量 子 场 论

第 6 章　量子场的相互作用

6.5 节　散射截面和衰变宽度

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 6 月 10 日

6.5 节 散射截面和衰变宽度

🚪 **没有相互作用**时，S **算符**就是恒等算符 $\mathbb{I}$，S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|i\rangle$

🪟 **存在相互作用**时，$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n \, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

🪑 这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $\boxed{S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T}$

🪜 其中 T **算符**包含**所有 $n \geq 1$ 的项** 👉 S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

🛏️ 右边**第一项**意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率**自由**地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

🛋️ 由此可见，S 矩阵中**真正描述相互作用**的项是 T **矩阵元** $\mathrm{i}T_{fi} \equiv \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

6.5 节　散射截面和衰变宽度

没有相互作用时，S 算符就是恒等算符 $\mathbb{I}$，S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\,|i\rangle = \langle f|i\rangle$

存在相互作用时，$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $\boxed{S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T}$

其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项　S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见，S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $\mathrm{i}T_{fi} \equiv \langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$

由于能动量守恒定律，初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 必定等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ，这意味着 T 矩阵元的形式为

$$\boxed{\mathrm{i}T_{fi} = \langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\,\mathrm{i}\mathcal{M}}$$

四维 δ 函数体现了能动量守恒定律；$\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，称为不变矩阵元，或不变散射振幅 (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数

6.5.1 小节 跃迁概率

发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \dfrac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$

根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$$

6.5.1 小节　跃迁概率

发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \dfrac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$

根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$$

由于 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$

四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\boxed{\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)}$

故 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \displaystyle\int \mathrm{d}^4x = \tilde{V}\tilde{T}$，$\tilde{V}$ 是空间区域的体积，$\tilde{T}$ 是时间范围的长度

对于全空间全时间积分，$\tilde{V}$ 和 $\tilde{T}$ 趋于无穷大

于是推出 $|T_{fi}|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$

6.5.1 小节　跃迁概率

- 发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \dfrac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$
- 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$$

- 由于 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\boxed{\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)}$
- 故 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \displaystyle\int \mathrm{d}^4x = \tilde{V}\tilde{T}$，$\tilde{V}$ 是空间区域的体积，$\tilde{T}$ 是时间范围的长度
- 对于全空间全时间积分，$\tilde{V}$ 和 $\tilde{T}$ 趋于无穷大
- 于是推出 $|T_{fi}|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$
- 对于时空坐标的函数 $f(x)$，四维 Fourier 变换约定为 $\boxed{\displaystyle\tilde{f}(p) = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} f(x)}$
- 四维 Fourier 逆变换为 $\boxed{\displaystyle f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\tilde{f}(p)}$

初态和末态

现在讨论 2 体初态到 n 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 n 个粒子的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{A}} a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{B}} |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

此处**省略**了产生算符的螺旋度指标（或者说，自旋指标）

$|0\rangle$ 是真空态，理论中任意湮灭算符作用到它身上都将得到零

初态和末态

现在讨论 2 体初态到 n 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 n 个粒子的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{A}} a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{B}} |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

此处**省略**了产生算符的螺旋度指标（或者说，自旋指标）

$|0\rangle$ 是真空态，理论中任意湮灭算符作用到它身上都将得到零

类似地，末态可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{2E_j}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_j}\right) |0\rangle, \quad E_j = p^0_j = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m^2_j}$$

其中 $\mathbf{p}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 是 n 个末态粒子的动量

此时，初态和末态的四维总动量分别是 $p^\mu_i = p^\mu_\mathcal{A} + p^\mu_\mathcal{B}$ 和 $p^\mu_f = \sum_{j=1}^{n} p^\mu_j$

初末态内积

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个不同的量子场描述时，将初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的张量积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的真空态

参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} \,|\, \mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

初末态内积

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个不同的量子场描述时，将初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的张量积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的**真空态**

参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} \,|\, \mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是由同一量子场描述的**全同粒子**时，若 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \neq \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，**也能推出这个结果**

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_1)]$$

如果末态**不包含全同粒子**，同理可得 $\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，**跃迁概率**化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2 \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V} \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于**一组特定的末态动量** $\{p_j\}$，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，**跃迁概率**化为

$$P_{fi}=\frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}=\frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}=\frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于**一组特定的末态动量** $\{p_j\}$，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}}=\frac{P_{fi}}{\tilde{T}}=\left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

此处**四维 δ 函数**可以分解为

$$\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)=\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_{\mathcal{A}}+\mathbf{p}_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_j\right)\delta\left(E_{\mathcal{A}}+E_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}E_j\right)$$

在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取**任意满足运动学要求**的值，而**能动量守恒定律**对应的**运动学条件** $p^\mu_{\mathcal{A}}+p^\mu_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p^\mu_j=0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

一维动量相空间

- 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分
- 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$
- 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

  [曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]
- 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(\mathrm{i}px)$
- 结合周期性边界条件，有 $\exp(-\mathrm{i}pL/2) = \exp(\mathrm{i}pL/2)$，故 $\exp(\mathrm{i}pL) = 1$
- 这意味着 $pL = 2k\pi$，$(k \in \mathbb{Z})$，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L \ (k \in \mathbb{Z})$

一维动量相空间

📙 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

☘️ 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

☘️ 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(\mathrm{i}px)$

🌿 结合周期性边界条件，有 $\exp(-\mathrm{i}pL/2) = \exp(\mathrm{i}pL/2)$，故 $\exp(\mathrm{i}pL) = 1$

🌾 这意味着 $pL = 2k\pi$，$(k \in \mathbb{Z})$，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L\ (k \in \mathbb{Z})$

🌽 **当 $L \to \infty$ 时**，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \to \mathrm{d}p, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p$$

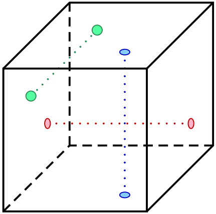
👉 $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p$$

单位时间内跃迁概率

推广到三维情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的**对应点等同**

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \dfrac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3),\quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \to \infty$ 时，有 $\displaystyle\sum_{k_1 k_2 k_3} \to \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int d^3p$

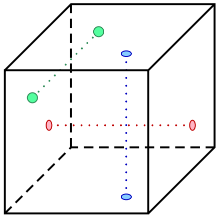


单位时间内跃迁概率

推广到三维情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，周期性边界条件相当于将立方体表面上任意一点视作与位于相对的面上的对应点等同

满足此条件的动量本征值为 $\mathbf{p} = \dfrac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3), \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \to \infty$ 时，有 $\displaystyle\sum_{k_1 k_2 k_3} \to \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int d^3p$



考虑 n 个末态粒子所有动量取值，对 $R_{\{p_j\}}$ 作末态相空间积分，得到单位时间内 $2 \to n$ 散射过程的总跃迁概率

$$R = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int d^3p_j\right) R_{\{p_j\}}$$

$$= \frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\tilde{V}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

2.3.4 小节讨论表明，上式中相空间体积元 $\dfrac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 Lorentz 不变的，而且积分 $\displaystyle\int \frac{d^3p_j}{2E_j} = \int d^4p_j\, \delta(p_j^2 - m_j^2)\theta(p_j^0)$ 囊括满足质壳条件且能量为正的所有物理动量

末态对称性因子

- 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立
- 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以**相应的**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，从而**避免**对**全同量子态**的**重复计数**
- 如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$\boxed{\mathcal{S} = \prod_k n_k!}$$

- **单位时间跃迁概率**变成

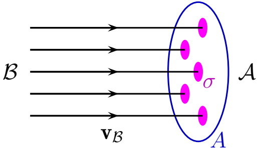
$$R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2$$

6.5.2 小节 散射截面

🚲 现在讨论束流打靶实验

🍏 如右图所示，固定靶 (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ 粒子组成，束流 (beam) 由 $\mathcal{B}$ 粒子组成

🍊 设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的运动速度相同，记为 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$，按照狭义相对论，$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$



6.5.2 小节　散射截面

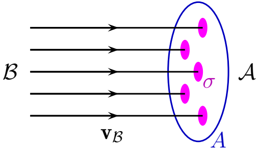
🚲 现在讨论**束流打靶**实验

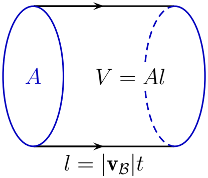
🍏 如**右图**所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ **粒子**组成，**束流** (beam) 由 $\mathcal{B}$ **粒子**组成

🍊 设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的**运动速度**相同，记为 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$，按照**狭义相对论**，$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$

🫐 记束流的**横截面积**为 A，则 t **时间内**束流的一个横截面经过的**体积**为 $V = A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$

🥭 再设束流中 $\mathcal{B}$ 粒子的**数密度**为 $n_{\mathcal{B}}$，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}V = n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$





🍓 在**单位时间**内穿过**单位面积**的 $\mathcal{B}$ 粒子数称为**流密度**，记作 $j_{\mathcal{B}}$，通过下式计算，

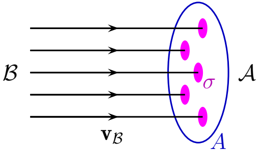
$$j_{\mathcal{B}} = \frac{N_{\mathcal{B}}}{At} = \frac{n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t}{At} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$$

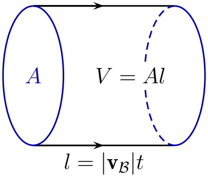
散射截面

考虑**流密度**为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$

这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定





散射截面

考虑**流密度**为 $j_\mathcal{B} = n_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 的束流打到由 $N_\mathcal{A}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_\mathcal{A}\, j_\mathcal{B}\, \sigma\, t$

这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

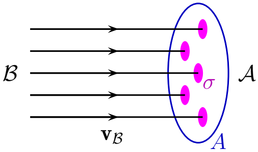
散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定

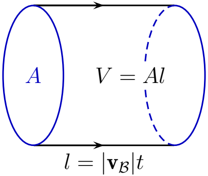
截面的常用单位是**靶** (barn)，记作 b，

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 = 2.568\times10^3\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

带**词头**的**小单位**满足 $1\ \mathrm{b} = 10^9\ \mathrm{nb} = 10^{12}\ \mathrm{pb} = 10^{15}\ \mathrm{fb}$

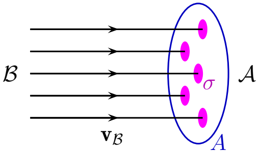
从而 $1\ \mathrm{GeV}^{-2} = 3.894\times10^8\ \mathrm{pb} = 3.894\times10^{-28}\ \mathrm{cm}^2$





散射截面

- 考虑流密度为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$
- 这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)
- 散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的相互作用性质决定

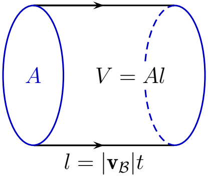


- 截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1\ \text{b} = 10^{-28}\ \text{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \text{GeV}^{-2}$$

- 带词头的小单位满足 $1\ \text{b} = 10^9\ \text{nb} = 10^{12}\ \text{pb} = 10^{15}\ \text{fb}$
- 从而 $1\ \text{GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8\ \text{pb} = 3.894 \times 10^{-28}\ \text{cm}^2$
- 单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_{\mathcal{A}} j_{\mathcal{B}} \sigma}{V} = \frac{N_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \sigma}{V} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$$



- $n_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{A}}/V$ 相当于 $\mathcal{A}$ 粒子在体积 V 中的数密度

$\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

🏍 如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} = 1/\tilde{V}$

🍌 **单位时间单位体积内散射次数** $\mathcal{R}$ 与**单位时间内跃迁概率** R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

🍑 将 $R = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2$ 代入

🍎 得到 $2 \to n$ **散射过程**的**截面**表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

- 如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_\mathcal{A} = n_\mathcal{B} = 1/\tilde{V}$
- 单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R}$ 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$
- 将 $R = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 代入
- 得到 $2 \to n$ 散射过程的截面表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_\mathcal{A} n_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{B}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{B}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

- 上式对 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系成立
- 需要将上式推广到任意惯性系，以适用于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 处在任意运动状态的情况
- 为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量
- 上式最后一行中除第二个因子 $(4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{B}|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止**的参考系中，$|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的**相对速度**
- $\mathbf{v}_\mathcal{A} = \dfrac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，**相对速度**为 $\boxed{v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|}$
- 然而，$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{rel}}$ **并不是 Lorentz 不变量**

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止**的参考系中，$|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的**相对速度**
- $\mathbf{v}_\mathcal{A} = \dfrac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，**相对速度**为 $\boxed{v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|}$
- 然而，$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{rel}}$ **并不是 Lorentz 不变量**
- 引入 **Møller 速度** $\boxed{v_{\mathrm{M\o l}} \equiv \dfrac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}} \sqrt{(p_\mathcal{A} \cdot p_\mathcal{B})^2 - m_\mathcal{A}^2 m_\mathcal{B}^2}}$
- 则**入射流因子** $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{M\o l}}$ 是 **Lorentz 不变量**
- 用 $v_{\mathrm{M\o l}}$ 取代 $|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$，将 **Lorentz 不变的散射截面**定义为

Christian Møller
(1904–1980)

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{M\o l}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止**的参考系中，$|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的**相对速度**
- $\mathbf{v}_\mathcal{A} = \dfrac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，**相对速度**为 $\boxed{v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|}$
- 然而，$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{rel}}$ **并不是 Lorentz 不变量**
- 引入 **Møller 速度** $\boxed{v_{\mathrm{Møl}} \equiv \dfrac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}} \sqrt{(p_\mathcal{A} \cdot p_\mathcal{B})^2 - m_\mathcal{A}^2 m_\mathcal{B}^2}}$

Christian Møller
(1904–1980)

- 则**入射流因子** $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{Møl}}$ 是 **Lorentz 不变量**
- 用 $v_{\mathrm{Møl}}$ 取代 $|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$，将 **Lorentz 不变的散射截面**定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4 E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

- 相应的**单位时间单位体积内散射次数** $\mathcal{R} = n_\mathcal{A} n_\mathcal{B} \sigma v_{\mathrm{Møl}}$ 也是 **Lorentz 不变**的
- 当 $\mathcal{A}$ **粒子静止**时，$E_\mathcal{A} = m_\mathcal{A}$，$\mathbf{p}_\mathcal{A} = \mathbf{0}$，故 $v_{\mathrm{Møl}} = \dfrac{1}{m_\mathcal{A} E_\mathcal{B}} \sqrt{m_\mathcal{A}^2 E_\mathcal{B}^2 - m_\mathcal{A}^2 m_\mathcal{B}^2}$ $= \dfrac{\sqrt{E_\mathcal{B}^2 - m_\mathcal{B}^2}}{E_\mathcal{B}} = \dfrac{|\mathbf{p}_\mathcal{B}|}{E_\mathcal{B}} = |\mathbf{v}_\mathcal{B}|$，此时散射截面**恢复**到上一页表达式

n 体不变相空间和微分散射截面

在 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\boxed{\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right)}$$

这个积分称为 n **体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面

在 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\boxed{\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)}$$

这个积分称为 n **体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\, v_{\text{Møl}}} \int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$$

如果在**散射截面表达式**中不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2$$

注意，计算微分截面时**不需要**考虑**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，因而 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \displaystyle\int \mathrm{d}\sigma$

如果**末态不包含全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 1$

Møller 速度与相对速度

- 讲义中推出了 **Møller 速度**与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

- 在**非相对论近似**下，$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|, |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \ll 1$，那么 $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2$ 相比于 $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2$ 是**高阶小量**，则 $v_{\text{Møl}} \simeq |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}$ 是 **Newton 力学**中粒子 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的**相对速度**
- 因此，可以认为 $v_{\text{Møl}}$ 是**相对速度**在**狭义相对论**中的**推广**

Møller 速度与相对速度

- 讲义中推出了 Møller 速度与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Mø l}} = \sqrt{|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2 - |\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2}$$

- 在非相对论近似下，$|\mathbf{v}_\mathcal{A}|, |\mathbf{v}_\mathcal{B}| \ll 1$，那么 $|\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2$ 相比于 $|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2$ 是高阶小量，则 $v_{\text{Mø l}} \simeq |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = v_{\text{rel}}$ 是 Newton 力学中粒子 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的相对速度
- 因此，可以认为 $v_{\text{Mø l}}$ 是相对速度在狭义相对论中的推广
- 如果 $\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B} = \mathbf{0}$，则 $v_{\text{Mø l}} = v_{\text{rel}}$ 严格成立，入射流因子化为 $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\text{rel}}$
- 满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_\mathcal{A}$ 或 $\mathbf{v}_\mathcal{B}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子静止
- 另一种情况是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到
- 在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

- 讲义中推出了 **Møller 速度**与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2 - |\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2}$$

- 在**非相对论近似**下，$|\mathbf{v}_\mathcal{A}|, |\mathbf{v}_\mathcal{B}| \ll 1$，那么 $|\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2$ 相比于 $|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2$ 是**高阶小量**，则 $v_{\text{Møl}} \simeq |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = v_{\text{rel}}$ 是 **Newton 力学**中粒子 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的**相对速度**
- 因此，可以认为 $v_{\text{Møl}}$ 是**相对速度**在**狭义相对论**中的**推广**
- 如果 $\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B} = \mathbf{0}$，则 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$ 严格成立，**入射流因子**化为 $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\text{rel}}$
- 满足**这个条件**的一种情况是 $\mathbf{v}_\mathcal{A}$ 或 $\mathbf{v}_\mathcal{B}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子**静止**
- 另一种情况是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 运动方向**相同**或**相反**，后者在**对撞机** (collider) 上经常遇到
- 在束流**迎头对撞**时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向
- 当 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \displaystyle\int d\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$
- 注意，对于**极端相对论极限**下的束流对撞，$|\mathbf{v}_\mathcal{A}| = |\mathbf{v}_\mathcal{B}| = 1$ 且 $\mathbf{v}_\mathcal{B} = -\mathbf{v}_\mathcal{A}$
- 故 $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = 2$，它是真空光速的 2 倍，**不再是**传统意义上的相对速度

质心系

- 对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的
- 不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系**（center-of-mass system，简称**质心系**）中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多
- 质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

- 质心系中系统的总能量称为**质心能**（center-of-mass energy）E_{CM}，满足

$$E_{\mathrm{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} E_j$$

- 它是 **Lorentz 不变量**，因为在质心系中有

$$(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 - (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 = E_{\mathrm{CM}}^2$$

- 在**任意参考系**中，可采用 $E_{\mathrm{CM}} = \sqrt{(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2} = \sqrt{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2}$ 来计算质心能

$2 \to n$ 散射的运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当所有末态粒子的动量 $\mathbf{p}_j$ **都为零**时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$

$2 \to n$ 散射的运动学条件

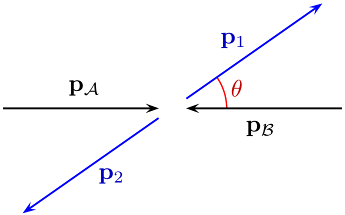
- 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当所有末态粒子的动量 $\mathbf{p}_j$ **都为零**时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$
- 所以，发生 $\mathbf{2 \to n}$ **散射**过程的**运动学条件**是

$$E_{\mathrm{CM}} > \sum_{j=1}^{n} m_j$$

- 即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**
- 若 $E_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j$，则末态相空间体积为零，散射过程**不能发生**
- 可以认为，**质心能** E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

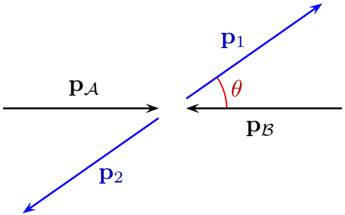
6.5.3 小节　两体散射运动学

- 接下来讨论 $\mathbf{2 \to 2}$ **散射**，即 $n=2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子
- 在质心系中，有 $\mathbf{p}_\mathcal{A}+\mathbf{p}_\mathcal{B}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{0}$，因而 $|\mathbf{p}_\mathcal{A}|=|\mathbf{p}_\mathcal{B}|$，$|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|$
- 可见，初态中 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$ 大小相等，方向相反，故 $v_{\text{Møl}}=v_{\text{rel}}$
- 末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是大小相等，方向相反
- 这些动量在质心系中的关系如右图所示



6.5.3 小节　两体散射运动学

- 接下来讨论 **$2 \to 2$ 散射**，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子
- 在**质心系**中，有 $\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因而 $|\mathbf{p}_\mathcal{A}| = |\mathbf{p}_\mathcal{B}|$，$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$
- 可见，初态中 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$ **大小相等**，**方向相反**，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$
- 末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是**大小相等**，**方向相反**
- 这些动量在质心系中的关系如**右图**所示
- θ 是 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 之间的夹角，称为**散射角** (scattering angle)



- **质心能**满足 $E_{\text{CM}} = E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B} = E_1 + E_2$
- 发生这个过程的**运动学条件**是 $E_{\text{CM}} > m_1 + m_2$
- **$2 \to 2$ 散射截面**写成 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\,|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \displaystyle\int \mathrm{d}\Pi_2\, |\mathcal{M}|^2$

2 体不变相空间

计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2)$$

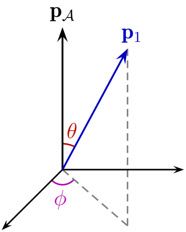
$$= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\mathrm{CM}} - E_1 - E_2)$$

- 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ 的积分
- 此积分看起来没有效果，但实际上要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$
- 这个条件在质心系中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间

计算 **2 体不变相空间**中的积分，得到

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - p_1 - p_2)$$
$$= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^2 4E_1E_2} \delta(E_{\text{CM}} - E_1 - E_2)$$
$$= \int d\Omega\, d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right)$$



- 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ **的积分**
- 此积分看起来没有效果，但实际上**要求** $\mathbf{p}_2$ **满足动量守恒条件** $\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$
- 这个条件在**质心系**中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$
- 第三步建立**球坐标系**，以 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 方向为极轴方向，以散射角 θ 为**极角** (polar angle)
- 将 $\mathbf{p}_1$ 投影在垂直于 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 的平面上以定义**方位角** (azimuthal angle) ϕ
- 将 $\mathbf{p}_1$ 动量体积元分解为 $d^3p_1 = |\mathbf{p}_1|^2\, d|\mathbf{p}_1|\, d\Omega$，**立体角微分** $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$
- **极角** θ 的取值范围为 $[0, \pi]$，**方位角** ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

$2 \to 2$ 散射截面

现在 δ **函数的宗量**是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$，得到

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int d\Omega\, d|\mathbf{p}_1|\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\, \delta\left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\
&= \int d\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \right|^{-1} \\
&= \int d\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
&= \int d\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}} \int d\Omega
\end{aligned}$$

$2\to 2$ 散射截面

现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)]=\sum_i \dfrac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，得到

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\, \delta\left(E_{\mathrm{CM}}-\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2}-\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_2^2}\right)\\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|}\left(E_{\mathrm{CM}}-\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2}-\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_2^2}\right)\right|^{-1}\\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2}}+\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_2^2}}\right)^{-1}\\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\left[|\mathbf{p}_1|\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\right]^{-1} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}\int \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

$2\to 2$ 散射截面化为 $\sigma=\dfrac{1}{\mathcal{S}}\dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\dfrac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}\displaystyle\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2$

注意，在后续计算 $|\mathcal{M}|^2$ 时必须要求能动量守恒关系 $p_{\mathcal{A}}^\mu+p_{\mathcal{B}}^\mu=p_1^\mu+p_2^\mu$ 成立

质心系中的微分散射截面是 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}=\dfrac{1}{64\pi^2}\dfrac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\dfrac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}}|\mathcal{M}|^2$

质心系能动量与质心能的关系

- 利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\mathrm{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

- 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\mathrm{CM}} - E_1)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 - 2E_{\mathrm{CM}}E_1 + E_1^2$
- 即 $2E_{\mathrm{CM}}E_1 = E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

- 可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**

质心系能动量与质心能的关系

利用末态粒子在**质心系**中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\rm CM} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\rm CM} - E_1)^2 = E_{\rm CM}^2 - 2E_{\rm CM}E_1 + E_1^2$

即 $2E_{\rm CM}E_1 = E_{\rm CM}^2 + m_1^2 - m_2^2$，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\rm CM}}(E_{\rm CM}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\rm CM}}(E_{\rm CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**；根据**质壳条件**，有

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\rm CM}^2}(E_{\rm CM}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\
&= \frac{1}{4E_{\rm CM}^2}[E_{\rm CM}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\rm CM}^2 m_1^2 - 2E_{\rm CM}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4E_{\rm CM}^2 m_1^2] \\
&= \frac{1}{4E_{\rm CM}^2}(E_{\rm CM}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\rm CM}^2 m_1^2 - 2E_{\rm CM}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2) \\
&= \frac{1}{4E_{\rm CM}^2}\lambda(E_{\rm CM}^2, m_1^2, m_2^2)
\end{aligned}$$

质心系微分散射截面

- 上式中的 **Källén 函数**定义为 $\boxed{\lambda(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz}$
- **末态**粒子的**动量**满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\sqrt{\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

- **质心系**中的**微分散射截面**化为

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2}$$

质心系微分散射截面

上式中的 **Källén 函数**定义为 $\lambda(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$

末态粒子的**动量**满足

$$|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\sqrt{\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2,m_1^2,m_2^2)}=\frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

质心系中的**微分散射截面**化为

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}=\frac{1}{128\pi^2E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\,\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2}$$

将类似分析应用到**初态**上，同理得到质心系中初态粒子**能量**是

$$E_{\mathcal{A}}=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\,(E_{\mathrm{CM}}^2+m_{\mathcal{A}}^2-m_{\mathcal{B}}^2),\quad E_{\mathcal{B}}=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\,(E_{\mathrm{CM}}^2+m_{\mathcal{B}}^2-m_{\mathcal{A}}^2)$$

动量大小是

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|=|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|=\frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

特殊情况

下面讨论一些特殊情况

(1) 如果散射过程关于对撞轴具有旋转对称性，则不变振幅 $\mathcal{M}$ 与 ϕ 无关，有

$$\int d\Omega\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴**具有**旋转对称性**，则不变振幅 $\mathcal{M}$ **与 ϕ 无关**，有

$$\int d\Omega\,|\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_\mathrm{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_\mathrm{CM}^2}\right) \int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2$$

(2) 如果初态粒子质量相同，$m_\mathcal{A} = m_\mathcal{B} = m_i$，末态粒子质量相同，$m_1 = m_2 = m_f$，则 $E_1 = (E_\mathrm{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_\mathrm{CM})$ 和 $E_2 = (E_\mathrm{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_\mathrm{CM})$ 意味着

$$E_\mathcal{A} = E_\mathcal{B} = E_1 = E_2 = \frac{E_\mathrm{CM}}{2}$$

即初末态粒子分别**平分质心能**

此时，如果末态 2 个粒子是**全同**的，那么末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$，否则 $\mathcal{S} = 1$

特殊情况

另一方面，由 $\lambda(x,y,y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = x(x-4y)$ 得

$$\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) = \frac{E_{\text{CM}}\beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) = \frac{E_{\text{CM}}\beta_f}{2}$$

其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义，β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况

从而，由 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}} = E_{\mathrm{CM}}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \left|\frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}} - \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}{E_{\mathcal{B}}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2\beta_i}{2}$$

于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2\beta_i}$$

特殊情况

从而，由 $\mathbf{p}_\mathcal{B} = -\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $E_\mathcal{B} = E_\mathcal{A} = E_\mathrm{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \left|\frac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}} - \frac{\mathbf{p}_\mathcal{B}}{E_\mathcal{B}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_\mathcal{A}|}{E_\mathcal{A}} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \frac{E_\mathrm{CM}^2 \beta_i}{2}$$

于是，**微分散射截面**化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\mathrm{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_\mathrm{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_\mathrm{CM}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同，$m_\mathcal{A} = m_\mathcal{B} = m_1 = m_2$，则 $\beta_i = \beta_f$，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\mathrm{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_\mathrm{CM}^2}$$

6.5.4 小节 衰变宽度

- 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定**的
- **不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子
- 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N = -\Gamma N \mathrm{d}t$
- 以此求得 $N(t) = N(0)\exp(-\Gamma t)$，即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按**指数规律**下降

6.5.4 小节　衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定**的

不稳定粒子 $\mathcal{A}$ 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子

假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N = -\Gamma N \mathrm{d}t$

以此求得 $N(t) = N(0)\exp(-\Gamma t)$，即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按**指数规律**下降

于是一个**静止** $\mathcal{A}$ 粒子在**衰变前存活的时间** t 服从**指数分布**，归一化概率密度为

$$P(t) = \Gamma\exp(-\Gamma t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

其中 $\boxed{\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}}$ 称为粒子的**寿命** (lifetime)

t 的期待值为 $\langle t\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \tau$，可见寿命是静止粒子存活的**平均时间**

在自然单位制中，Γ 具有质量的量纲，称为**衰变宽度** (decay width)，简称**宽度**

分支比和分宽度

$\mathcal{A}$ 粒子可能有**多种**衰变过程

在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\boxed{\Gamma_f = \Gamma B_f}$$

Γ_f 是 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中**衰变过程** $i \to f$ **在单位时间内发生的概率**

分支比和分宽度

- $\mathcal{A}$ 粒子可能有**多种**衰变过程
- 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f
- 衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\boxed{\Gamma_f = \Gamma B_f}$$

- Γ_f 是 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中**衰变过程** $i \to f$ **在单位时间内发生的概率**
- 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

- **总宽度** Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

- 接下来通过**跃迁概率**计算衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**
- 现在，**初态** $|i\rangle$ 只包含 1 个**粒子** $\mathcal{A}$，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子
- 因此，$|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$
- 类似于散射的情况，**衰变过程 $i \to f$ 的跃迁概率**是

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V} \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

- 对于一组**特定的末态动量 $\{p_j\}$**，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1} (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式

将末态动量的**所有取值**考虑进来，可得**单位时间**内衰变过程 $i \to f$ 的**发生概率**为

$$R_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 p_j \right) R_{\{p_j\}}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

其中 $\mathcal{S}$ 是末态对称性因子

在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，而 R_f 的值就是**分宽度** Γ_f，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

可见，**衰变分宽度**和**总宽度**是 **Lorentz 不变**的，因而**寿命**也是 **Lorentz 不变量**

衰变末态分布和运动学条件

- 若 $\mathcal{A}$ 粒子是**标量玻色子**，**自旋为 0**，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向
- 任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布
- 若 $\mathcal{A}$ 粒子具有**非零自旋**，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向
- 末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴
- 在实际情况中 $\mathcal{A}$ 粒子**自旋取向**往往是**不确定**的，但它**取不同方向的概率往往相同**
- 那么，可对 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向**取平均**，从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布

衰变末态分布和运动学条件

- 若 $\mathcal{A}$ 粒子是标量玻色子，自旋为 0，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向
- 任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布
- 若 $\mathcal{A}$ 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向
- 末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴
- 在实际情况中 $\mathcal{A}$ 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率往往相同
- 那么，可对 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布
- 由于 $\mathcal{A}$ 粒子静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{\mathrm{CM}} = m_{\mathcal{A}}$
- 因此，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^{n} m_j$$

- 即 $\mathcal{A}$ 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变

6.5.5 小节　衰变运动学

- 下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**，$n=2$，在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，由于 $E_{\text{CM}}=m_{\mathcal{A}}$，末态能量为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2)$$

- 末态动量为 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\dfrac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\dfrac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\dfrac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$

- **2 体不变相空间**变成 $\displaystyle\int d\Pi_2=\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\int d\Omega$

- $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\phi$，其中 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角

6.5.5 小节　衰变运动学

下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**，$n=2$，在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，由于 $E_{\mathrm{CM}}=m_{\mathcal{A}}$，末态能量为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2)$$

末态动量为 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\dfrac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\dfrac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\dfrac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$

2 体不变相空间变成 $\displaystyle\int d\Pi_2=\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\int d\Omega$

$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\phi$，其中 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角

两体衰变分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f&=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int d\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2}\int d\Omega\,|\mathcal{M}|^2\\&=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)\int d\Omega\,|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

如果 $m_1\neq m_2$，则两个末态粒子**必定不是全同粒子**，而 $\mathcal{S}=1$

两体衰变运动学

如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**

此时，$|\mathcal{M}|^2$ **与** θ、ϕ **无关**，对**立体角积分**只给出一个 4π **因子**，**分宽度**变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_\mathcal{A}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_\mathcal{A}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_\mathcal{A}^2}, \frac{m_2^2}{m_\mathcal{A}^2}\right)$$

两体衰变运动学

如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**

此时，$|\mathcal{M}|^2$ **与** θ、ϕ **无关**，对**立体角积分**只给出一个 4π **因子**，**分宽度**变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$$

进一步，如果**末态** 2 个粒子**质量相同**，$m_1 = m_2 = m$，则

$$\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

如果两个末态粒子是**全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 2$

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**，$n = 3$，衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int \mathrm{d}\Pi_3 \, |\mathcal{M}|^2$$

🎉 **3 体不变相空间**为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_1 - p_2 - p_3)$$

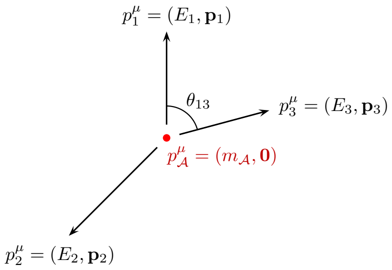
🎊 这里只在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

👉 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**，$|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**，$n = 3$，衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int \mathrm{d}\Pi_3 \, |\mathcal{M}|^2$$



3 体不变相空间为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_1 - p_2 - p_3)$$

- 这里只在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况
- 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**，$|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**
- **动量守恒定律**给出 $\mathbf{0} = \mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$，即末态 3 个粒子的三维动量之和为零
- 因而这 3 个三维动量矢量处在**同一个平面**内，如**右上图**所示
- 对于**确定**的 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$，第 2 个粒子的动量 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 由动量守恒定律决定

三体相空间

对 $\mathbf{p}_2$ 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{d^3p_1\, d^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int d\Omega_1\, d|\mathbf{p}_1|\, d\Omega_3\, d|\mathbf{p}_3|\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的**立体角**

三体相空间

对 $\mathbf{p}_2$ 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{d^3p_1\, d^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int d\Omega_1\, d|\mathbf{p}_1|\, d\Omega_3\, d|\mathbf{p}_3|\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的**立体角**

对粒子 1 的**质壳条件** $|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2=E_1^2$ 两边求微分，得 $2|\mathbf{p}_1|\,d|\mathbf{p}_1|=2E_1dE_1$，对粒子 3 也可以得到类似的式子，故 $|\mathbf{p}_1|\,d|\mathbf{p}_1|=E_1dE_1$，$|\mathbf{p}_3|\,d|\mathbf{p}_3|=E_3dE_3$

从而

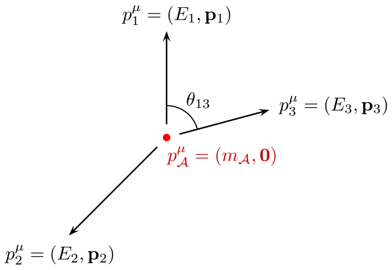
$$\int d\Pi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^5}\int dE_1\int dE_3\int d\Omega_1\int d\Omega_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)$$

这里将对 E_1 和 E_3 的积分放在外层，对 Ω_1 和 Ω_3 的积分放在内层

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

将 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3$ 方向之间的**夹角**记为 θ_{13}，则粒子 3 的立体角微分表示为

$$\mathrm{d}\Omega_3 = \sin\theta_{13}\,\mathrm{d}\theta_{13}\,\mathrm{d}\phi_3 = -\mathrm{d}\cos\theta_{13}\,\mathrm{d}\phi_3$$



ϕ_3 是粒子 3 动量方向的方位角

对于**确定**的 E_1 和 E_3，$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ 和 $|\mathbf{p}_3| = \sqrt{E_3^2 - m_3^2}$ 也是确定的，而 E_2 依赖于 E_1、E_3 和 $\cos\theta_{13}$，表达为

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}$$

从而 $\delta(m_\mathcal{A} - E_1 - E_2 - E_3)$ 的宗量**依赖于** $\cos\theta_{13}$，有

$$\frac{\partial E_2}{\partial\cos\theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

$$\left|\frac{\partial(m_\mathcal{A} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

相空间积分

利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，作出对 $\cos\theta_{13}$、ϕ_3、Ω_1 的积分，得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\mathrm{d}\Omega_1 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3 \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_{13}\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3 \int \mathrm{d}\Omega_1 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int \mathrm{d}E_1\int \mathrm{d}E_3\end{aligned}$$

相空间积分

利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，作出对 $\cos\theta_{13}$、ϕ_3、Ω_1 的积分，得

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int dE_1\, dE_3\, d\Omega_1 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^{1} d\cos\theta_{13}\, \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int dE_1\, dE_3 \int d\Omega_1 \int_0^{2\pi} d\phi_3\, \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int dE_1 \int dE_3\end{aligned}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3\, |\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 **E_1 和 E_3 的函数**，而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的**积分上下限**

变量替换

🚇 在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量

🔪 引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_{\mathcal{A}} - p_1)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_1$$

🔧 可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

🪓 由于 $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 组成的系统的**质心能**

变量替换

- 在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量
- 引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1+p_2)^2 = (p_\mathcal{A}-p_3)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2m_\mathcal{A}E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2+p_3)^2 = (p_\mathcal{A}-p_1)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_1^2 - 2m_\mathcal{A}E_1$$

- 可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$
- 由于 $p_{12}^2 = (p_1+p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 组成的系统的**质心能**
- 类似地，$\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的**不变质量**
- s_{12} **和** s_{23} **的微分**分别正比于 E_3 **和** E_1 **的微分**，

$$\mathrm{d}s_{12} = -2m_\mathcal{A}\mathrm{d}E_3, \quad \mathrm{d}s_{23} = -2m_\mathcal{A}\mathrm{d}E_1$$

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 利用 $\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3$ 和 $\mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1$ 将**分宽度**积分式改写为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} \mathrm{d}E_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} \mathrm{d}E_3\, |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} \mathrm{d}s_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} \mathrm{d}s_{23}\, |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2$$

- 使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} **和** s_{23} **的函数**
- **对** s_{23} **的积分**放在**内层**，**积分上下限依赖于** s_{12}

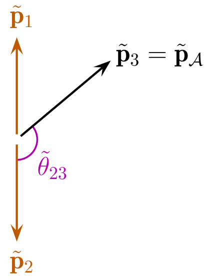
关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 利用 $\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3$ 和 $\mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1$ 将**分宽度**积分式改写为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}}\mathrm{d}E_1\int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}}\mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}}\mathrm{d}s_{12}\int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}}\mathrm{d}s_{23}\,|\mathcal{M}(s_{12},s_{23})|^2$$

- 使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 **s_{12} 和 s_{23} 的函数**
- **对 s_{23} 的积分**放在**内层**，**积分上下限依赖于 s_{12}**
- 接下来讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限
- 考虑**粒子 1 和 2 的质心系**，有 $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$
- 这里用**波浪线**标记此参考系中的物理量
- 在这个参考系中，**质心能** $\tilde{E}_{\mathrm{CM}} = \sqrt{s_{12}}$
- **粒子 2 的能量为** $\tilde{E}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(s_{12} + m_2^2 - m_1^2)$



$\tilde{E}_3$ 与 s_{12} 的关系

🚔 动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_{\mathcal{A}} - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_{\mathcal{A}}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\,\tilde{p}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{p}_3 \\ &= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3 + 2\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\ &= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\ &= m_{\mathcal{A}}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2 \end{aligned}$$

$\tilde{E}_3$ 与 s_{12} 的关系

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_\mathcal{A} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_\mathcal{A}$，由 s_{12} 的 **Lorentz 不变性**有

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_\mathcal{A} - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_\mathcal{A}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\,\tilde{p}_\mathcal{A}\cdot\tilde{p}_3 \\
&= m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_\mathcal{A}\tilde{E}_3 + 2\,\tilde{\mathbf{p}}_\mathcal{A}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_3 = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\
&= m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\
&= m_\mathcal{A}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2
\end{aligned}
$$

整理得 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 = m_\mathcal{A}^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2$，两边平方，推出

$$
\begin{aligned}
4(\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_\mathcal{A}^2)\tilde{E}_3^2 &= (m_\mathcal{A}^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2)^2 \\
&= (m_\mathcal{A}^2 - s_{12} - m_3^2)^2 + 4\tilde{E}_3^4 + 4(m_\mathcal{A}^2 - s_{12} - m_3^2)\tilde{E}_3^2
\end{aligned}
$$

再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2 = (m_\mathcal{A}^2 - s_{12} - m_3^2)^2$，故**粒子 3 的能量**为

$$
\tilde{E}_3 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_\mathcal{A}^2 - s_{12} - m_3^2)
$$

对于**确定的** s_{12}，$\tilde{E}_2$ 和 $\tilde{E}_3$ 是**确定**的，而且是 **Lorentz 不变**的

s_{23} 的积分上下限

🚕 另一方面，由 s_{23} 的 **Lorentz 不变性**有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

⛓ 这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| \cos\tilde{\theta}_{23}$，$\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

🧹 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最小值**

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

s_{23} 的积分上下限

另一方面，由 s_{23} 的 **Lorentz 不变性**有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| \cos\tilde{\theta}_{23}$，$\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最小值**

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最大值**

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

对于**确定的 s_{12}**，以上两式分别给出 s_{23} 的积分**下限**和**上限**

注意，$s_{23}^{\min}$ 和 $s_{23}^{\max}$ 是 **Lorentz 不变**的

s_{12} 的积分上下限

在**粒子 1 和 2 的质心系**中，$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$，有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得**最小值** $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得**最大值**

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

注意，$s_{12}^{\min}$ 和 $s_{12}^{\max}$ 也是 **Lorentz 不变**的

s_{12} 的积分上下限

🚘 在**粒子 1 和 2 的质心系**中，$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$，有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

🧷 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得**最小值** $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

📌 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

📎 当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得**最大值**

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

🪛 注意，$s_{12}^{\min}$ 和 $s_{12}^{\max}$ 也是 **Lorentz 不变**的