^{(1)}$ 贡献的 $T$ 矩阵元


 接下来讨论  $iT_2^{(1)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图

 记初态为  $|i\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ ，末态为  $\langle f| = \langle \mathbf{k}|$ ，则  $iT_2^{(1)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{-i\lambda}{4!} 6 \int d^4x \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}^{\text{orange}} | \mathbf{k} \rangle \\
 &= \frac{-i\lambda}{4!} 6 \cdot 2 \int d^4x \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{cyan}}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{cyan}}]}^{\text{cyan}} | \mathbf{k} \rangle \\
 &= \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{cyan}}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{cyan}}]}^{\text{cyan}} | \mathbf{k} \rangle
 \end{aligned}$$

 第一步中**组合因子**  $C_4^2 = 6$  是在  $\phi^4(x)$  中取 2 个场算符相互缩并的组合数


 第二步中的**组合因子**  $A_2^2 = 2$  是余下 2 个场算符与初末态缩并的排列数

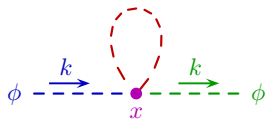
 这两个组合因子将**分母**  $4! = 24$  约化为 **2**，得到第三步的结果

 这样剩下的 2 称为 **Feynman 图的对称性因子** (symmetry factor)


$iT_2^{(1)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图


$$\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}^{\text{green}} | \mathbf{k} \rangle$$

 右图为相应的  $\phi$  粒子自能图



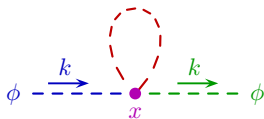
 它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

 因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

 在计算时需要除以 2，否则就会双重计算

$iT_2^{(1)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图

$$\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}^{\text{green}} | \mathbf{k} \rangle$$



右图为相应的  $\phi$  粒子自能图

它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

在计算时需要除以 2，否则就会双重计算

这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性；存在以下普遍规律：

分析 Feynman 图对称性得到的因子总是与  $T$  矩阵元计算中剩下的因子相同

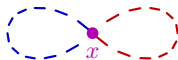
如果先画出 Feynman 图，再利用位置空间的 Feynman 规则写出  $T$  矩阵元，则最后必须除以 Feynman 图的对称性因子才能得出正确的结果

$iT_3^{(1)}$  贡献的气泡图

🚂 在  $iT_3^{(1)}$  的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

🚂 因此相应的 Feynman 图是**气泡图**

$$\begin{aligned}
 iT_3^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x \mathcal{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)}] \\
 &= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x \mathcal{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}]
 \end{aligned}$$



🚂 第一步中的**组合因子**  $C_3^1 = 3$  是在后 3 个场算符中取 1 个与第 1 个场算符缩并的组合数

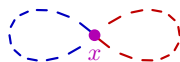
🚂 它将**分母**  $4! = 24$  约化为**对称性因子** 8

# $iT_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

🚂 在  $iT_3^{(1)}$  的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

🚂 因此相应的 Feynman 图是**气泡图**

$$\begin{aligned}
iT_3^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]} \\
&= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}
\end{aligned}$$




🚂 第一步中的**组合因子**  $C_3^1 = 3$  是在后 3 个场算符中取 1 个与第 1 个场算符缩并的组合数

🚂 它将**分母**  $4! = 24$  约化为**对称性因子** 8


🚂 从 Feynman 图角度看，图中 2 个始末端连接同一顶点的**圈**各自贡献一个**因子 2**，而这 2 个圈彼此也是**全同**的，再贡献一个**因子 2**，因此 **Feynman 图**的**对称性因子**为  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ，验证了上述规律




## $\lambda^2$ 阶

 在  $iT$  展开式的第 2 阶，即  $\lambda^2$  阶，有

$$iT^{(2)} = \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y \mathcal{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]$$

 通过 Wick 定理可以将上式化为许多个包含正规乘积的项，这里只讨论对  $\phi$  粒子自能图有贡献的项，有 3 种情况

 第 1 种情况具有如下缩并结构，


$$\begin{aligned} iT_1^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \int d^4x d^4y \mathcal{N}[\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{purple}}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{orange}}\overbrace{\phi(y)\phi(y)}^{\text{blue}}\phi(y)] \\ &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \mathcal{N}[\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{purple}}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{orange}}\overbrace{\phi(y)\phi(y)}^{\text{blue}}\phi(y)] \end{aligned}$$

 从  $\phi^4(x)$  和  $\phi^4(y)$  里面分别取 1 个  $\phi(x)$  和 1 个  $\phi(y)$  缩并的方法有  $4 \cdot 4$  种


 从余下 3 个  $\phi(x)$  [或  $\phi(y)$ ] 中取 2 个  $\phi(x)$  [或  $\phi(y)$ ] 缩并的方法有  $C_3^2 = 3$  种


 因此组合因子为  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

$iT_1^{(2)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图

  $iT_1^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_1^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \{ \overbrace{\langle \mathbf{k} | \mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle}^{\text{Diagram 1}} \\ &\quad + \overbrace{\langle \mathbf{k} | \mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle}^{\text{Diagram 2}} \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \mathbf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{green}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{red}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{cyan}} \overbrace{\phi(y)\phi(y)}^{\text{orange}} \overbrace{\phi(y)\phi(y)}^{\text{blue}}] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有**交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性**，因而可以合成一项，贡献一个 **2! 因子**，恰好与最前面的 **1/2! 因子** 抵消

 从而得到第二步的结果，它表明这个过程**的对称性因子为 4**

$iT_1^{(2)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图

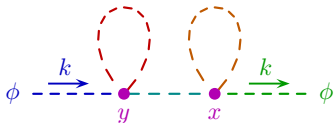
🚢  $iT_1^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_1^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | \overbrace{\mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{red}} | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | \overbrace{\mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{orange}} | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \overbrace{\mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{red}} | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | \overbrace{\mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{orange}} | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$


🦆 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有**交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性**，因而可以合成一项，贡献一个 **2! 因子**，恰好与最前面的 **1/2! 因子** 抵消

🦢 从而得到第二步的结果，它表明这个过程**的对称性因子为 4**

🦩 相应的 Feynman 图具有 **2 个**始末端连接同一个顶点的**圈**，各自贡献一个**因子 2**，故 Feynman 图的对称性因子为 **2 · 2 = 4**




$iT_2^{(2)}$  缩并结构

 第 2 种情况具有如下缩并结构，


$$\begin{aligned}
 iT_2^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 6 \int d^4x d^4y \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}] \\
 &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}]
 \end{aligned}$$

 从  $\phi^4(x)$  和  $\phi^4(y)$  里面取 3 个  $\phi(x)$  和 3 个  $\phi(y)$  出来的方法有  $C_4^3 C_4^3 = 4 \cdot 4$  种


 将这 3 个  $\phi(x)$  和 3 个  $\phi(y)$  彼此缩并的排列方法有  $3! = 6$  种


 因而组合因子是  $4 \cdot 4 \cdot 6$

# $iT_2^{(2)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图


  $iT_2^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{k} | iT_2^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}^{\text{Diagram 1}}] | \mathbf{k} \rangle \\
 &\quad + \langle \mathbf{k} | \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}^{\text{Diagram 2}}] | \mathbf{k} \rangle \} \\
 &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}^{\text{Diagram 3}}] | \mathbf{k} \rangle
 \end{aligned}$$


 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，合为一项之后，抵消掉最前面的  $1/2!$  因子


 结果表明这个过程的对称性因子为 6


# $iT_2^{(2)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

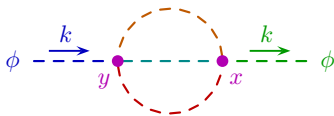
  $iT_2^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_2^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}^{\text{---}}] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}^{\text{---}}] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \text{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}^{\text{---}}] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$


 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，合为一项之后，抵消掉最前面的  $1/2!$  因子

 结果表明这个过程的对称性因子为 6


 相应的 Feynman 图具有 3 条全同内线连接两个不同的顶点，这 3 条内线有 3! 种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为 3! = 6





$iT_3^{(2)}$  缩并结构

 第 3 种情况包含两种缩并结构，

$$\begin{aligned}
 iT_3^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 6 \cdot 6 \cdot 2 \int d^4x d^4y \{ \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]} + \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]} \} \\
 &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} \int d^4x d^4y N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]
 \end{aligned}$$


 在第一步中，花括号内的两项具有**交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性**，合为一项则抵消掉最前面的 **1/2! 因子**

 花括号内的两项具有**相同的组合因子**

 在每一项中，从  $\phi^4(x)$  和  $\phi^4(y)$  里面分别取 **2 个  $\phi(x)$**  和 **2 个  $\phi(y)$**  出来的方法有  $C_4^2 C_4^2 = 6 \cdot 6$  种，将这 2 个  $\phi(x)$  和 2 个  $\phi(y)$  彼此缩并的**排列方法有 2! 种**

 因而共同的**组合因子为 6 · 6 · 2**

$iT_3^{(2)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图

  $iT_3^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为


$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_3^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} 2 \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{red}} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{blue}} | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

 在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组


合因子为 2，结果表明对称性因子为 4




$iT_3^{(2)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图

  $iT_3^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

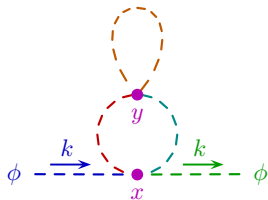
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_3^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} 2 \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{brown brackets}} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \overbrace{N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]}^{\text{blue brackets}} | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

 在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组合因子为 2，结果表明对称性因子为 4

 在相应的 Feynman 图里面，始末端连接同一顶点的 1 个圈贡献一个因子 2

 连接两个不同顶点的 2 条全同内线有 2! 种排列方法

 故 Feynman 图的对称性因子为  $2 \cdot 2 = 4$



# 动量空间 Feynman 规则

 转到动量空间,  $\phi^4$  理论的 Feynman 规则如下

① 实标量玻色子入射外线:  $\phi \overset{p}{\dashrightarrow} \bullet = 1$

② 实标量玻色子出射外线:  $\bullet \dashrightarrow \phi = 1$

③ 实标量玻色子传播子:  $\bullet \dashrightarrow \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

④  $\phi^4$  相互作用顶点:   $= -i\lambda$

⑤ 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系

⑥ 每个未定的圈动量  $p^\mu$  贡献一个积分  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

⑦ 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子

# 动量空间 Feynman 规则

 转到动量空间,  $\phi^4$  理论的 Feynman 规则如下

① 实标量玻色子入射外线:  $\phi \overset{p}{\dashrightarrow} \bullet = 1$

② 实标量玻色子出射外线:  $\bullet \dashrightarrow \phi = 1$


③ 实标量玻色子传播子:  $\bullet \dashrightarrow \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

④  $\phi^4$  相互作用顶点:   $= -i\lambda$

⑤ 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系


⑥ 每个未定的圈动量  $p^\mu$  贡献一个积分  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

⑦ 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子

 将  $\phi^4$  相互作用项  $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$  中的 4 个场算符  $\phi$  剥离, 乘以  $i$ , 还要再乘上 4 个  $\phi$  的排列数  $4!$ , 才得到顶点规则的表达式  $-i\lambda$


## 7.4 节 一般内外线 Feynman 规则

 上述讨论表明，**外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论**，它们是由拉氏量中的自由部分决定的，**具有一般性**


 本节讨论**复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则**，这些规则适用于各种相关的相互作用理论


## 7.4 节 一般内外线 Feynman 规则

 上述讨论表明，**外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论**，它们是由拉氏量中的自由部分决定的，**具有一般性**

 本节讨论**复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则**，这些规则适用于各种相关的相互作用理论

**(1) 复标量场 φ(x)** 描述的玻色子有正反之分，引入两种动量为 **p** 的单粒子态，

 **正标量玻色子 φ** 的单粒子态  $|\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$

 **反标量玻色子 φ̄** 的单粒子态  $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_p} b_p^\dagger |0\rangle$

 φ(x) 与**正标量玻色子初态**的缩并为

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x) |\mathbf{p}^+\rangle} &\equiv \phi^{(+)}(x) |\mathbf{p}^+\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_q e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq \cdot x} [a_q, a_p^\dagger] |0\rangle = \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq \cdot x} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle \end{aligned}$$

 第四步用到**产生湮灭算符的对易关系**

# 复标量场与初末态的缩并

 φ<sup>†</sup>(x) 与反标量玻色子初态的缩并为

$$\overline{\langle \mathbf{p}^- | \phi^\dagger(x) \rangle} \equiv \langle \mathbf{p}^{+} | \phi^\dagger(x) \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_p} b_p^\dagger |0\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle$$

 φ<sup>†</sup>(x) 与正标量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}^+ | \phi^\dagger(x) \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_p} a_p \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_q^\dagger e^{iq \cdot x} \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] \rangle = \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \rangle = \langle 0 | e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

 φ(x) 与反标量玻色子末态的缩并为

$$\overline{\langle \mathbf{p}^- | \phi(x) \rangle} \equiv \langle \mathbf{p}^- | \phi^{(-)}(x) \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_p} b_p \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q^\dagger e^{iq \cdot x} = \langle 0 | e^{ip \cdot x}$$

## 复标量场一般内外线规则

① 用带箭头的虚线表示复标量玻色子的运动，线上的箭头可认为是某种  $U(1)$  荷流动的方向，或者说是玻色子数流动的方向

② 由上述结果及 Feynman 传播子表达式，复标量场的位置空间内外线规则如下

$$\phi \text{ --- } \overset{p}{\blacktriangleright} \text{ --- } \bullet x = \langle 0 | \overline{\phi(x)} | \mathbf{p}^+ \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) | \mathbf{p}^+ \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

$$\bar{\phi} \text{ --- } \overset{p}{\blacktriangleleft} \text{ --- } \bullet x = \langle 0 | \overline{\phi^\dagger(x)} | \mathbf{p}^- \rangle = \langle 0 | \phi^{\dagger(+)}(x) | \mathbf{p}^- \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

$$x \bullet \text{ --- } \overset{p}{\blacktriangleright} \text{ --- } \phi = \langle \mathbf{p}^+ | \overline{\phi^\dagger(x)} | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \text{ --- } \overset{p}{\blacktriangleleft} \text{ --- } \bar{\phi} = \langle \mathbf{p}^- | \overline{\phi(x)} | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^- | \phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \text{ --- } \overset{p}{\blacktriangleright} \text{ --- } \bullet y = \overline{\phi(y)} \phi^\dagger(x) = D_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

③ 其中  $m_\phi$  是标量玻色子  $\phi$  的质量

# 有质量实矢量场

(2) 有质量实矢量场  $A^\mu(x)$  描述纯中性矢量玻色子  $A$ ，具有 3 种螺旋度  $\lambda = \pm, 0$

🎾 记动量为  $\mathbf{p}$ 、螺旋度为  $\lambda$  的  $A$  粒子态为  $|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

⚾  $A^\mu(x)$  与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned} \overline{A^\mu(x)} |\mathbf{p}, \lambda\rangle &\equiv A^{\mu(+)}(x) |\mathbf{p}, \lambda\rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm, 0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'} e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm, 0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') e^{-iq \cdot x} [a_{\mathbf{q}, \lambda'}, a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger] |0\rangle \\ &= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm, 0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') e^{-iq \cdot x} \delta_{\lambda', \lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \end{aligned}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系



# 有质量实矢量场一般外线规则

🏐  $A^\mu(x)$  与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned} & \overline{\langle \mathbf{p}, \lambda | A^\mu(x) \rangle} \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) \rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm, 0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger e^{iq \cdot x} \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm, 0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | [a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger] e^{iq \cdot x} \\ &= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm, 0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{iq \cdot x} = \langle 0 | \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$


🏏 用波浪线表示有质量实矢量玻色子的运动，相应的位置空间外线规则为

$$\begin{aligned} A, \lambda; \mu \text{ --- } \overset{\mathbf{p}}{\longrightarrow} \bullet x &= \overline{\langle 0 | A^\mu(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle} = \langle 0 | A^{\mu(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} \\ x \bullet \overset{\mathbf{p}}{\longrightarrow} \text{---} A, \lambda; \mu &= \langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{A^\mu(x)} | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$


# 非协变项


- 🎤 现在讨论有质量实矢量场的内线规则
- 🎱 前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子** 表达式包含一个**非协变项**
- 🎱 接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被**相互作用哈密顿量密度**中**非协变项**的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**

# 非协变项


 现在讨论有质量实矢量场的内线规则


 前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子** 表达式包含一个**非协变项**

 接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被**相互作用哈密顿量密度**中**非协变项**的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**


 假设相互作用拉氏量具有  $\mathcal{L}_1 = -gJ_\mu A^\mu$  的形式，则 6.1.2 小节讨论表明**相互作用绘景**中的相互作用哈密顿量密度为  $\mathcal{H}_1(x) = gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(x)]^2$


  $g$  是**耦合常数**， $m_A$  是**实矢量玻色子的质量**，右边第二项就是**非协变项**

  $iT$  展开式的第 1 阶为  $iT^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{T} \left[ gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x)J^0(x) \right]$


 第 2 阶为  $iT^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \mathcal{T} \left\{ \left( gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(x)]^2 \right) \times \left( gJ_\nu(y)A^\nu(y) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(y)]^2 \right) \right\}$

# $g^2$ 阶

 Feynman 传播子  $\overline{A^\mu(x)A^\nu(y)} = \Delta_F^{\mu\nu}(x-y)$  出现在  $n \geq 2$  的  $iT^{(n)}$  中

 比如,  $iT^{(2)}$  包含一个涉及 Feynman 传播子的  $g^2$  阶的项,

$$\begin{aligned} iT_1^{(2)} &= \frac{(ig)^2}{2!} \int d^4x d^4y \mathbf{N}[\overline{J_\mu(x)A^\mu(x)J_\nu(y)A^\nu(y)}] \\ &= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathbf{N}[J_\mu(x)J_\nu(y)\Delta_F^{\mu\nu}(x-y)] \\ &= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathbf{N}\left\{ \overbrace{J_\mu(x)J_\nu(y)}^{\text{Feynman 传播子中的非协变项}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} - \frac{i}{m_A^2} g^{\mu 0} g^{\nu 0} \delta^{(4)}(x-y) \right] \right\} \end{aligned}$$

 另一方面,  $iT^{(1)}$  也包含一个  $g^2$  阶的项,

$$\begin{aligned} iT_1^{(1)} &= -i \int d^4x \mathbf{N}\left[\frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x)J^0(x)\right] = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathbf{N}\left[\frac{i}{m_A^2} J^0(x)J^0(y)\delta^{(4)}(x-y)\right] \\ &= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathbf{N}\left[\frac{i}{m_A^2} \overbrace{J_\mu(x)J_\nu(y)g^{\mu 0}g^{\nu 0}\delta^{(4)}(x-y)}^{\text{源自 } \mathcal{H}_1(x) \text{ 的非协变项}}\right] \end{aligned}$$

# 有质量实矢量场一般内线规则

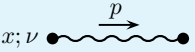
👂 在微扰论的  $g^2$  阶计算中，必须同时考虑  $iT_1^{(2)}$  和  $iT_1^{(1)}$  的贡献

📺 两者相加，则**非协变项恰好相消**，得到一个 Lorentz 协变的表达式

$$iT_1^{(2)} + iT_1^{(1)} = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y N \left\{ J_\mu(x) J_\nu(y) \left[ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \right] \right\}$$

🎯 上式方括号里面的部分是 Feynman 传播子表达式中的 **Lorentz 协变项**，在实际计算中，只有这一项有贡献

🔗 因此可以将有质量实矢量场的位置空间内线规则设置为



$x; \nu \bullet \overset{p}{\curvearrowright} \bullet y; \mu = \overline{A^\mu(y)} A^\nu(x)$  的 Lorentz 协变项

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

# 无质量实矢量场

(3) 无质量实矢量场  $A^\mu(x)$  描述纯中性无质量矢量玻色子  $A$ , 有 2 种螺旋度  $\lambda = \pm$

♟ 记动量为  $\mathbf{p}$ 、螺旋度为  $\lambda$  的相应  $A$  粒子态为  $|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

🎲  $A^\mu(x)$  正能解部分和负能解部分可以表达成

$$A^{\mu(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) b_{\mathbf{p}, \sigma} + \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} \right]$$

$$A^{\mu(-)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{ip \cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) b_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger + \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger \right]$$

中  $A^\mu(x)$  与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\overline{A^\mu(x) |\mathbf{p}, \lambda\rangle} \equiv A^{\mu(+)}(x) |\mathbf{p}, \lambda\rangle$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} e^{-iq \cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{q}, \sigma) b_{\mathbf{q}, \sigma} + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'} \right] \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$$


$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} e^{-iq \cdot x} \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{q}, \sigma) [b_{\mathbf{q}, \sigma}, a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu}(\mathbf{q}, \lambda') [a_{\mathbf{q}, \lambda'}, a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger] \right\} |0\rangle$$

$$= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu}(\mathbf{q}, \lambda') e^{-iq \cdot x} \delta_{\lambda' \lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} |0\rangle$$

# 无质量实矢量场一般内外线规则

  $A^\mu(x)$  与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned} & \overbrace{\langle \mathbf{p}, \lambda | A^\mu(x) \rangle} \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} e^{iq \cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{q}, \sigma) b_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger \right] \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{q}, \sigma) [a_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') [a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger] \right\} \\ &= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{iq \cdot x} = \langle 0 | \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

 用波浪线表示无质量实矢量玻色子的运动，在 Feynman 规范下，无质量实矢量场的位置空间内外线规则为

$$\begin{aligned} A, \lambda; \mu \overset{p}{\rightsquigarrow} \bullet x &= \langle 0 | \overbrace{A^\mu(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \langle 0 | A^{\mu(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} \\ x \overset{p}{\rightsquigarrow} A, \lambda; \mu &= \overbrace{\langle \mathbf{p}, \lambda | A^\mu(x) | 0 \rangle} = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} \\ x; \nu \overset{p}{\rightsquigarrow} \bullet y; \mu &= \overbrace{A^\mu(y) A^\nu(x)} = \Delta_F^{\mu\nu}(y - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \end{aligned}$$

# 动量空间一般内外线 Feynman 规则

🌻 转到动量空间中，有以下一般内外线 Feynman 规则

① 正标量玻色子入射外线:  $\phi \text{ --- } \overset{p}{\rightarrow} \text{ --- } \bullet = 1$

② 反标量玻色子入射外线:  $\bar{\phi} \text{ --- } \overset{p}{\leftarrow} \text{ --- } \bullet = 1$

③ 正标量玻色子出射外线:  $\bullet \text{ --- } \rightarrow \text{ --- } \phi = 1$

④ 反标量玻色子出射外线:  $\bullet \text{ --- } \overset{p}{\leftarrow} \text{ --- } \bar{\phi} = 1$

⑤ 复标量玻色子传播子:  $\bullet \text{ --- } \overset{p}{\rightarrow} \text{ --- } \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$



# 动量空间一般内外线 Feynman 规则

7 有质量实矢量玻色子入射外线:  $A, \lambda; \mu \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \sim \\ \bullet \end{array} = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

8 有质量实矢量玻色子出射外线:  $\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \sim \end{array} A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$

9 有质量实矢量玻色子传播子:  $\nu \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \sim \\ \bullet \end{array} \mu = \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon}$

10 无质量实矢量玻色子入射外线:  $A, \lambda; \mu \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \sim \\ \bullet \end{array} = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

11 无质量实矢量玻色子出射外线:  $\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \sim \end{array} A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$

12 无质量实矢量玻色子传播子:  $\nu \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \sim \\ \bullet \end{array} \mu = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$  (Feynman 规范)