

量子场论

第 6 章 量子场的相互作用

6.5 节 散射截面和衰变宽度

余钊焕


中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>


更新日期：2024 年 1 月 22 日




6.5 节 散射截面和衰变宽度

 没有相互作用时， S 算符就是恒等算符 \mathbb{I} ， S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle$

 存在相互作用时， $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathbb{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$


 这个级数的 $n=0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$


 其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项  S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|iT|i\rangle$


 右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

 由此可见， S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $iT_{fi} \equiv \langle f|iT|i\rangle$


6.5 节 散射截面和衰变宽度

 没有相互作用时， S 算符就是恒等算符 \mathbb{I} ， S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle$


 存在相互作用时， $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathbb{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

 这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$

 其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项  S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | iT | i \rangle$

 右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

 由此可见， S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $iT_{fi} \equiv \langle f | iT | i \rangle$


 由于能动量守恒定律，初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 必定等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ ，这意味着 T 矩阵元的形式为

$$iT_{fi} = \langle f | iT | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$$


 四维 δ 函数体现了能动量守恒定律； \mathcal{M} 是 Lorentz 不变的，称为不变矩阵元，或不变散射振幅 (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数


6.5.1 小节 跃迁概率

 发生相互作用时, $i \rightarrow f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$, 分子为


$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

 由于 $\int d^4x e^{\pm i p \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm i p^0 x^0} \int d^3x e^{\mp i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$


 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\int d^4x e^{\pm i p \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$


6.5.1 小节 跃迁概率

 发生相互作用时, $i \rightarrow f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$


 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$, 分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$


 由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$


 故 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \tilde{V} \tilde{T}$, \tilde{V} 是空间区域的体积, \tilde{T} 是时间范围的长度

 对于全空间全时间积分, \tilde{V} 和 \tilde{T} 趋于无穷大


 于是推出 $|T_{fi}|^2 = \tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$


 对于时空坐标的函数 $f(x)$, 将 Fourier 变换约定为

$$\tilde{f}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x)$$

 Fourier 逆变换为 $f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{f}(p)$

初态和末态

 现在讨论 **2 体初态** 到 **n 体末态** 的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2 个粒子 A 和 B** ，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n 个粒子** 的末态 $|f\rangle$

 设初态中两个粒子的动量分别为 \mathbf{p}_A 和 \mathbf{p}_B ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_A E_B} a_{\mathbf{p}_A}^\dagger a_{\mathbf{p}_B}^\dagger |0\rangle, \quad E_{A,B} = p_{A,B}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{A,B}|^2 + m_{A,B}^2}$$

 此处省略了产生算符的**螺旋度指标** (或者说，**自旋指标**)

 $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**

初态和末态

现在讨论 **2 体初态** 到 **n 体末态** 的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2 个粒子 A 和 B** ，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n 个粒子** 的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 \mathbf{p}_A 和 \mathbf{p}_B ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_A E_B} a_{\mathbf{p}_A}^\dagger a_{\mathbf{p}_B}^\dagger |0\rangle, \quad E_{A,B} = p_{A,B}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{A,B}|^2 + m_{A,B}^2}$$

此处省略了产生算符的**螺旋度指标** (或者说，**自旋指标**)

$|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**


类似地，**末态**可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2E_j} a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \right) |0\rangle, \quad E_j = p_j^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}$$


其中 \mathbf{p}_j ($j = 1, \dots, n$) 是 n 个末态粒子的动量


此时，初态和末态的**四维总动量**分别是 $p_i^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=1}^n p_j^\mu$


初末态内积

 当 A 和 B 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，


$$|i\rangle = \sqrt{2E_A} a_{\mathbf{p}_A}^\dagger |0\rangle_A \otimes \sqrt{2E_B} a_{\mathbf{p}_B}^\dagger |0\rangle_B = |\mathbf{p}_A\rangle_A \otimes |\mathbf{p}_B\rangle_B$$

 这里 $|0\rangle_A$ 和 $|0\rangle_B$ 分别是描述 A 和 B 的两个量子场所对应的真空态


 参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

 利用 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_A\rangle_A$ 和 $|\mathbf{p}_B\rangle_B$ 的自我内积分别是


$$\langle \mathbf{p}_A | \mathbf{p}_A \rangle_A = 2E_A (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_A \tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_B | \mathbf{p}_B \rangle_B = 2E_B (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_B \tilde{V}$$


 于是得到 $\langle i | i \rangle = \langle \mathbf{p}_A | \mathbf{p}_A \rangle_A \langle \mathbf{p}_B | \mathbf{p}_B \rangle_B = 4E_A E_B \tilde{V}^2$


初末态内积

 当 A 和 B 粒子由两个**不同**的量子场描述时, 可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积,


$$|i\rangle = \sqrt{2E_A} a_{\mathbf{p}_A}^\dagger |0\rangle_A \otimes \sqrt{2E_B} a_{\mathbf{p}_B}^\dagger |0\rangle_B = |\mathbf{p}_A\rangle_A \otimes |\mathbf{p}_B\rangle_B$$

 这里 $|0\rangle_A$ 和 $|0\rangle_B$ 分别是描述 A 和 B 的两个量子场所对应的**真空态**


 参考: 实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

 利用 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$, 单粒子态 $|\mathbf{p}_A\rangle_A$ 和 $|\mathbf{p}_B\rangle_B$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_A | \mathbf{p}_A \rangle_A = 2E_A (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_A \tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_B | \mathbf{p}_B \rangle_B = 2E_B (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_B \tilde{V}$$

 于是得到 $\langle i | i \rangle = \langle \mathbf{p}_A | \mathbf{p}_A \rangle_A \langle \mathbf{p}_B | \mathbf{p}_B \rangle_B = 4E_A E_B \tilde{V}^2$

 当 A 和 B 是由同一量子场描述的全同粒子时, 若 $\mathbf{p}_A \neq \mathbf{p}_B$, 也能推出这个结果

 $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = 4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} (2\pi)^6 [\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)]$

 如果末态**不包含全同粒子**, 同理可得 $\langle f | f \rangle = \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^n(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^n(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^n(2E_j\tilde{V})\right]^{-1} (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j\right) |\mathcal{M}|^2$$

此处四维 δ 函数可以分解为

$$\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j\right) = \delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) \delta\left(E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n E_j\right)$$

在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取任意满足运动学要求的值，而能量守恒定律对应的运动学条件 $p_{\mathcal{A}}^{\mu} + p_{\mathcal{B}}^{\mu} - \sum_{j=1}^n p_j^{\mu} = 0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

📖 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态的动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

🍀 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

一维动量相空间

📖 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态的动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

🍀 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

🍀 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

🌱 结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ ，故 $\exp(ipL) = 1$

🌾 这意味着 $pL = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L$ ($k \in \mathbb{Z}$)

一维动量相空间

📖 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态的动量相空间**积分

🌱 考察**一维动量相空间**，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

🍀 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

🍀 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

🌱 结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ ，故 $\exp(ipL) = 1$

🌾 这意味着 $pL = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L$ ($k \in \mathbb{Z}$)

🌽 当 $L \rightarrow \infty$ 时，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \rightarrow dp, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

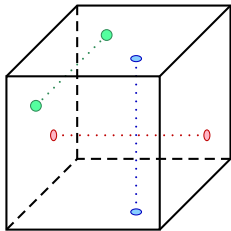
$$\text{👉} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将立方体表面上任意一点视作与位于相对的面上的**对应点**等同

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$



单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将立方体表面上任意一点视作与位于相对的面上的**对应点**等同

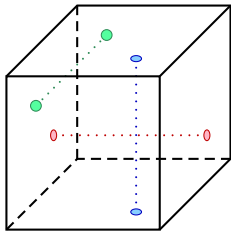
满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$

考虑 n 个末态粒子**所有动量取值**，对 $R_{\{p_j\}}$ 作**末态相空间积分**，得到**单位时间内** $2 \rightarrow n$ 散射过程的**跃迁概率**

$$R = \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}}$$

$$= \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$





2.3.4 小节的讨论表明，上式中**相空间体积元** $\frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 **Lorentz 不变**的，而且

相应积分正好囊括了满足**质壳条件**且**能量为正**的所有物理动量

末态对称性因子

 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立

 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以**相应的**末态对称性因子 S** ，从而**避免**量子态的**重复计算**

 如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$S = \prod_k n_k!$$

 **单位时间跃迁概率**变成

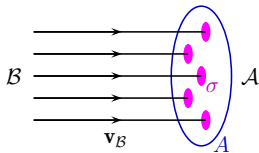
$$R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

6.5.2 小节 散射截面

🚲 现在讨论**束流打靶**实验

🍏 如右图所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 A 粒子组成，**束流** (beam) 由 B 粒子组成

🍊 设束流中每个 B 粒子的**运动速度**相同，记为 v_B ，按照**狭义相对论**， $v_B \equiv \mathbf{p}_B/E_B$



6.5.2 小节 散射截面

🚲 现在讨论**束流打靶**实验

🍏 如右图所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 A 粒子组成，**束流** (beam) 由 B 粒子组成

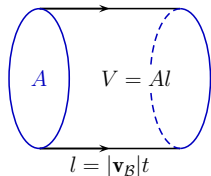
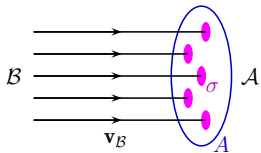
🍊 设束流中每个 B 粒子的**运动速度**相同，记为 \mathbf{v}_B ，按照**狭义相对论**， $\mathbf{v}_B \equiv \mathbf{p}_B/E_B$

🍷 记束流的**横截面积**为 A ，则 t 时间内束流的一个横截面经过的**体积**为 $V = A|\mathbf{v}_B|t$

🍏 再设束流中 B 粒子的**数密度**为 n_B ，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_B = n_B V = n_B A|\mathbf{v}_B|t$

🍏 在**单位时间**内穿过**单位面积**的 B 粒子数称为**流密度**，记作 j_B ，通过下式计算，

$$j_B = \frac{N_B}{At} = \frac{n_B A|\mathbf{v}_B|t}{At} = n_B|\mathbf{v}_B|$$

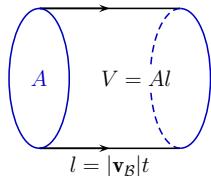
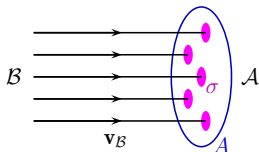


散射截面

考虑流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定



散射截面

考虑流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

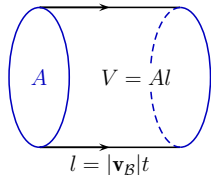
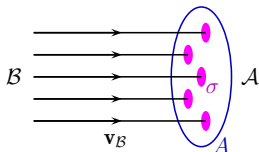
散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

带词头的小单位满足 $1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb}$

从而 $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb} = 3.894 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$



散射截面

考虑流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

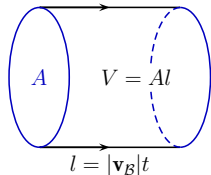
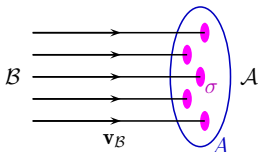
带词头的小单位满足 $1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb}$

从而 $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb} = 3.894 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$

单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_A j_B \sigma}{V} = \frac{N_A n_B |\mathbf{v}_B| \sigma}{V} = n_A n_B \sigma |\mathbf{v}_B|$$

$n_A = N_A/V$ 相当于 A 粒子在体积 V 中的数密度



A 粒子静止系中的散射截面

🚲 如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子，因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

🍌 单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

🍑 将 $R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 代入

🍏 得到 $2 \rightarrow n$ 散射过程的截面表达式

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_A n_B |\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}^2}{\tilde{V} |\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_B|} \\ &= \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_B|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

A 粒子静止系中的散射截面

🚲 如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子，因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

🍌 单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

🍑 将 $R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 代入

🍏 得到 $2 \rightarrow n$ 散射过程的截面表达式

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_A n_B |\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}^2}{\tilde{V} |\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_B|} \\ &= \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_B|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$


🍏 上式对 A 粒子静止的参考系成立


🍏 需要将上式推广到任意惯性系，以适用于 A 和 B 处在任意运动状态的情况

🍏 为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量

🍏 上式最后一行中除第二个因子 $(4E_A E_B |\mathbf{v}_B|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的

Lorentz 不变的散射截面

 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_B|$ 就是 B 与 \mathcal{A} 的相对速度

 $\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{p}_A}{E_A}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$

 然而, $E_A E_B v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_B|$ 就是 B 与 \mathcal{A} 的相对速度

🥑 $\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{p}_A}{E_A}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$

🍎 然而, $E_A E_B v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

🍆 引入 Møller 速度 $v_{\text{Møll}} \equiv \frac{1}{E_A E_B} \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$

🌶️ 则入射流因子 $E_A E_B v_{\text{Møll}}$ 是 Lorentz 不变量

🍄 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B v_{\text{Møll}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$



Christian Møller
(1904–1980)

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 A 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_B|$ 就是 B 与 A 的相对速度

🥑 $\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{p}_A}{E_A}$ 为 A 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$

🍎 然而, $E_A E_B v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

🍆 引入 Møller 速度 $v_{\text{Møll}} \equiv \frac{1}{E_A E_B} \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$

🌶️ 则入射流因子 $E_A E_B v_{\text{Møll}}$ 是 Lorentz 不变量

🍄 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B v_{\text{Møll}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$


🥥 相应的单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R} = n_A n_B \sigma v_{\text{Møll}}$ 也是 Lorentz 不变的


🍌 当 A 粒子静止时, $E_A = m_A$, $\mathbf{p}_A = \mathbf{0}$, 故 $v_{\text{Møll}} = \frac{1}{m_A E_B} \sqrt{m_A^2 E_B^2 - m_A^2 m_B^2}$
 $= \frac{\sqrt{E_B^2 - m_B^2}}{E_B} = \frac{|\mathbf{p}_B|}{E_B} = |\mathbf{v}_B|$, 此时散射截面恢复到上一节表达式




Christian Møller
(1904–1980)

n 体不变相空间和微分散射截面

 在 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素


 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right)$$

 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，


$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面


 在 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B v_{\text{Møll}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right)$$

 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B v_{\text{Møll}}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$


 如果在**散射截面表达式**中不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$d\sigma = \frac{1}{4E_A E_B v_{\text{Møll}}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$


 注意，计算微分截面时**不需要考虑末态对称性因子** S ，因而 $\sigma = \frac{1}{S} \int d\sigma$

 如果末态不包含全同粒子，则 $S = 1$

Møller 速度与相对速度

 讲义中推出了 **Møller 速度** 与 A 、 B 粒子运动速度的关系式


$$v_{\text{Mø}} = \sqrt{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|^2 - |\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B|^2}$$

 如果 $\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ ，则 $v_{\text{Mø}} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = v_{\text{rel}}$ ，即 Møller 速度与**相对速度**相同


 **入射流因子**化为 $E_A E_B v_{\text{rel}}$

 满足**这个条件**的一种情况是 \mathbf{v}_A 或 \mathbf{v}_B 为零，即 A 粒子或 B 粒子**静止**


 另一种情况是 A 与 B 运动方向**相同**或**相反**，后者在**对撞机** (collider) 上经常遇到

 在束流**迎头对撞**时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

 讲义中推出了 **Møller 速度** 与 A 、 B 粒子运动速度的关系式


$$v_{\text{Møller}} = \sqrt{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|^2 - |\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B|^2}$$


 如果 $\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ ，则 $v_{\text{Møller}} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = v_{\text{rel}}$ ，即 Møller 速度与**相对速度**相同


 **入射流因子**化为 $E_A E_B v_{\text{rel}}$


 满足**这个条件**的一种情况是 \mathbf{v}_A 或 \mathbf{v}_B 为零，即 A 粒子或 B 粒子**静止**


 另一种情况是 A 与 B 运动方向**相同**或**相反**，后者在**对撞机** (collider) 上经常遇到

 在束流**迎头对撞**时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

 当 $v_{\text{Møller}} = v_{\text{rel}}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$


 在**非相对论近似**下， $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ 确实是 A 与 B 的相对速度

 但是，对于**极端相对论极限**下的束流对撞， $|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = 1$ 且 $\mathbf{v}_B = -\mathbf{v}_A$

 故 $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = 2$ ，它是真空光速的 2 倍，显然**不是**真正意义的相对速度

质心系

 对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的

 不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系**（简称**质心系**，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多

 质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$


 质心系中系统的总能量称为**质心能**（center-of-mass energy） E_{CM} ，满足


$$E_{CM} = E_A + E_B = \sum_{j=1}^n E_j$$

 它是 **Lorentz 不变量**，因为在质心系中有


$$(p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = E_{CM}^2$$

2 → n 散射的运动学条件


 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式


 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生

 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件


 在质心系中，当末态粒子动量 \mathbf{p}_j 都为零时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$

2 → n 散射的运动学条件

 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式


 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生


 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件


 在质心系中，当末态粒子动量 p_j 都为零时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$

 所以，发生 $2 \rightarrow n$ 散射过程的**运动学条件**是

$$E_{\text{CM}} > \sum_{j=1}^n m_j$$

 即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**

 若 $E_{\text{CM}} = \sum_j m_j$ ，则末态相空间体积为零，散射过程**不能发生**

 可以认为，**质心能** E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

6.5.3 小节 两体散射运动学

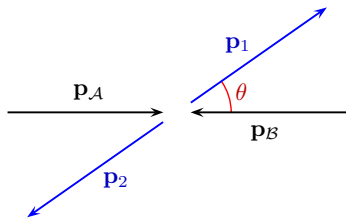
🚌 接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子

💡 在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

🕯️ 可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$

🕯️ 末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反

🔧 这些动量在质心系中的关系如右图所示



6.5.3 小节 两体散射运动学

🚌 接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子

💡 在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

🕯️ 可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi} = v_{rel}$

🕯️ 末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反

🔫 这些动量在质心系中的关系如右图所示

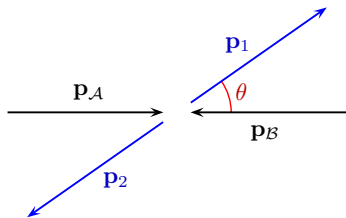
🕯️ θ 是 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_A 之间的夹角，称为散射角

(scattering angle)

🔍 质心能满足 $E_{CM} = E_A + E_B = E_1 + E_2$

🔭 发生这个过程的运动学条件是 $E_{CM} > m_1 + m_2$

🔭 $2 \rightarrow 2$ 散射截面写成
$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2$$




2 体不变相空间

 计算 **2 体不变相空间** 中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - E_1 - E_2) \end{aligned}$$

 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 \mathbf{p}_2 的积分

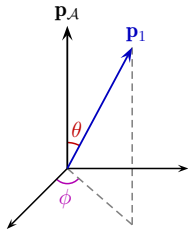
 此积分看起来没有效果，但实际上要求 \mathbf{p}_2 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

 这个条件在质心系中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间

🚗 计算 **2 体不变相空间** 中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \end{aligned}$$



📺 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 \mathbf{p}_2 的积分

📺 此积分看起来没有效果，但实际上要求 \mathbf{p}_2 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

📺 这个条件在质心系中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$


📺 第三步建立球坐标系，以 \mathbf{p}_A 方向为极轴方向，以散射角 θ 为极角 (polar angle)

📺 将 \mathbf{p}_1 投影在垂直于 \mathbf{p}_A 的平面上以定义方位角 (azimuthal angle) ϕ

📺 将 \mathbf{p}_1 动量体积元分解为 $d^3 p_1 = |\mathbf{p}_1|^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega$ ，立体角微分 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$


📺 极角 θ 的取值范围为 $[0, \pi]$ ，方位角 ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

2 → 2 散射截面

 现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数, 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, 得到

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} \right) \right|^{-1} \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}}
 \end{aligned}$$

2 → 2 散射截面


 现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数, 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, 得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \end{aligned}$$


 $2 \rightarrow 2$ 散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$


 质心系中的微分散射截面是 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系能动量


 利用末态粒子在**质心系**中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

 即 $2E_{\text{CM}}E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而


$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$


 可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**

质心系能动量


 利用末态粒子在**质心系**中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

 即 $2E_{\text{CM}}E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**；根据**质壳条件**，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} [E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\text{CM}}^2m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2 - 4E_{\text{CM}}^2m_1^2] \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\text{CM}}^2m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2) \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} \lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) \end{aligned}$$

质心系微分散射截面



上式中的 λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$

质心系微分散射截面



上式中的 λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$



将类似分析应用到初态上，同理得到质心系中初态粒子能量是


$$E_A = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_A^2 - m_B^2), \quad E_B = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_B^2 - m_A^2)$$



动量大小是

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_A^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_B^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

特殊情况

 下面讨论一些特殊情况


(1) 如果散射过程关于对撞轴具有旋转对称性，则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关，有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

 散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

 下面讨论一些特殊情况

(1) 如果散射过程关于碰撞轴具有旋转对称性，则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关，有


$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$


 散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$


(2) 如果初态粒子质量相同， $m_A = m_B = m_i$ ，末态粒子质量相同， $m_1 = m_2 = m_f$ ，则 $E_1 = (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{\text{CM}})$ 和 $E_2 = (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{\text{CM}})$ 意味着

$$E_A = E_B = E_1 = E_2 = \frac{E_{\text{CM}}}{2}$$

 即初末态粒子分别平分质心能

 此时，如果末态 2 个粒子是全同的，那么末态对称性因子 $S = 2$ ，否则 $S = 1$

特殊情况

 另一方面，由 $\lambda(x, y, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = x(x - 4y)$ 得

$$\lambda^{1/2} \left(1, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}}$$


 故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_i}{2}$$


$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_f}{2}$$

 其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_A|}{E_A} = \frac{|\mathbf{p}_B|}{E_B}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

 根据狭义相对论中运动速度的定义， β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况

 从而，由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$

 于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

特殊情况

 从而，由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{\text{CM}}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{\text{CM}}^2 \beta_i}{2}$$


 于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2 \beta_i}$$


(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同， $m_A = m_B = m_1 = m_2$ ，则 $\beta_i = \beta_f$ ，有


$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

6.5.4 小节 衰变宽度


 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定的**

 **不稳定粒子** A 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子


 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 A 粒子，每个 A 粒子在**单位时间内**发生衰变的**概率**是常数 Γ ，那么 $t + dt$ 时刻衰变引起的 A 粒子数量变化为 $dN = -\Gamma N dt$


 以此求得 $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即 A 粒子数量随时间按**指数规律**下降

6.5.4 小节 衰变宽度

 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定的**


 **不稳定粒子** \mathcal{A} 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子


 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 \mathcal{A} 粒子，每个 \mathcal{A} 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ ，那么 $t + dt$ 时刻衰变引起的 \mathcal{A} 粒子数量变化为 $dN = -\Gamma N dt$


 以此求得 $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即 \mathcal{A} 粒子数量随时间按**指数规律**下降

 于是一个**静止** \mathcal{A} 粒子在**衰变前存活的时间** t 服从**指数分布**，归一化概率密度为


$$P(t) = \Gamma \exp(-\Gamma t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$


 其中 $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$ 称为粒子的**寿命** (lifetime)

 t 的期待值为 $\langle t \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} t e^{-t/\tau} dt = \tau$ ，可见寿命是静止粒子存活的**平均时间**

 在自然单位制中， Γ 具有质量的量纲，称为**衰变宽度** (decay width)，简称**宽度**

分支比和分宽度

 \mathcal{A} 粒子可能有多种衰变过程


 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的概率称为此过程的分支比 (branching ratio)，记作 B_f

 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的分宽度 (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

 Γ_f 是 \mathcal{A} 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 在单位时间内发生的概率

分支比和分宽度

 A 粒子可能有**多种**衰变过程

 在一次衰变中, 某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的**概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio), 记作 B_f

 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

 Γ_f 是 A 粒子**静止系**中衰变过程 $i \rightarrow f$ 在**单位时间内**发生的**概率**


 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的, 故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$


$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

 **总宽度** Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

 接下来通过**跃迁概率**计算衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度**

 现在，**初态** $|i\rangle$ 只包含 1 个**粒子** \mathcal{A} ，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子

 因此， $|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$

 类似于散射的情况，**衰变过程** $i \rightarrow f$ 的**跃迁概率**是

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j V)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$


 对于一组**特定的末态动量** $\{p_j\}$ ，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j\right) |\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式

 将末态动量的**所有取值**考虑进来，可得**单位时间**内衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**发生概率**为

$$\begin{aligned}
 R_f &= \frac{1}{S} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\
 &= \frac{1}{S} \frac{1}{2E_A} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2
 \end{aligned}$$

 其中 S 是末态对称因子

 在 A 粒子静止系中， $E_A = m_A$ ，而 R_f 的值就是**分宽度** Γ_f ，故









$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

 可见，**衰变分宽度**和**总宽度**是 **Lorentz 不变**的，因而**寿命**也是 **Lorentz 不变量**

衰变末态分布和运动学条件

- 🚗 若 A 粒子是**标量玻色子**，**自旋为 0**，则 A 粒子静止系没有特殊的方向
- 👉 任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布
- ♟️ 若 A 粒子具有**非零自旋**，则自旋方向是 A 粒子静止系的特殊方向
- 👉 末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布，以 A 粒子自旋方向为轴
- ♠️ 在实际情况下， A 粒子**自旋取向**往往是**不确定的**，但它**取不同方向的概率相同**
- ❤️ 那么，可对 A 粒子自旋方向**取平均**，从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布

衰变末态分布和运动学条件

-  若 A 粒子是**标量玻色子**，**自旋为 0**，则 A 粒子静止系没有特殊的方向
-  任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布
-  若 A 粒子具有**非零自旋**，则自旋方向是 A 粒子静止系的特殊方向
-  末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布，以 A 粒子自旋方向为轴
-  在实际情况下， A 粒子**自旋取向**往往是不**确定**的，但它**取不同方向的概率相同**
-  那么，可对 A 粒子自旋方向**取平均**，从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布
-  由于 A 粒子**静止系**就是末态粒子的**质心系**，有 $E_{\text{CM}} = m_A$
-  因此，发生**衰变**的**运动学条件**是

$$m_A > \sum_{j=1}^n m_j$$

 即 A 粒子只能向**质量之和小于 m_A** 的其它粒子衰变