量 子 场 论

第 4 章 量子矢量场

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 1 月 22 日

第 4 章　量子矢量场

- ♓ 本章介绍矢量场 (vector field) 的正则量子化
- ↔️ 从 Lorentz 群的表示来看，标量场对应于恒等表示，矢量场对应于矢量表示
- ↕️ 而 Lorentz 群的其它表示对应于其它类型的场
- 🔄 实际上，为了让量子场论符合狭义相对性原理，由场构造出来的拉氏量必须是 Lorentz 不变的
- ↪️ 这就要求每个量子场处于 Lorentz 群某个线性表示或投影表示的表示空间中
- ✋ 接下来先分析 Lorentz 群的矢量表示
- 💪 再研究矢量场对应的自旋
- 🦵 然后分别讨论有质量矢量场和无质量矢量场

4.1 节　Lorentz 群的矢量表示

Lorentz 变换的无穷小参数 $\omega^{\alpha}{}_{\beta}$ 可以转化为

$$\begin{aligned}\omega^{\alpha}{}_{\beta} &= g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\beta\mu}) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\nu\mu}\delta^{\nu}{}_{\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\alpha\nu}\omega_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\beta}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}\end{aligned}$$

其中

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta})$$

4.1 节 Lorentz 群的矢量表示

Lorentz 变换的无穷小参数 $\omega^\alpha{}_\beta$ 可以转化为

$$\omega^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\beta\mu}) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\mu}\omega_{\nu\mu}\delta^\nu{}_\beta)$$
$$= \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\nu}\omega_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\beta) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$$
$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$$

其中

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$$

把 α 和 β 看作矩阵的行列指标，则 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 是 4×4 矩阵

$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 是反对称的，$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$，因而一共有 6 个独立矩阵

它的另一种写法是

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta = \mathrm{i}g_{\alpha\gamma}(g^{\mu\gamma}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\gamma}\delta^\mu{}_\beta) = \mathrm{i}(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\nu{}_\alpha\delta^\mu{}_\beta)$$

把无穷小 Lorentz 变换写成 $(\Lambda_\omega)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$

矢量表示的生成元矩阵

$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta})$ 与 $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{i}(g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta})$ 的对易关系为

$$
\begin{aligned}
& [\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}]^{\alpha}{}_{\beta} = (\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\gamma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\gamma}{}_{\beta} - (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\alpha}{}_{\gamma}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\gamma}{}_{\beta} \\
= {} & \mathrm{i}^2(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\gamma} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\gamma})(g^{\rho\gamma}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\sigma\gamma}\delta^{\rho}{}_{\beta}) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \\
= {} & -g^{\mu\alpha}g^{\rho\nu}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + g^{\mu\alpha}g^{\sigma\nu}\delta^{\rho}{}_{\beta} + g^{\nu\alpha}g^{\rho\mu}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\sigma\mu}\delta^{\rho}{}_{\beta} - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \\
= {} & g^{\nu\rho}(g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta}) + g^{\mu\rho}(g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}) \\
& + g^{\nu\sigma}(g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}) + g^{\mu\sigma}(g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta}) \\
= {} & \mathrm{i}[g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\mu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^{\alpha}{}_{\beta} + g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\nu\rho})^{\alpha}{}_{\beta}]
\end{aligned}
$$

矢量表示的生成元矩阵

$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$ 与 $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta = \mathrm{i}(g^{\rho\alpha}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\sigma\alpha}\delta^\rho{}_\beta)$ 的对易关系为

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}]^\alpha{}_\beta = (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\gamma{}_\beta - (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\alpha{}_\gamma(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta \\
&= \mathrm{i}^2(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma)(g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \\
&= -g^{\mu\alpha}g^{\rho\nu}\delta^\sigma{}_\beta + g^{\mu\alpha}g^{\sigma\nu}\delta^\rho{}_\beta + g^{\nu\alpha}g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\nu\alpha}g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\beta - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \\
&= g^{\nu\rho}(g^{\sigma\alpha}\delta^\mu{}_\beta - g^{\mu\alpha}\delta^\sigma{}_\beta) + g^{\mu\rho}(g^{\nu\alpha}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\sigma\alpha}\delta^\nu{}_\beta) \\
&\quad + g^{\nu\sigma}(g^{\mu\alpha}\delta^\rho{}_\beta - g^{\rho\alpha}\delta^\mu{}_\beta) + g^{\mu\sigma}(g^{\rho\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\rho{}_\beta) \\
&= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\mu\sigma})^\alpha{}_\beta - g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^\alpha{}_\beta - g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^\alpha{}_\beta + g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\nu\rho})^\alpha{}_\beta]
\end{aligned}$$

即 4×4 矩阵 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 满足 **Lorentz 代数关系**

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho})$$

注意上式与 $[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$ 形式相同

回顾 1.4 节，$\Lambda^\alpha{}_\beta$ 属于 **Lorentz 群**的 **4 维矢量表示**

因而 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 就是矢量表示的生成元矩阵，它们作用的对象是 **Lorentz 矢量**

矩阵级数 Λ

- **无穷小 Lorentz 变换** $(\Lambda_\omega)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ 的矩阵记法为

$$\Lambda_\omega = \mathbf{1} + \omega = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$$

- 这是**矩阵级数** $\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = e^\omega = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}$ 展开到 ω **一阶项**的结果

- 矩阵 ω 与度规矩阵 g 满足

$$(g^{-1}\omega^T g)^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\gamma}(\omega^T)_\gamma{}^\delta g_{\delta\beta} = g^{\alpha\gamma}\omega^\delta{}_\gamma g_{\delta\beta} = g^{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma} = -g^{\alpha\gamma}\omega_{\gamma\beta} = -\omega^\alpha{}_\beta$$

- 即 $g^{-1}\omega^T g = -\omega$，从而

$$g^{-1}\Lambda^T g = g^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega^T)^n}{n!}\right]g = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g^{-1}\omega^T g)^n}{n!} = \exp(g^{-1}\omega^T g) = e^{-\omega}$$

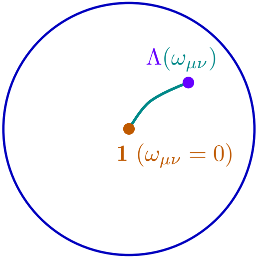
- 注意到 $[-\omega, \omega] = 0$，由 $e^{A+B} = e^A e^B$ 得 $g^{-1}\Lambda^T g\,\Lambda = e^{-\omega}e^{\omega} = e^{-\omega+\omega} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$

有限 Lorentz 变换

- $g^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}g\,\Lambda = \mathbf{1}$ 表明，$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$ 满足**保度规条件** $\Lambda^{\mathrm{T}}g\,\Lambda = g$
- 因此，这样定义的 Λ 确实是 **Lorentz 变换**
- 此时，变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 不是无穷小量，而具有**有限**的数值
- Λ 是用**矢量表示生成元** $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 表达出来的**有限变换** (finite transformation)

有限 Lorentz 变换

- $g^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}} g\,\Lambda = \mathbf{1}$ 表明，$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$ 满足**保度规条件** $\Lambda^{\mathrm{T}} g\,\Lambda = g$
- 因此，这样定义的 Λ 确实是 **Lorentz 变换**
- 此时，变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 不是无穷小量，而具有**有限**的数值
- Λ 是用**矢量表示生成元** $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 表达出来的**有限变换** (finite transformation)
- 变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 可以**连续地变化**到 $\omega_{\mu\nu} = 0$
- 故 Lorentz 变换 $\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$ 在群空间中与**恒等变换**相**连通**
- 因而它属于**固有保时向 Lorentz 群**
- 当 $\omega_{\mu\nu}$ **遍历**群空间中所有参数取值时，Lorentz 变换 Λ 遍历**所有**的固有保时向 Lorentz 群元素



$\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$

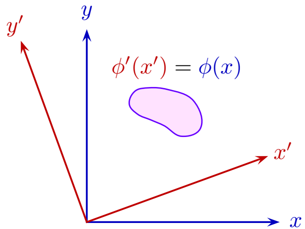
4.2 节　量子场的 Lorentz 变换

4.2.1 小节　量子标量场的 Lorentz 变换

- 经过**正则量子化**之后，**标量场** $\phi(x)$ 是物理 **Hilbert 空间**中的**算符**
- 类似于 $P'^{\mu} \equiv U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}$，$\phi(x)$ 的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\phi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda) = \phi(x)$$

- 即**变换后**标量场在**变换后时空点**上的**值**等于**变换前**标量场在**变换前时空点**上的**值**
- 右图以**空间旋转变换**为例说明这种情况



4.2 节 量子场的 Lorentz 变换

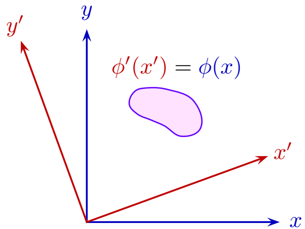
4.2.1 小节 量子标量场的 Lorentz 变换

- 经过**正则量子化**之后，**标量场 $\phi(x)$** 是物理 **Hilbert 空间**中的**算符**
- 类似于 $P'^{\mu} \equiv U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}$，$\phi(x)$ 的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\phi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda) = \phi(x)$$

- 即**变换后**标量场在**变换后时空点**上的**值**等于**变换前**标量场在**变换前时空点**上的**值**
- 右图以**空间旋转变换**为例说明这种情况
- 注意 $x' = \Lambda x$ 等价于 $x = \Lambda^{-1}x'$
- 作替换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，得

$$U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$



拉氏量的 Lorentz 不变性

另一方面，$\partial^\mu\phi(x)$ 的 Lorentz 变换为

$$U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda)=\partial'^\mu\phi'(x')=\partial'^\mu\phi(x)=\Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu\phi(x)$$

将实标量场**量子化**之后，自由实标量场**拉氏量算符** $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x')&=U^{-1}(\Lambda)\mathcal{L}(x')U(\Lambda)=\frac{1}{2}U^{-1}(\Lambda)[\partial'^\mu\phi(x')\partial'_\mu\phi(x')-m^2\phi^2(x')]U(\Lambda)\\&=\frac{1}{2}\{g_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)\partial'^\nu\phi(x')U(\Lambda)-m^2[U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda)]^2\}\\&=\frac{1}{2}[g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\partial^\rho\phi(x)\Lambda^\nu{}_\sigma\partial^\sigma\phi(x)-m^2\phi^2(x)]=\frac{1}{2}[g_{\rho\sigma}\partial^\rho\phi(x)\partial^\sigma\phi(x)-m^2\phi^2(x)]\\&=\mathcal{L}(x)\end{aligned}$$

倒数第二步用到**保度规条件**，从而 $U^{-1}(\Lambda)\mathcal{L}(x)U(\Lambda)=\mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$

可见，**拉氏量算符** $\mathcal{L}(x)$ 的 **Lorentz 变换规则与标量场算符** $\phi(x)$ **一样**，它确实是一个 **Lorentz 标量**

对于无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$，$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta$ 化为

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha} g^{\mu\beta} (\delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta) = g_{\nu\beta} g^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}\omega_{\nu\beta} = \delta^\mu{}_\nu - g^{\mu\beta}\omega_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu$$

从而 $(\Lambda^{-1}x)^\mu = (\delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

微分算符 $\hat{L}^{\mu\nu}$

对于**无穷小 Lorentz 变换** $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$，$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta$ 化为

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}(\delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta) = g_{\nu\beta}g^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}\omega_{\nu\beta} = \delta^\mu{}_\nu - g^{\mu\beta}\omega_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu$$

从而 $(\Lambda^{-1}x)^\mu = (\delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

在 x 处将 $U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ **右边展开到 ω 的一阶项**，得

$$\begin{aligned}\phi(\Lambda^{-1}x) &= \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu\phi(x) = \phi(x) - \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu\phi(x)\\ &= \phi(x) - \frac{1}{2}(\omega_{\nu\mu}x^\mu\partial^\nu + \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu)\phi(x)\\ &= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\phi(x)\end{aligned}$$

其中**微分算符** $\hat{L}^{\mu\nu}$ 定义为 $\boxed{\hat{L}^{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)}$

微分算符 $\hat{L}^{\mu\nu}$

- 对于**无穷小 Lorentz 变换** $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$，$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta$ 化为

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}(\delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta) = g_{\nu\beta}g^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}\omega_{\nu\beta} = \delta^\mu{}_\nu - g^{\mu\beta}\omega_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu$$

- 从而 $(\Lambda^{-1}x)^\mu = (\delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

- **在 x 处**将 $U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ **右边展开到 ω 的一阶项**，得

$$\begin{aligned}
\phi(\Lambda^{-1}x) &= \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) = \phi(x) - \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu\phi(x) \\
&= \phi(x) - \frac{1}{2}(\omega_{\nu\mu}x^\mu\partial^\nu + \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu)\phi(x) \\
&= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\phi(x)
\end{aligned}$$

- 其中**微分算符** $\hat{L}^{\mu\nu}$ 定义为 $\boxed{\hat{L}^{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)}$

- 根据 $U(\mathbf{1}+\omega) = \mathbb{I} - \mathrm{i}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}/2$，将**左边**展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right)\phi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right) \\
&= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\phi(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\phi(x), J^{\mu\nu}]
\end{aligned}$$

标量场自旋为零

由于 $\omega_{\mu\nu}$ 是任意的，$\phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\phi(x), J^{\mu\nu}]$ 给出

$$[\phi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\phi(x)$$

$\hat{L}^{\mu\nu}$ 的纯空间分量 $\hat{L}^{ij}$ 的对偶三维矢量算符为

$$\hat{L}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{L}^{jk} = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}(x^j\partial^k - x^k\partial^j) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k - \varepsilon^{ikj}x^j\partial^k) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k$$

写成三维矢量外积的形式是 $\hat{\mathbf{L}} = -\mathrm{i}\,\mathbf{x}\times\nabla$

标量场自旋为零

由于 $\omega_{\mu\nu}$ 是任意的，$\phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}[\phi(x), J^{\mu\nu}]$ 给出

$$[\phi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\phi(x)$$

$\hat{L}^{\mu\nu}$ 的纯空间分量 $\hat{L}^{ij}$ 的对偶三维矢量算符为

$$\hat{L}^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\hat{L}^{jk} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ijk}(x^j\partial^k - x^k\partial^j) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k - \varepsilon^{ikj}x^j\partial^k) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k$$

写成三维矢量外积的形式是 $\hat{\mathbf{L}} = -\mathrm{i}\,\mathbf{x}\times\nabla$

由于 $-\mathrm{i}\nabla = \hat{\mathbf{p}}$ 是**动量微分算符**，可以看出 $\hat{\mathbf{L}}$ 是**轨道角动量微分算符**

根据 $J^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}J^{jk}$，将 $[\phi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\phi(x)$ 的纯空间分量改写为

$$[\phi(x), \mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\,\phi(x)$$

总角动量算符 $\mathbf{J}$ 与 $\phi(x)$ 的对易子给出了**轨道角动量**，但**没有给出自旋角动量**

这说明**标量场没有自旋**，因此**标量玻色子的自旋为 0**

4.2.2 小节　量子矢量场的 Lorentz 变换

对标量场 $\phi(x)$ 取时空导数得到 **Lorentz 矢量** $\partial^\mu\phi(x)$，**自身**就是 **Lorentz 矢量**的**量子场** $A^\mu(x)$ 应具有类似于 $\partial'^\mu\phi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu\phi(x)$ 的**固有保时向 Lorentz 变换**形式，即

$$A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

或者写成 $U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$

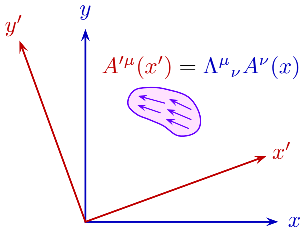
这就是**量子矢量场 $A^\mu(x)$** 的 **Lorentz 变换形式**

4.2.2 小节 量子矢量场的 Lorentz 变换

对标量场 $\phi(x)$ 取时空导数得到 **Lorentz 矢量** $\partial^\mu\phi(x)$，**自身**就是 **Lorentz 矢量**的**量子场** $A^\mu(x)$ 应具有类似于 $\partial'^\mu\phi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu\phi(x)$ 的**固有保时向 Lorentz 变换**形式，即

$$A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

- 或者写成 $U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$
- 这就是**量子矢量场 $A^\mu(x)$** 的 **Lorentz 变换形式**
- 右图以**空间旋转变换**为例说明矢量场的变换情况
- 在 Lorentz 变换下，除了矢量场的**分布区域**变换到**新参考系**的**相应区域**之外，矢量场的分量也要以 **Lorentz 矢量分量**的身份发生变换



矢量场的无穷小 Lorentz 变换

根据 $\Lambda_\omega = \mathbf{1} + \omega = \mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$，$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ 的无穷小形式为

$$A'^\mu(x') = \left[\delta^\mu{}_\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right]A^\nu(x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

与 1.7.3 小节一般场的无穷小 Lorentz 变换 $\Phi'_a(x') = \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)$ 比较可知，生成元矩阵 $I^{\mu\nu}$ 在矢量表示中对应于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$

矢量场的无穷小 Lorentz 变换

根据 $\Lambda_\omega = \mathbf{1} + \omega = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$，$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ 的**无穷小形式**为

$$A'^\mu(x') = \left[\delta^\mu{}_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right]A^\nu(x) = A^\mu(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

与 1.7.3 小节一般场的无穷小 Lorentz 变换 $\Phi'_a(x') = \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)$ 比较可知，**生成元矩阵** $I^{\mu\nu}$ 在**矢量表示**中对应于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$

利用 $(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$，**在** x **处**将 $A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ **展开到** ω **的一阶项**，得

$$\begin{aligned} A^\nu(\Lambda^{-1}x) &= A^\nu(x) - \omega^\alpha{}_\beta x^\beta \partial_\alpha A^\nu(x) = A^\nu(x) - \omega_{\alpha\beta}x^\beta\partial^\alpha A^\nu(x) \\ &= A^\nu(x) + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)A^\nu(x) = A^\nu(x) - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{L}^{\alpha\beta}A^\nu(x) \end{aligned}$$

从而，$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ **右边**展开为

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) &= \left[\delta^\mu{}_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right]\left[A^\nu(x) - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{L}^{\alpha\beta}A^\nu(x)\right] \\ &= A^\mu(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[\hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)] \end{aligned}$$

自旋角动量

$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ **左边**的无穷小展开式是

$$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right) A^\mu(x) \left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right)$$

$$= A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}A^\mu(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}A^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}]$$

与 $\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)]$ 比较，得到

$$[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}] = \hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

$A^\mu(x)$ 具有**三重身份**，**Hilbert 空间**中的**算符** $J^{\rho\sigma}$ 作用在其**算符身份**上，**微分算符** $\hat{L}^{\rho\sigma}$ 作用在其**场身份**上，**矢量表示生成元** $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ 作用在其 **Lorentz 矢量身份**上

自旋角动量

$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ 左边的无穷小展开式是

$$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right) A^\mu(x) \left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right)$$

$$= A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}A^\mu(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}A^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}]$$

与 $\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)]$ 比较，得到

$$[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}] = \hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

$A^\mu(x)$ 具有三重身份，Hilbert 空间中的算符 $J^{\rho\sigma}$ 作用在其算符身份上，微分算符 $\hat{L}^{\rho\sigma}$ 作用在其场身份上，矢量表示生成元 $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ 作用在其 Lorentz 矢量身份上

$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为 $\mathcal{J}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{J}^{jk}$，即 $\boldsymbol{\mathcal{J}} = (\mathcal{J}^{23}, \mathcal{J}^{31}, \mathcal{J}^{12})$

由于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系，$\mathcal{J}^i$ 满足 $\mathbf{SU(2)}$ 代数关系 $[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\mathcal{J}^k$

从而推出 $[A^\mu(x), \mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\, A^\mu(x) + \boldsymbol{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu A^\nu(x)$

总角动量算符 $\mathbf{J}$ 的作用不仅给出轨道角动量，还给出由 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 描述的自旋角动量

$\mathcal{J}^i$ 的具体形式

- $\mathcal{J}^i$ 是 SU(2) 群某个线性表示的生成元，具体的矩阵形式为

$$(\mathcal{J}^1)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{23})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{2\mu}\delta^3{}_\nu - g^{3\mu}\delta^2{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -\mathrm{i} \\ & & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{J}^2)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{31})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{3\mu}\delta^1{}_\nu - g^{1\mu}\delta^3{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \mathrm{i} \\ & & 0 & \\ & -\mathrm{i} & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{J}^3)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{12})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{1\mu}\delta^2{}_\nu - g^{2\mu}\delta^1{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\mathrm{i} & \\ & \mathrm{i} & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

矢量场自旋为 1

只关注**纯空间部分**，有

$$(\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1)^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^2\mathcal{J}^2)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = (\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1 + \mathcal{J}^2\mathcal{J}^2 + \mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 2\delta^i{}_j$

矢量场自旋为 1

- 只关注**纯空间部分**，有

$$(\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1)^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^2\mathcal{J}^2)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- 因此 $(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = (\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1 + \mathcal{J}^2\mathcal{J}^2 + \mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 2\delta^i{}_j$

- 根据 3.3.1 小节 $\mathrm{SU}(2)$ 群表示理论，**二阶 Casimir 算符** $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$ 的本征值为 $s(s+1)$
- 即 $(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = s(s+1)\delta^i{}_j$，其中 s 为**自旋量子数**
- 可见，矢量场 $A^\mu(x)$ 空间分量的自旋量子数为 $\boxed{s=1}$
- 量子化之后，矢量场 $A^\mu(x)$ 描述**自旋为 1** 的粒子
- $s=1$ 表明 $\mathcal{J}^1$、$\mathcal{J}^2$ 和 $\mathcal{J}^3$ 的纯空间部分是 **SU(2) 群伴随表示** $D^{(1)}$ 的生成元矩阵，而 $D^{(1)}$ 也是 **SO(3) 群**的**基础表示**

4.3 节 有质量矢量场的正则量子化

类似于电磁场，可以对**任意矢量场** A^μ 定义**反对称**的**场强张量**

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

对于一个**自由**的**有质量**的**实矢量场** A^μ，**Lorentz 不变**的**拉氏量**写作

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

其中，第一项是动能项，第二项是质量项，而 $m > 0$ 是矢量场的**质量**

动能项可用 A^μ 表达成

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{4}[(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu - (\partial_\mu A_\nu)\partial^\nu A^\mu - (\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu + (\partial_\nu A_\mu)\partial^\nu A^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu
\end{aligned}$$

Proca 方程

对 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu = -F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu$$

Euler-Lagrange 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu$$

因此，A^μ 的经典运动方程是 **Proca 方程**

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

Alexandru Proca
(1897–1955)

Lorenz 条件

由 $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}$ 可知，$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

从 **Proca 方程** $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$ 得到

$$0 = \partial_\nu(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu A^\nu = m^2\partial_\nu A^\nu$$

质量 $m \neq 0$ 意味着矢量场 A^μ 应当满足 **Lorenz 条件**

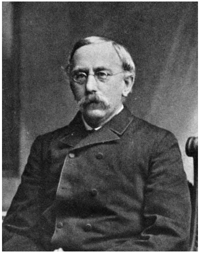
$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

从而

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^2 A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = \partial^2 A^\nu$$

Proca 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$ 等价于符合 **Lorenz 条件**的 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)A^\mu(x) = 0$$



Ludvig Lorenz
(1829–1891)

等时对易关系

矢量场 A^μ 对应的**共轭动量密度**为

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 = -F_{0\mu}$$

时间分量和**空间分量**分别是

$$\pi_0 = -F_{00} = 0, \quad \pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = -F_{0i}$$

$\pi_0 = 0$ **不能**作为与 A^0 对应的正则共轭场，因而**不能**为 A^0 构造正则对易关系

等时对易关系

矢量场 A^μ 对应的**共轭动量密度**为

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 = -F_{0\mu}$$

时间分量和**空间分量**分别是

$$\pi_0 = -F_{00} = 0, \quad \pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = -F_{0i}$$

$\pi_0 = 0$ **不能**作为与 A^0 对应的正则共轭场，因而**不能**为 A^0 构造正则对易关系

实际上，由于 **Lorenz 条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$ 的存在，A^μ 只有 **3 个独立分量**

可以将 A^0 视作**依赖于 3 个空间分量** A^i 的量

于是，**正则量子化**程序要求**独立**的**正则变量**满足**等时对易关系**

$$[A^i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [A^i(\mathbf{x},t),A^j(\mathbf{y},t)] = [\pi_i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)] = 0$$

A^0 对 π 的依赖性

- 由 $\pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = -F_{0i}$ 得

$$\pi^i = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = -F^{0i} = F^{i0}$$

- 写成空间矢量的形式为

$$\boldsymbol{\pi} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla A_0$$

- 故

$$\dot{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\pi} - \nabla A_0$$

- 对 **Proca 方程**取 $\nu = 0$，得 $\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0$，因此

$$A^0 = -\frac{1}{m^2}\partial_\mu F^{\mu 0} = -\frac{1}{m^2}\partial_i F^{i0} = -\frac{1}{m^2}\partial_i \pi^i = -\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}$$

- 通过上式可将 A^0 表达为 **π 的函数**

4.3.1 节 极化矢量与平面波展开

- 矢量场 $A^\mu(x)$ 既然满足 Klein-Gordon 方程，应该具有两个平面波解
- 即正能解 $\exp(-ip\cdot x)$ 和负能解 $\exp(ip\cdot x)$
- 平面波展开式的系数必须像 $A^\mu(x)$ 一样携带一个 Lorentz 指标
- 一般地，对于确定的动量 $\mathbf{p}$，矢量场的正能解模式具有如下形式：

$$\varphi^\mu(x,\mathbf{p},\sigma) = e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\exp(-ip\cdot x), \quad p^0 = E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$$

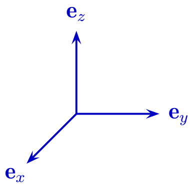
- 这里的系数 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是 Lorentz 矢量，称为极化矢量 (polarization vector)

4.3.1 节 极化矢量与平面波展开

- 矢量场 $A^\mu(x)$ 既然满足 Klein-Gordon 方程，应该具有两个平面波解
- 即正能解 $\exp(-ip\cdot x)$ 和负能解 $\exp(ip\cdot x)$
- 平面波展开式的系数必须像 $A^\mu(x)$ 一样携带一个 Lorentz 指标
- 一般地，对于确定的动量 $\mathbf{p}$，矢量场的正能解模式具有如下形式：

$$\varphi^\mu(x,\mathbf{p},\sigma) = e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\exp(-ip\cdot x), \quad p^0 = E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$$

- 这里的系数 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是 Lorentz 矢量，称为极化矢量 (polarization vector)
- 它依赖于动量 $\mathbf{p}$，具有指标 σ 以描述矢量粒子的极化态
- 我们希望一组极化矢量能够构成 Lorentz 矢量空间的一组基底
- 从而用它们可以展开一个任意的 Lorentz 矢量
- 为此，一组极化矢量应当是线性独立且正交完备的



三维矢量空间基底

Lorentz 矢量空间的基底

- Lorentz 矢量空间是一个 4 维线性空间，可将它的一组基底简单地取为

$$\tilde{e}^\mu(0) = (1,0,0,0), \quad \tilde{e}^\mu(1) = (0,1,0,0), \quad \tilde{e}^\mu(2) = (0,0,1,0), \quad \tilde{e}^\mu(3) = (0,0,0,1)$$

- 其中 $\tilde{e}^\mu(0)$ 是类时矢量，而 $\tilde{e}^\mu(1)$、$\tilde{e}^\mu(2)$ 和 $\tilde{e}^\mu(3)$ 是类空矢量
- 可以验证，这组基底满足正交归一关系

$$\tilde{e}_\mu(\sigma)\tilde{e}^\mu(\sigma') = g_{\sigma\sigma'}, \quad \sigma,\sigma' = 0,1,2,3$$

和完备性关系

$$\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma}\tilde{e}_\mu(\sigma)\tilde{e}_\nu(\sigma) = g_{\mu\nu}$$

- 作为基底的一组极化矢量也应当有 4 个，包括 1 个类时的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 与 3 个类空的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$、$e^\mu(\mathbf{p},2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$
- 它们需要满足类似的正交归一关系和完备性关系

极化矢量的正交归一关系和完备性关系

- 现在，要求这 4 个极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$、$e^\mu(\mathbf{p},1)$、$e^\mu(\mathbf{p},2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 是实的，满足 Lorentz 矢量空间中的正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')=g_{\sigma\sigma'}$$

和完备性关系

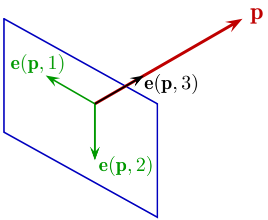
$$\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)=g_{\mu\nu}$$

- 从而，以极化矢量为基底可将任意 Lorentz 矢量 V_μ 展开成

$$V_\mu=g_{\mu\nu}V^\nu=\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)V^\nu=\sum_{\sigma=0}^{3}v_\sigma(\mathbf{p})e_\mu(\mathbf{p},\sigma)$$

- 其中展开系数 $v_\sigma(\mathbf{p})\equiv g_{\sigma\sigma}e_\nu(\mathbf{p},\sigma)V^\nu$，可见这组极化矢量是完备的
- 正交归一关系和完备性关系都是 Lorentz 协变的
- 只要在某个惯性系中取定一组符合这两个关系的极化矢量，通过 Lorentz 变换就可以在其它惯性系中得到依然满足这两个关系的一组极化矢量

横向极化矢量



- 现在根据与在壳动量 p^μ 的关系选择一组极化矢量
- 首先，选取 2 个只有空间分量的类空横向极化矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},1) = (0, \mathbf{e}(\mathbf{p},1)), \quad e^\mu(\mathbf{p},2) = (0, \mathbf{e}(\mathbf{p},2))$$

- 其中

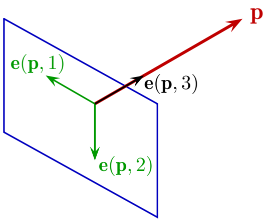
$$\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(p^1p^3, p^2p^3, -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(-p^2, p^1, 0), \quad |\mathbf{p}_\mathrm{T}| \equiv \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}$$

- “横向”指的是它们在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 垂直，即 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = 0$

横向极化矢量

- 现在根据与**在壳动量** p^μ 的关系选择一组极化矢量
- 首先，选取 2 个**只有空间分量**的**类空横向极化矢量**



$$e^\mu(\mathbf{p},1) = (0, \mathbf{e}(\mathbf{p},1)), \quad e^\mu(\mathbf{p},2) = (0, \mathbf{e}(\mathbf{p},2))$$

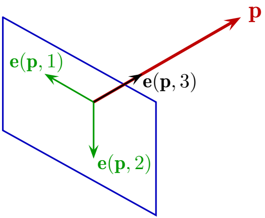
- 其中 $$\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(p^1p^3, p^2p^3, -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(-p^2, p^1, 0), \quad |\mathbf{p}_\mathrm{T}| \equiv \sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}$$

- **“横向”**指的是它们在**三维空间**中**与 $\mathbf{p}$ 垂直**，即 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = 0$
- 它们在**三维空间**中是**正交归一**的，$\mathbf{e}(\mathbf{p},i)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},j) = \delta_{ij}, \quad i,j=1,2$
- 右上图示意性地画出 $\mathbf{p}$、$\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 和 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$，它们在三维空间中**两两相互垂直**
- 从而，这两个横向极化矢量满足**四维横向条件** $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},1) = p_\mu e^\mu(\mathbf{p},2) = 0$
- 也满足**正交归一关系** $e_\mu(\mathbf{p},i)e^\mu(\mathbf{p},j) = -\mathbf{e}(\mathbf{p},i)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},j) = -\delta_{ij} = g_{ij}, \quad i,j=1,2$

纵向极化矢量

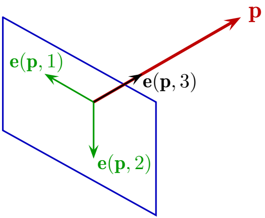
- 接着，要求第 3 个类空极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 是纵向的，即在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 平行
- 这样还不能确定它的时间分量，为此要求它满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=0$
- 而归一关系 $e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=g_{33}$ 将决定它的归一化



纵向极化矢量

- 接着，要求第 3 个类空极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 是纵向的，即在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 平行
- 这样还不能确定它的时间分量，为此要求它满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=0$
- 而归一关系 $e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=g_{33}$ 将决定它的归一化
- 于是，纵向极化矢量的形式为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m},\frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}\right)$$



- 容易验证，它确实满足四维横向条件

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=p^0\frac{|\mathbf{p}|}{m}-\mathbf{p}\cdot\frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}=\frac{p^0|\mathbf{p}|}{m}-\frac{p^0|\mathbf{p}|}{m}=0$$

- 也满足正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{|\mathbf{p}|}{m}\frac{|\mathbf{p}|}{m}-\frac{(p^0)^2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{m^2|\mathbf{p}|^2}=\frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}-\frac{(p^0)^2}{m^2}=-\frac{(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2}{m^2}=-1=g_{33}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},i)=-\frac{p^0}{m|\mathbf{p}|}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2$$

类时极化矢量

- 最后，可以将类时极化矢量取为正比于 p^μ 的矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},0) = \frac{1}{m}p^\mu = \frac{1}{m}(p^0,\mathbf{p})$$

- 它符合归一关系，$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0) = \frac{p^2}{m^2} = 1 = g_{00}$
- 而且与满足四维横向条件的 **3** 个类空极化矢量正交，

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},i) = \frac{1}{m}p_\mu e^\mu(\mathbf{p},i) = 0, \quad i = 1,2,3$$

- 不过，$e^\mu(\mathbf{p},0)$ **不满足四维横向条件**，$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) = \frac{p^2}{m} = m \neq 0$

类时极化矢量

- 最后，可以将类时极化矢量取为正比于 p^μ 的矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},0) = \frac{1}{m}\,p^\mu = \frac{1}{m}(p^0,\mathbf{p})$$

- 它符合归一关系，$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0) = \dfrac{p^2}{m^2} = 1 = g_{00}$
- 而且与满足四维横向条件的 **3** 个类空极化矢量正交，

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},i) = \frac{1}{m}\,p_\mu e^\mu(\mathbf{p},i) = 0, \quad i = 1,2,3$$

- 不过，$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 不满足四维横向条件，$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) = \dfrac{p^2}{m} = m \neq 0$
- 实际上，我们**找不到**满足四维横向条件的类时极化矢量
- 原因在于，总可以取一个特殊惯性系使 $p^\mu = (m,\mathbf{0})$
- 而类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 的时间分量一定非零，故 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) = me^0(\mathbf{p},0) \neq 0$
- 由于 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)$ 是 Lorentz 不变的，在任意惯性系中均有 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) \neq 0$

极化矢量的完备性关系

- 可以验证，这样定义的**一组极化矢量**确实满足**完备性关系**：

$$\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e_\nu(\mathbf{p},\sigma)$$

$$= e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0) - e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1) - e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2) - e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3)$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

有质量矢量场的极化矢量

- 由于**有质量矢量场** A^μ 必须满足 **Lorenz 条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$，**正能解模式**应满足

$$0 = \partial_\mu \varphi^\mu(x, \mathbf{p}, \sigma) = \partial_\mu [e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \exp(-ip \cdot x)] = -\mathrm{i} p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \exp(-ip \cdot x)$$

- 故描述 A^μ 的极化矢量必须满足**四维横向条件** $p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0$
- 因此，**类时极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p}, 0)$ **不能**用于描述有质量矢量场 A^μ
- 这说明 A^μ 只有 **3 个物理的极化状态**，由**类空极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p}, 1)$、$e^\mu(\mathbf{p}, 2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p}, 3)$ 描述

有质量矢量场的极化矢量

- 由于**有质量矢量场** A^μ 必须满足 **Lorenz 条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$，**正能解模式**应满足

$$0 = \partial_\mu \varphi^\mu(x, \mathbf{p}, \sigma) = \partial_\mu[e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \exp(-ip \cdot x)] = -ip_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \exp(-ip \cdot x)$$

- 故描述 A^μ 的极化矢量必须满足**四维横向条件** $p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0$
- 因此，**类时极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p}, 0)$ **不能**用于描述有质量矢量场 A^μ
- 这说明 A^μ 只有 **3 个物理的极化状态**，由**类空极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p}, 1)$、$e^\mu(\mathbf{p}, 2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p}, 3)$ 描述
- 根据**完备性关系**，这三个**物理极化矢量**满足

$$\begin{aligned} -\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma) &= \sum_{\sigma=1}^{3} g_{\sigma\sigma} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma) = g_{\mu\nu} - g_{00} e_\mu(\mathbf{p}, 0) e_\nu(\mathbf{p}, 0) \\ &= g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \end{aligned}$$

- 即具有**求和关系** $\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}$

另一套物理极化矢量

- 通过线性组合定义另一套**物理**的**极化矢量** $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$，其中 $\lambda=+,0,-$：

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[e^\mu(\mathbf{p},1)\pm \mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)]$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0)\equiv e^\mu(\mathbf{p},3)$$

- 这样定义的 $\varepsilon^\mu(p,\pm)$ 是**复**的，而 $\varepsilon^\mu(p,0)$ 是**实**的
- 它们满足**四维横向条件** $p_\mu\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)=0,\quad \lambda=\pm,0$
- 也满足**正交归一关系** $\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'}$ 和**极化求和关系**

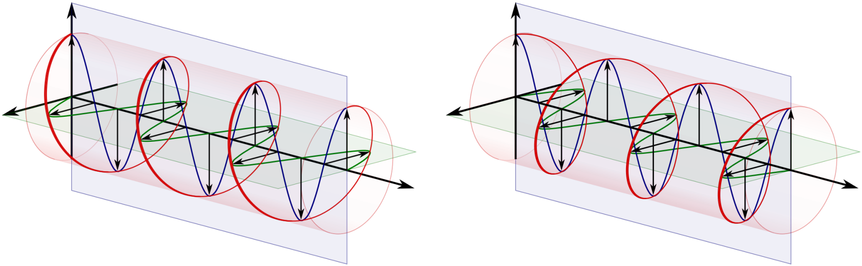
$$\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=\sum_{\sigma=1}^{3}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)=-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}$$

- 极化求和关系是 **Lorentz 协变**的，**四维横向条件**体现为

$$p^\nu\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=-p_\mu+\frac{p_\mu p^2}{m^2}=-p_\mu+p_\mu=0$$

线极化与圆极化

- 实际上，**横向实极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 描述矢量场的**线极化振动**
- 相应的振动方向被**限制**在由 $\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 或 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$ 与 $\mathbf{p}$ 决定的平面上
- 另一方面，**横向复极化矢量** $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$ 描述矢量场的**圆极化振动**
- $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2}}[e^\mu(\mathbf{p},1) \pm \mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)]$ 中线性组合系数之比为 $\pm\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2}$
- 意味着**圆极化**由两个**相位差**为 $\pm\pi/2$ 的**线极化**所合成



右旋圆极化　　　　左旋圆极化

极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 的具体形式

- 根据 $e^\mu(\mathbf{p},1) = \dfrac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0, p^1p^3, p^2p^3, -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\right)$, $\quad e^\mu(\mathbf{p},2) = \dfrac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0, -p^2, p^1, 0\right)$

$$e^\mu(\mathbf{p},3) = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}\right)$$

- $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 的**具体形式**为

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^\mu(\mathbf{p},1) + \mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0,\ p^1p^3 - \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|,\ p^2p^3 + \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|,\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^\mu(\mathbf{p},1) - \mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0,\ p^1p^3 + \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|,\ p^2p^3 - \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|,\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\right)\end{aligned}$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) = e^\mu(\mathbf{p},3) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\left(|\mathbf{p}|^2,\ p^0p^1,\ p^0p^2,\ p^0p^3\right)$$

螺旋度矩阵

- 根据 3.3 节讨论，**螺旋度**是粒子的**自旋角动量**在**动量方向**上的投影
- 对于**自旋为 1** 的有质量粒子，**螺旋度本征值**的取值包括 -1、0 和 $+1$
- 这分别对应于 **3 种自旋极化态**
- **动量 $\mathbf{p}$ 的方向**由 $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 表征，在 **Lorentz 群矢量表示**中，**螺旋度矩阵**定义为

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -ip^3 & ip^2 \\ & ip^3 & 0 & -ip^1 \\ & -ip^2 & ip^1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 这里用了**自旋角动量矩阵** $\mathcal{J}^i$ 的表达式

$$(\mathcal{J}^1)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -\mathrm{i} \\ & & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^2)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \mathrm{i} \\ & & 0 & \\ & -\mathrm{i} & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\mathrm{i} & \\ & \mathrm{i} & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

有质量实矢量场的平面波展开式

- 利用**极化矢量**和**螺旋度矩阵**的具体表达式，推出

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}})^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda\,\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \lambda = \pm, 0$$

- 这说明**极化矢量** $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$ 是**螺旋度**的**本征态**，**本征值**为 λ
- 因此，$\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$ 描述**动量为** $\mathbf{p}$、**螺旋度为** λ 的**矢量粒子**的**极化态**
- **螺旋度** $\lambda = \pm 1$ 对应于两种**横向极化**，即**右旋极化** $(\lambda = +)$ 和**左旋极化** $(\lambda = -)$
- **螺旋度** $\lambda = 0$ 对应于**纵向极化**

有质量实矢量场的平面波展开式

- 利用极化矢量和螺旋度矩阵的具体表达式，推出

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},\lambda)=\lambda\,\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda),\quad \lambda=\pm,0$$

- 这说明极化矢量 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度的本征态，本征值为 λ
- 因此，$\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ 描述动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的矢量粒子的极化态
- 螺旋度 $\lambda=\pm1$ 对应于两种横向极化，即右旋极化 $(\lambda=+)$ 和左旋极化 $(\lambda=-)$
- 螺旋度 $\lambda=0$ 对应于纵向极化
- 有质量实矢量场算符 $A^{\mu}(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式应当包含正能解和负能解的所有动量模式的所有极化态，形式为

$$A^{\mu}(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]$$

- 其中 $p^0=E_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，产生算符 $a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}$ 和湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 带着极化指标 λ
- 容易验证这个展开式满足自共轭条件 $[A^{\mu}(\mathbf{x},t)]^{\dagger}=A^{\mu}(\mathbf{x},t)$

$a_{\mathbf{p}}$ 与 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}$ 的对易关系

将平面波展开式代入 $[A^\mu(x),\mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\,A^\mu(x) + (\mathcal{J})^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ 左边和右边，得到

$$[A^\mu(x),\mathbf{J}] = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda\left\{\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}\,A^\mu(x) + (\mathcal{J})^\mu{}_\nu A^\nu(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[-\mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\nabla + (\mathcal{J})^\mu{}_\nu]\\&\qquad\times\left\{\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\}\\&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda\left\{[\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\mathcal{J})^\mu{}_\nu]\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right.\\&\qquad\left.+\,[-\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\mathcal{J})^\mu{}_\nu]\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\}\end{aligned}$$

两相比较，有 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}] = [\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\mathcal{J})^\mu{}_\nu]\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}$

两边与 $\hat{\mathbf{p}}$ 作内积，得 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = (\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathcal{J})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda} = \lambda\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}$

从而推出 $[a_{\mathbf{p},\lambda},\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = \lambda\,a_{\mathbf{p},\lambda}$

单粒子态 $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 的螺旋度

对 $[a_{\mathbf{p},\lambda},\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=\lambda\,a_{\mathbf{p},\lambda}$ 取厄米共轭，得 $\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=[a_{\mathbf{p},\lambda},\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]^\dagger=[\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J},\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]$，即

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})+\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$$

真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 湮灭的态，不具有角动量，故

$$a_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle=0,\qquad \mathbf{J}\,|0\rangle=\mathbf{0}$$

引入**单粒子态** $|\mathbf{p},\lambda\rangle\equiv\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle$，$\lambda=\pm,0$，则

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})+\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle=\lambda\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle$$

即

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle=\lambda\,|\mathbf{p},\lambda\rangle,\qquad \lambda=\pm,0$$

! **自由**的**单粒子态没有轨道角动量**，因而 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}$ 相当于**螺旋度算符**

可见，用**产生算符** $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 定义的**单粒子态** $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 是**螺旋度本征态**，**本征值**为 λ

产生湮灭算符的对易关系

- 记 $\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda) \equiv \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - \dfrac{p_i}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)$，则 A^i 对应的**共轭动量密度**为

$$
\begin{aligned}
\pi_i &= -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \Big\{ [\mathrm{i}p_0\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - \mathrm{i}p_i\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)] a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-\mathrm{i}p\cdot x} \\
&\qquad + [-\mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda) + \mathrm{i}p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} e^{\mathrm{i}p\cdot x} \Big\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} e^{\mathrm{i}p\cdot x} \right]
\end{aligned}
$$

- 满足**自共轭条件** $[\pi_i(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_i(\mathbf{x},t)$

产生湮灭算符的对易关系

记 $\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda) \equiv \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - \dfrac{p_i}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)$，则 A^i 对应的**共轭动量密度**为

$$\pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\Big\{[ip_0\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - ip_i\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)]a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x} + [-ip_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda) + ip_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\Big\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\Big]$$

满足**自共轭条件** $[\pi_i(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_i(\mathbf{x},t)$，由**等时对易关系**

$$[A^i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)] = i\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [A^i(\mathbf{x},t),A^j(\mathbf{y},t)] = [\pi_i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)] = 0$$

推出**产生湮灭算符的对易关系**

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0$$

具体推导过程见 **4.3.2 小节选读内容**，上式表明**两个产生算符相互对易**

因此，与标量场类似，有质量矢量场描述的粒子是一种玻色子，称为**矢量玻色子** (vector boson)，**自旋为 1**

哈密顿量密度

- 有质量矢量场的**哈密顿量密度**为

$$\mathcal{H} = \pi_i \partial_0 A^i - \mathcal{L} = -\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

- 利用 $\dot{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\pi} - \nabla A_0$ 和 $A^0 = -\dfrac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}$，有

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} &= \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} + \nabla A_0) = \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla \cdot (A_0 \boldsymbol{\pi}) - A_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \\ &= \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla \cdot (A_0 \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \\ -\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu &= -\frac{1}{2} m^2 [(A_0)^2 - \mathbf{A}^2] = -\frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \end{aligned}$$

- 由 $\pi_i = -F_{0i}$ 和 $\pi^i = F^{i0}$ 得 $\dfrac{1}{2} F_{0i} F^{0i} = \dfrac{1}{2} \pi_i \pi^i = -\dfrac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2$
- 另一方面，

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm}) \partial^m A^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial^m A^n = -\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m A^n$$

哈密顿量密度表达式

从而

$$\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = \frac{1}{4}F^{ij}F^{ij} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}(\partial_m A^n)\varepsilon^{ijl}\varepsilon^{lpq}\partial_p A^q = \frac{1}{2}\delta^{kl}\varepsilon^{kmn}(\partial_m A^n)\varepsilon^{lpq}\partial_p A^q$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{kmn}(\partial_m A^n)\varepsilon^{kpq}\partial_p A^q = \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2$$

故 $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2$

于是，**哈密顿量密度**化为

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \\ &= \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \frac{1}{2m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}m^2\mathbf{A}^2 \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}m^2\mathbf{A}^2\end{aligned}$$

最后一行第二项是一个**全散度**，对全空间积分时它**没有贡献**

哈密顿量算符和总动量算符

- 于是，**哈密顿量算符**为

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\left[\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2 + m^2\mathbf{A}^2\right]$$

- 经过进一步计算，推出

$$H = \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{3}{2}\,E_{\mathbf{p}}$$

- **第一项**是**所有动量模式所有极化态**所有矢量粒子贡献**能量之和**，**第二项**是**零点能**
- 另一方面，**总动量算符**为

$$\mathbf{P} = -\int d^3x\,\pi_i\nabla A^i = \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}$$

- 这表明总动量是**所有动量模式所有极化态**所有矢量玻色子贡献的**动量之和**
- 具体推导过程见 **4.3.3 小节选读内容**

4.4 节　无质量矢量场的正则量子化

4.4.1 小节　无质量情况下的极化矢量

当**质量** $m = 0$ 时，两个**横向线极化矢量**

$$e^\mu(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0, p^1p^3, p^2p^3, -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\right), \quad e^\mu(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0, -p^2, p^1, 0\right)$$

是**定义良好**的

但 $e^\mu(\mathbf{p},3) = \left(\dfrac{|\mathbf{p}|}{m}, \dfrac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}\right)$ 显然**不是纵向极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的良好定义

此时，如果要求 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的**空间分量正比于** $\mathbf{p}$，则 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 一定**不能符合四维横向条件**，而**类时极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 也**不可能**是**四维横向**的，相关论证作为习题 4.6

4.4 节 无质量矢量场的正则量子化

4.4.1 小节 无质量情况下的极化矢量

当**质量** $m=0$ 时，两个**横向线极化矢量**

$$e^\mu(\mathbf{p},1)=\frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0,p^1p^3,p^2p^3,-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\right),\quad e^\mu(\mathbf{p},2)=\frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0,-p^2,p^1,0\right)$$

是**定义良好**的

但 $e^\mu(\mathbf{p},3)=\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m},\frac{p^0}{m}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)$ 显然**不是纵向极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的良好定义

此时，如果要求 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的**空间分量正比于 $\mathbf{p}$**，则 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 一定**不能符合四维横向条件**，而**类时极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 也**不可能**是**四维横向**的，相关论证作为习题 4.6

因此，**四维横向**的独立极化矢量只有 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 这两个

由于**无质量**情况下 $p^2=0$，也**不能**像 $e^\mu(\mathbf{p},0)=p^\mu/m$ 那样将 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 取为正比于 p^μ 的矢量，否则将出现 $e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=0$ 而**不能**得到**正确归一化**

于是需要重新定义 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},0)$

类时和纵向极化矢量

- 在前面定义 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 时，已经选取了一个**特定的惯性参考系**
- 在**这个参考系**中，定义一个**类时单位矢量** $n^\mu = (1,0,0,0)$，内积 $n^2 = 1$
- 然后，将**类时极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在**此参考系**中的形式就取为 n^μ，即

$$e^\mu(\mathbf{p},0) = n^\mu = (1,0,0,0)$$

- $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在其它惯性参考系中的形式可通过 **Lorentz 变换**得到

类时和纵向极化矢量

- 在前面定义 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 时，已经选取了一个**特定的惯性参考系**
- 在**这个参考系**中，定义一个**类时单位矢量** $n^\mu = (1,0,0,0)$，内积 $n^2 = 1$
- 然后，将**类时极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在**此参考系**中的形式就取为 n^μ，即

$$e^\mu(\mathbf{p},0) = n^\mu = (1,0,0,0)$$

- $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在其它惯性参考系中的形式可通过 **Lorentz 变换**得到
- 用 p^μ 和 n^μ 将**纵向极化矢量**定义为 $e^\mu(\mathbf{p},3) = \dfrac{p^\mu - (p\cdot n)n^\mu}{p\cdot n}$
- 在**狭义相对论**中，自由的**无质量粒子**的**动量** $\mathbf{p}$ 必定**不为零**
- **质壳条件** $p^2 = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 = 0$ 意味着 $p^0 = |\mathbf{p}| > 0$
- 从而 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 在我们选取的**参考系**中表达为

$$e^\mu(\mathbf{p},3) = \frac{p^\mu - p^0 n^\mu}{p^0} = \left(0, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{p}|}(0, p^1, p^2, p^3)$$

- 其**空间分量与 $\mathbf{p}$ 平行**，即在三维空间中是**纵向**的

无质量极化矢量组

现在得到无质量情况下的一组极化矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},0) = n^\mu = (1,0,0,0), \qquad e^\mu(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0, p^1p^3, p^2p^3, -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\right)$$

$$e^\mu(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\left(0, -p^2, p^1, 0\right), \quad e^\mu(\mathbf{p},3) = \frac{1}{|\mathbf{p}|}(0, p^1, p^2, p^3)$$

可以验证它们满足正交归一关系 $e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma') = g_{\sigma\sigma'}$ 和完备性关系

$$\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = g_{\mu\nu}$$

横向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 还满足四维横向条件，$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},i) = 0, \quad i = 1,2$

但类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 和纵向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 不满足四维横向条件，

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) = p\cdot n = p^0 = |\mathbf{p}| > 0, \quad p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3) = -\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = -|\mathbf{p}| = -p\cdot n < 0$$

极化求和关系

根据**完备性关系**，**横向线极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 具有求和关系

$$\begin{aligned}
-\sum_{\sigma=1}^{2} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) &= \sum_{\sigma=1}^{2} g_{\sigma\sigma} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) \\
&= g_{\mu\nu} - g_{00}e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0) - g_{33}e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\
&= g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu + \frac{p_\mu-(p\cdot n)n_\mu}{p\cdot n}\frac{p_\nu-(p\cdot n)n_\nu}{p\cdot n} \\
&= g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu + \frac{p_\mu p_\nu-(p\cdot n)p_\mu n_\nu-(p\cdot n)p_\nu n_\mu+(p\cdot n)^2 n_\mu n_\nu}{(p\cdot n)^2} \\
&= g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} - \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}
\end{aligned}$$

仍然将**横向圆极化矢量**定义为 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^\mu(\mathbf{p},1) \pm \mathrm{i} e^\mu(\mathbf{p},2)]$

极化求和关系为

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = \sum_{\sigma=1}^{2} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}$$

4.4.2 小节　无质量矢量场与规范对称性

在自由**有质量**矢量场的拉氏量 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ 中

令参数 $m = 0$，就得到**自由无质量实矢量场** $A^\mu(x)$ 的**拉氏量**

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

其中**场强张量** $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

同样，令 **Proca 方程** $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$ 中 $m = 0$

即得自由无质量矢量场的经典运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

James Clerk Maxwell
(1831–1879)

根据 1.5 节的讨论，这个方程就是**无源**的 **Maxwell 方程**

电磁场是一种无质量矢量场

作为电磁场的量子，**光子** (photon) 是一种**自旋为** 1 的**无质量矢量玻色子**

规范对称性

- 考虑对**无质量矢量场** $A^\mu(x)$ 作**规范变换** (gauge transformation)

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)$$

- 作为变换参数的 $\chi(x)$ 是一个任意的 **Lorentz 标量函数**，依赖于**时空坐标**
- 因而这样的变换是**局域** (local) 变换，**场强张量**在此**规范变换**下**不变**，

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x) = \partial^\mu[A^\nu(x) + \partial^\nu\chi(x)] - \partial^\nu[A^\mu(x) + \partial^\mu\chi(x)] \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + \partial^\mu\partial^\nu\chi(x) - \partial^\nu\partial^\mu\chi(x) \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = F^{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

规范对称性

- 考虑对无质量矢量场 $A^\mu(x)$ 作规范变换 (gauge transformation)

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)$$

- 作为变换参数的 $\chi(x)$ 是一个任意的 Lorentz 标量函数，依赖于时空坐标
- 因而这样的变换是局域 (local) 变换，场强张量在此规范变换下不变，

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x) = \partial^\mu[A^\nu(x) + \partial^\nu \chi(x)] - \partial^\nu[A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)] \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + \partial^\mu \partial^\nu \chi(x) - \partial^\nu \partial^\mu \chi(x) \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = F^{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

- 因而拉氏量 $\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 和无源 Maxwell 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ 都不会改变
- 这称为规范对称性 (gauge symmetry)
- 作为 $F^{\mu\nu}$ 的分量，电磁场的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 都是规范不变量
- 拉氏量 $\mathcal{L} = -\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dfrac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ 中的质量项在规范变换下发生**改变**
- 因此自由的有质量矢量场**不具有**规范对称性

规范条件

- 电动力学中的规范对称性表明四维矢势 $A^\mu(x)$ 不能被唯一确定，不是直接观测量
- 电动力学的直接观测量都不依赖于 $\chi(x)$，即不依赖于规范的选取
- 规范对称性的存在对研究无质量矢量场带来了不便
- 为了便于计算，常常将规范固定下来，使得计算过程依赖于选取的规范
- 不过，最后得出的可观测量必须是规范不变 (gauge invariant) 的

规范条件

- 电动力学中的规范对称性表明四维矢势 $A^\mu(x)$ 不能被唯一确定，不是直接观测量
- 电动力学的直接观测量都不依赖于 $\chi(x)$，即不依赖于规范的选取
- 规范对称性的存在对研究无质量矢量场带来了不便
- 为了便于计算，常常将规范固定下来，使得计算过程依赖于选取的规范
- 不过，最后得出的可观测量必须是规范不变 (gauge invariant) 的
- 常见的规范条件有

Lorenz 规范 $\partial_\mu A^\mu = 0$	Coulomb 规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
时性 (temporal) 规范 $A^0 = 0$	轴向 (axial) 规范 $A^3 = 0$

- 在这些条件中，只有 **Lorenz 规范**是明显 **Lorentz 协变**的
- 虽然 **Lorenz 规范条件**看起来与有质量矢量场的 **Lorenz 条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$ 相同
- 但是，在研究有质量矢量场时它是从运动方程推导出来的**必须**满足的条件，而在研究无质量矢量场时它只是一种人为选择

规范等价

- 对于任意的 $A^\mu(x)$，令规范变换函数 $\chi(x)$ 满足方程 $\partial^2\chi(x) = -\partial_\mu A^\mu(x)$
- 作规范变换之后的场 $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\chi(x)$ 就会满足 **Lorenz 规范条件**，

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \partial^2\chi(x) = \partial_\mu A^\mu(x) - \partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

- 但是，经过这种变换之后，矢量场仍然没有被唯一地确定：
- 对于满足 Lorenz 规范条件的矢量场 $A^\mu(x)$，取满足齐次波动方程

$$\partial^2\tilde{\chi}(x) = 0$$

的任意规范变换函数 $\tilde{\chi}(x)$ 再作一次规范变换

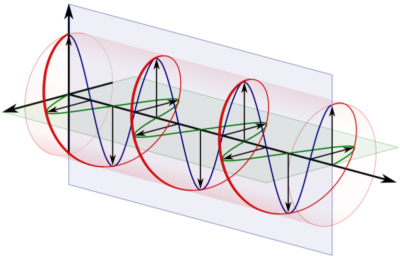
- 都能得到满足 **Lorenz 规范条件**的另一个矢量场 $\tilde{A}'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\tilde{\chi}(x)$
- 可见，存在无穷多个规范等价的矢量场，它们描述相同的物理，全都满足 **Lorenz 规范条件** $\partial_\mu A^\mu$

无质量矢量场的独立自由度

- 矢量场 $A^\mu(x)$ 有 4 个分量，在没有任何约束的情况下可具有 4 个独立的自由度
- 无质量矢量场分量的运动行为由 Maxwell 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ 描述
- 要求 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 成立将减少 1 个独立自由度
- 但是，上述规范等价性表明，$A^\mu(x)$ 并不具有 3 个独立的自由度，否则它在强加 Lorenz 规范条件之后就必须唯一地确定下来

无质量矢量场的独立自由度

- 矢量场 $A^\mu(x)$ 有 4 个分量，在没有任何约束的情况下可具有 4 个独立的自由度
- 无质量矢量场分量的运动行为由 Maxwell 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ 描述
- 要求 **Lorenz 规范条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$ 成立将**减少 1 个**独立自由度
- 但是，上述规范等价性表明，$A^\mu(x)$ **并不具有 3 个**独立的自由度，否则它在强加 Lorenz 规范条件之后就必须唯一地确定下来
- 实际上，无质量矢量场 $A^\mu(x)$ 只具有 2 个独立的自由度
- 在经典电动力学中，真空里的电磁波是横波，振动方向垂直于传播方向，可以用规范不变的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 描述
- 横波所具有的 2 种横向极化态就对应于无质量矢量场的 2 个独立自由度



独立的自旋极化态

- 3.3.2 小节讨论表明，**自旋为 1** 的**无质量粒子**具有 **2 种独立**的**自旋极化态**
- 以**螺旋度** λ 来表征的话，就是 $\lambda = +1$ (**右旋极化**) 和 $\lambda = -1$ (**左旋极化**) 的态
- 分别对应于**横向圆极化矢量** $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},-)$
- 等价地，也可以用**横向线极化矢量** $e^{\mu}(\mathbf{p},1)$ 和 $e^{\mu}(\mathbf{p},2)$ 代表这两种极化态
- 这样的**独立极化态数目**与**无质量矢量场**的**独立自由度一致**

独立的自旋极化态

- 3.3.2 小节讨论表明，**自旋为 1** 的**无质量粒子**具有 **2 种独立**的**自旋极化态**
- 以**螺旋度** λ 来表征的话，就是 $\lambda = +1$（**右旋极化**）和 $\lambda = -1$（**左旋极化**）的态
- 分别对应于**横向圆极化矢量** $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -)$
- 等价地，也可以用**横向线极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p}, 1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p}, 2)$ 代表这两种极化态
- 这样的**独立极化态数目**与**无质量矢量场**的**独立自由度**一致
- 从这个角度来看，为了用**矢量场**描述**自旋为 1** 的**无质量粒子**，我们必须构造具有**规范对称性**的**拉氏量** $\mathcal{L} = -\dfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
- 从而利用规范对称性将 $A^\mu(x)$ 的**独立自由度**减少成 **2 个**
- 这样才能恰好符合**独立极化态**的**数目**

A^0 与正则量子化

- 在上一节讨论**有质量矢量场** $A^\mu(x)$ 的正则量子化时
- 由于场的**时间分量** $A^0(x)$ **不拥有非零**的**共轭动量密度**
- 因而**没有**将它作为独立的正则运动变量
- 但这种情况并没有使正则量子化出现困难
- 因为 **Proca 方程**表明 $A^0(x)$ 不是独立变量，而是由 $A^0 = -\dfrac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}$ 决定的
- 于是，以场的**空间分量** $A^i(x)$ 作为 **3 个独立正则变量**进行**量子化**是**合适**的

A^0 与正则量子化

- 在上一节讨论**有质量矢量场** $A^\mu(x)$ 的正则量子化时
- 由于场的**时间分量** $A^0(x)$ **不拥有非零**的**共轭动量密度**
- 因而**没有**将它作为独立的正则运动变量
- 但这种情况并没有使正则量子化出现困难
- 因为 **Proca 方程**表明 $A^0(x)$ 不是独立变量，而是由 $A^0 = -\dfrac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}$ 决定的
- 于是，以场的**空间分量** $A^i(x)$ 作为 **3 个独立正则变量**进行**量子化**是**合适**的
- **自由度**恰好与**有质量矢量玻色子**的 **3 种物理极化态** (螺旋度 $\lambda = +1, 0, -1$) **相符**
- 实际上，将**有质量矢量场**的**拉氏量**取为 $\mathcal{L} = -\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dfrac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ 是为了导出 **Lorentz 条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$ 作为 **1 个约束**，使得 $A^\mu(x)$ 只有 **3 个独立自由度**
- 从而符合**自旋为 1** 的**有质量粒子**的**独立极化态数目**

规范固定项

- 对于**无质量矢量场**，$m=0$，而 $A^0=-\dfrac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}$ 显然**不能成立**，可以想办法让 $A^0(x)$ 也作为**独立的正则变量**，这需要给它安排**非零**的**共轭动量密度**
- 为此，在拉氏量中增加一个**不会影响最终物理结果**的项，得到

$$\mathcal{L}_1=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

- 其中 ξ 是一个可以自由选取的**实参数**
- 当 $A^\mu(x)$ 满足 **Lorenz 规范条件** $\partial_\mu A^\mu=0$ 时，$\mathcal{L}_1$ **等价**于 $\mathcal{L}=-\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
- $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 破坏了规范对称性，在一定程度上固定了规范，称为**规范固定项**

规范固定项

- 对于无质量矢量场，$m=0$，而 $A^0 = -\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}$ 显然不能成立，可以想办法让 $A^0(x)$ 也作为独立的正则变量，这需要给它安排非零的共轭动量密度
- 为此，在拉氏量中增加一个不会影响最终物理结果的项，得到

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

- 其中 ξ 是一个可以自由选取的实参数
- 当 $A^\mu(x)$ 满足 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 时，$\mathcal{L}_1$ 等价于 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
- $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 破坏了规范对称性，在一定程度上固定了规范，称为规范固定项
- 将 ξ 看成一个不会传播的常数场，由 Euler-Lagrange 方程推出 ξ 的经典运动方程 $-\frac{1}{2\xi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = 0$，这等价于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$
- 可见，引入辅助场 ξ 可以强制 Lorenz 规范作为约束条件在经典层面上成立
- 这种方法相当于高等数学中的 Lagrange 乘数法，它把具有 n 个变量与 k 个约束条件的最优化问题转换为具有 $n+k$ 个变量的极值方程组问题

A^0 的共轭动量密度

- 将 $\mathcal{L}_1$ 展开，得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,\end{aligned}$$

- A^μ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 - \frac{1}{\xi}(\partial_\nu A^\nu)\frac{\partial(\partial_\rho A^\rho)}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = -F_{0\mu} - \frac{1}{\xi}\, g_{0\mu}\partial_\nu A^\nu$$

- 即

$$\pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0$$

$$\pi_0 = -\frac{1}{\xi}\,\partial_\mu A^\mu$$

- 现在，A^0 具有相应的**共轭动量密度** π_0

等时对易关系与 Lorenz 规范条件

- **正则量子化**程序要求**算符** A^μ 和 π_μ 满足**等时对易关系**

$$[A^\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
$$[A^\mu(\mathbf{x},t),A^\nu(\mathbf{y},t)] = [\pi_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)] = 0$$

- 但是，这样的等时对易关系与 Lorenz 规范条件相互**矛盾**
- 计算 A^0 与 $\partial_\mu A^\mu$ 的对易子，利用 $\pi_0 = -\dfrac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu$ 得到

$$[A^0(\mathbf{y},t),\partial_\mu A^\mu(\mathbf{x},t)] = -\xi[A^0(\mathbf{y},t),\pi_0(\mathbf{x},t)] = -\mathrm{i}\xi\delta^{(3)}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

- 上式在 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 处非零，因而 $\partial_\mu A^\mu$ 必定**不恒为零**
- A^μ 作为**场算符**在满足**等时对易关系**的同时**不能**满足 **Lorenz 规范条件** $\partial_\mu A^\mu = 0$
- 这说明 **Lorenz 规范条件**虽然适用于**经典场** $A^\mu(x)$，但对于**量子场** $A^\mu(x)$ 来说**限制太强**了，下面会考虑**弱化的 Lorenz 规范条件**

d'Alembert 方程

- 对 $\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 求导

- 由 $\partial_\mu A^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ 得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - \dfrac{1}{\xi}\, g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho,\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} = 0$

- 于是，**从 $\mathcal{L}_1$ 导出**关于 A^μ 的 **Euler-Lagrange 方程**

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} \\
&= -\partial^2 A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{\xi}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\rho A^\rho \\
&= -\partial^2 A^\nu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial_\rho A^\rho
\end{aligned}
$$

d'Alembert 方程

- 对 $\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 求导
- 由 $\partial_\mu A^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ 得 $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{\xi}g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho$, $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} = 0$
- 于是，**从 $\mathcal{L}_1$ 导出**关于 A^μ 的 **Euler-Lagrange 方程**

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} \\
&= -\partial^2 A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{\xi} g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\rho A^\rho \\
&= -\partial^2 A^\nu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\nu\partial_\rho A^\rho
\end{aligned}
$$

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

- 即 A^μ **的经典运动方程**是 $\partial^2 A^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial_\nu A^\nu = 0$
- 若**取** $\xi = 1$，则上式化为 **d'Alembert 方程** $\partial^2 A^\mu(x) = 0$
- 这可以看作**无质量**情况下的 **Klein-Gordon 方程**

Feynman 规范

- 因此，把**规范固定参数**取为 $\xi = 1$ 会简化计算，这种取法称为 **Feynman 规范**
- 在 Feynman 规范下，**拉氏量**化为

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)\partial_\nu A^\nu$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\nu(A_\mu\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}A_\mu\partial_\nu\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\partial^\mu(A_\mu\partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2}A_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu - A^\mu\partial_\nu A^\nu)$$

Richard Feynman
(1918–1988)

Feynman 规范

- 因此，把**规范固定参数**取为 $\xi = 1$ 会简化计算，这种取法称为 **Feynman 规范**
- 在 Feynman 规范下，**拉氏量**化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)\partial_\nu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\nu(A_\mu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\partial^\mu(A_\mu \partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2}A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu \partial^\nu A^\mu - A^\mu \partial_\nu A^\nu)\end{aligned}$$

- **第二项**是**全散度**，它不会影响作用量和运动方程，**可以舍弃**
- 因此，还能采用更加**简化**的**拉氏量** $\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu$
- 由它推出的经典运动方程也是 **d'Alembert 方程** $\partial^2 A^\mu = 0$
- 此时**共轭动量密度**为 $\pi_\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu$

Richard Feynman
(1918–1988)

平面波展开和产生湮灭算符的对易关系

- 在 d'Alembert 方程 $\partial^2 A^\mu(x) = 0$ 的平面波解中，正能解和负能解分别正比于 $\exp(-ip\cdot x)$ 和 $\exp(ip\cdot x)$，其中 $p^0 = E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|$
- 使用实极化矢量组 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$，对无质量实矢量场 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 作平面波展开，得

$$A^\mu(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \left(b_{\mathbf{p},\sigma} e^{-ip\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} e^{ip\cdot x} \right)$$

- 相应的共轭动量密度展开式为

$$\pi_\mu(\mathbf{x},t) = -\partial_0 A_\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{ip_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) \left(b_{\mathbf{p},\sigma} e^{-ip\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} e^{ip\cdot x} \right)$$

- 这两个展开式满足自共轭条件 $[A^\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = A^\mu(\mathbf{x},t)$ 和 $[\pi_\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_\mu(\mathbf{x},t)$
- 根据等时对易关系，推出产生湮灭算符的对易关系

$$[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] = [b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = 0$$

- 具体推导过程见 4.4.3 小节选读内容

4.4.4 小节　物理极化态

- 无质量矢量场的**哈密顿量密度**是

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \partial^0 A^\mu - \mathcal{L}_2 = -(\partial_0 A_\mu)\partial^0 A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_0 A_\mu)\partial^0 A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_i A_\mu)\partial^i A^\mu = -\frac{1}{2}\left[\pi_\mu \pi^\mu + (\nabla A_\mu)\cdot(\nabla A^\mu)\right]$$

- **哈密顿量** $H = \int d^3x\, \mathcal{H} = -\frac{1}{2}\int d^3x \left[\pi_\mu \pi^\mu + (\nabla A_\mu)\cdot(\nabla A^\mu)\right]$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma')$$

$$\times\Big[(ip_0)(iq_0)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}e^{-ip\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}e^{ip\cdot x}\right)\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}e^{-iq\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}e^{iq\cdot x}\right)$$

$$+ (i\mathbf{p})\cdot(i\mathbf{q})\left(b_{\mathbf{p},\sigma}e^{-ip\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}e^{ip\cdot x}\right)\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}e^{-iq\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}e^{iq\cdot x}\right)\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{d^3p\, d^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma')(p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$$

$$\times\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}e^{-i(p_0-q_0)t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}e^{i(p_0-q_0)t}\right]$$

$$- \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}e^{-i(p_0+q_0)t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}e^{i(p_0+q_0)t}\right]\Big\}$$

哈密顿量算符

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'})$$

正交归一关系

$$= -\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\,g_{\sigma\sigma'}(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'})$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})\,(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma})$$

$$= b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}-(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma}\delta^{(3)}(\mathbf{0})$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma})+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})^2$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}+\sum_{\sigma=1}^{3}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}2E_{\mathbf{p}}$$

⚽ 第二项是零点能，第一项中类时极化态的贡献为负，与类空极化态的贡献**不一样**

📖 造成这种情况的原因是 Minkowski 度规 $g_{\sigma\sigma'}$ 是一个不定度规，时间对角元 g_{00} 与空间对角元 g_{ii} 具有相反的符号

单粒子态

- 将**真空态** $|0\rangle$ 定义为被任意 $b_{\mathbf{p},\sigma}$ 湮灭的态，满足

$$b_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad H|0\rangle = E_{\text{vac}}|0\rangle, \quad E_{\text{vac}} = 2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int d^3p\, E_{\mathbf{p}} > 0$$

- 动量为 $\mathbf{p}$、极化指标为 σ 的**单粒子态**定义为 $|\mathbf{p},\sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle$
- 它描述一个**无质量矢量玻色子**，由

$$\begin{aligned}[H, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \sum_{\sigma'=0}^{3} (-g_{\sigma'\sigma'}) b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'} [b_{\mathbf{q},\sigma'}, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \sum_{\sigma'=0}^{3} (-g_{\sigma'\sigma'}) b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'} (2\pi)^3 (-g_{\sigma'\sigma}) \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \\ &= E_{\mathbf{p}} \sum_{\sigma'=0}^{3} g_{\sigma'\sigma'} g_{\sigma'\sigma} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'} = E_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}H|\mathbf{p},\sigma\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, H b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} H + E_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma})|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}}) b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}})|\mathbf{p},\sigma\rangle\end{aligned}$$

- 这看起来是一个正常的结果，说明**单粒子态** $|\mathbf{p},\sigma\rangle$ 比**真空多了一份能量** $E_{\mathbf{p}}$

负内积和负能量

利用产生湮灭算符的对易关系计算单粒子态的内积，得

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{q},\sigma' | \mathbf{p},\sigma \rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\, b_{\mathbf{q},\sigma'} b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\, |0\rangle \\
&= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\left[b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{q},\sigma'} - (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \right]|0\rangle \\
&= -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

于是，

$$
\langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad \langle \mathbf{p},i|\mathbf{p},i\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad i=1,2,3
$$

负内积和负能量

利用产生湮灭算符的对易关系计算单粒子态的内积，得

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q},\sigma'|\mathbf{p},\sigma\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,b_{\mathbf{q},\sigma'}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\,|0\rangle \\ &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\left[b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'} - (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\right]|0\rangle \\ &= -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\end{aligned}$$

于是，

$$\langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}),\quad \langle \mathbf{p},i|\mathbf{p},i\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}),\quad i=1,2,3$$

上式表明，单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 的自我内积是负的，不符合 Hilbert 空间中态矢的要求

而且，相应的能量期待值也是负的：

$$\langle \mathbf{p},0|\,H\,|\mathbf{p},0\rangle = (E_{\text{vac}}+E_{\mathbf{p}})\,\langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(E_{\text{vac}}+E_{\mathbf{p}})(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0$$

这个负能量结果在物理上看起来是不可接受的，它的根源在于不定度规

弱 Lorentz 规范条件

不过，如前所述，无质量矢量场只有 2 种独立的物理极化态，对应于 2 个横向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$，它们满足四维横向条件 $\partial_\mu e^\mu(\mathbf{p},1) = \partial_\mu e^\mu(\mathbf{p},2) = 0$

纵向极化和类时极化都是非物理的，也不满足四维横向条件

平面波展开式 $A^\mu(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \left(b_{\mathbf{p},\sigma} e^{-ip\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} e^{ip\cdot x} \right)$ 里面只有满足四维横向条件的部分能够符合 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$

因此，要求 Lorenz 规范条件成立可以**除去**非物理的极化态

但是 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 与正则量子化程序不相容，我们不能直接使用它

需要将它转换到 Hilbert 空间中态矢的期待值上，要求任何物理上允许的态矢 $|\Psi\rangle$ 必须满足弱 Lorenz 规范条件

$$\langle\Psi|\, \partial_\mu A^\mu(x)\, |\Psi\rangle = 0$$

Gupta-Bleuler 条件

- 将 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式分解成正能解和负能解两个部分，$A^\mu = A^{\mu(+)} + A^{\mu(-)}$
- 正能解部分为 $A^{\mu(+)}(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, b_{\mathbf{p},\sigma} e^{-ip\cdot x}$
- 负能解部分为 $A^{\mu(-)}(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} e^{ip\cdot x} = [A^{\mu(+)}(x)]^\dagger$
- 如果要求任何物理上允许的态矢 $|\Psi\rangle$ 必须满足 **Gupta-Bleuler 条件**

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle = 0$$

- 则伴随有 $\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(-)}(x) = \langle\Psi|\,[\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)]^\dagger = 0$
- 从而弱 Lorenz 规范条件得到满足：

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^\mu(x)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle + \langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(-)}(x)\,|\Psi\rangle = 0$$

- 可见，Gupta-Bleuler 条件比弱 Lorenz 规范条件稍强一些

Suraj Narayan Gupta
(1924–)
Konrad Bleuler
(1912–1992)

Gupta-Bleuler 条件的影响

根据 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},1) = p_\mu e^\mu(\mathbf{p},2) = 0$ 和 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) = E_\mathbf{p} = -p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)$，有

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) &= \partial_\mu \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, b_{\mathbf{p},\sigma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \left[p_\mu \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, b_{\mathbf{p},\sigma} \right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} E_\mathbf{p} (b_{\mathbf{p},0} - b_{\mathbf{p},3})
\end{aligned}
$$

Gupta-Bleuler 条件 $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle = 0$ 意味着 $(b_{\mathbf{p},0} - b_{\mathbf{p},3})\,|\Psi\rangle = 0$，即

$$
b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle = b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle, \quad \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},0} = \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},3}
$$

于是 $\langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},0} b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},3} b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle$

物理的单粒子态

- 由于 $\langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},0} b_{\mathbf{p},0}\, |\Psi\rangle = \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},3} b_{\mathbf{p},3}\, |\Psi\rangle$，物理态 $|\Psi\rangle$ 的**能量期待值**为

$$\langle\Psi|\, H\, |\Psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \langle\Psi| \left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0} b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{p},\sigma} \right) |\Psi\rangle + E_{\text{vac}} \langle\Psi|\Psi\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_{\sigma=1}^{2} \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{p},\sigma}\, |\Psi\rangle + E_{\text{vac}} \langle\Psi|\Psi\rangle$$

- 也就是说，**非物理**的**类时极化**与**纵向极化**对**能量**的贡献总是**相互抵消**的
- 除了零点能，只有**两种物理的横向极化**才对**能量**有**净贡献**
- 可见，要求 **Gupta-Bleuler 条件**成立会**除去非物理极化态**的**贡献**

物理的单粒子态

- 由于 $\langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},0} b_{\mathbf{p},0} \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},3} b_{\mathbf{p},3} \,|\Psi\rangle$，物理态 $|\Psi\rangle$ 的**能量期待值**为

$$\langle\Psi|\, H \,|\Psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_\mathbf{p} \,\langle\Psi| \left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0} b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{p},\sigma}\right) |\Psi\rangle + E_\text{vac}\,\langle\Psi|\Psi\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_\mathbf{p} \sum_{\sigma=1}^{2} \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{p},\sigma} \,|\Psi\rangle + E_\text{vac}\,\langle\Psi|\Psi\rangle$$

- 也就是说，**非物理**的**类时极化**与**纵向极化**对**能量**的贡献总是**相互抵消**的
- 除了零点能，只有**两种物理的横向极化**才对**能量**有**净贡献**
- 可见，要求 **Gupta-Bleuler 条件**成立会**除去非物理极化态**的**贡献**
- 对于 $\sigma = 1, 2$ 的单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$，由 $[b_{\mathbf{q},0}, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] = [b_{\mathbf{q},3}, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] = 0$ 得

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\sigma\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \frac{-ie^{-iq\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\, E_\mathbf{q}(b_{\mathbf{q},0} - b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_\mathbf{p}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\,|0\rangle = 0$$

- 可见，**横向极化**的单粒子态 $|\mathbf{p},1\rangle$ 和 $|\mathbf{p},2\rangle$ 是**物理**的，满足 **Gupta-Bleuler 条件**

非物理的单粒子态

由 $[b_{\mathbf{q},3}, b^\dagger_{\mathbf{p},0}] = [b_{\mathbf{q},0}, b^\dagger_{\mathbf{p},3}] = 0$ 得

$$\begin{aligned}
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},0\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{-ie^{-iq\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\,E_\mathbf{q}(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}\,|0\rangle \\
&= -i\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-iq\cdot x}E_\mathbf{q}\,[b_{\mathbf{q},0}, b^\dagger_{\mathbf{p},0}]\,|0\rangle \\
&= ig_{00}\int d^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-iq\cdot x}E_\mathbf{q}\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = ie^{-ip\cdot x}E_\mathbf{p}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

非物理的单粒子态

由 $[b_{\mathbf{q},3}, b^\dagger_{\mathbf{p},0}] = [b_{\mathbf{q},0}, b^\dagger_{\mathbf{p},3}] = 0$ 得

$$\begin{aligned}
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}E_\mathbf{q}(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}\,|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_\mathbf{q}\,[b_{\mathbf{q},0}, b^\dagger_{\mathbf{p},0}]\,|0\rangle \\
&= \mathrm{i}g_{00}\int \mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_\mathbf{q}\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_\mathbf{p}\,|0\rangle \\
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},3\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}E_\mathbf{q}(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\,\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}\,|0\rangle \\
&= \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_\mathbf{q}\,[b_{\mathbf{q},3}, b^\dagger_{\mathbf{p},3}]\,|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}g_{33}\int \mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,e^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_\mathbf{q}\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_\mathbf{p}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

由于 $E_\mathbf{p} \neq 0$，$|\mathbf{p},0\rangle$ 和 $|\mathbf{p},3\rangle$ **不符合 Gupta-Bleuler 条件**，确实是**非物理**的态矢

总动量算符

无质量矢量场的**总动量算符**为

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\, \pi_\mu \nabla A^\mu = -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\ &\qquad \times (\mathrm{i}p_0)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\ &= \cdots = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)\end{aligned}$$

根据 $\langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},3}b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle$，物理态 $|\Psi\rangle$ 的**动量期待值**为

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,\mathbf{P}\,|\Psi\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,\langle\Psi|\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)|\Psi\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\sum_{\sigma=1}^{2}\langle\Psi|\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\,|\Psi\rangle\end{aligned}$$

同样，只有**两种物理的横向极化**才对动量有净贡献

另一组产生湮灭算符

通过线性组合，可以用湮灭算符 $b_{\mathbf{p},1}$ 和 $b_{\mathbf{p},2}$ 定义另一组等价的湮灭算符

$$a_{\mathbf{p},\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\mathbf{p},1} \mp \mathrm{i} b_{\mathbf{p},2})$$

相应的产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\pm}$ 可以通过取厄米共轭得到

反过来，有 $b_{\mathbf{p},1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p},+} + a_{\mathbf{p},-})$ 和 $b_{\mathbf{p},2} = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p},+} - a_{\mathbf{p},-})$

由之前的对易关系

$$[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] = [b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = 0, \quad \sigma = 0,1,2,3$$

推出新的产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0, \quad \lambda, \lambda' = \pm$$

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] = [b_{\mathbf{p},\sigma}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda}] = [a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\sigma}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] = 0, \quad \lambda = \pm, \quad \sigma = 0, 3$$

物理的圆极化态

用**横向圆极化矢量** $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[e^\mu(\mathbf{p},1) \pm \mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)]$ 表示**横向线极化矢量** $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$，有

$$e^\mu(\mathbf{p},1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) + \varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)], \quad e^\mu(\mathbf{p},2) = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) - \varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)]$$

推出 $\sum_{\sigma=1}^{2} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma} = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $\sum_{\sigma=1}^{2} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$

将 $A^\mu(x)$ **的平面波展开式**改写成

$$\begin{aligned} A^\mu(x) = & \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right) \\ & + \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \end{aligned}$$

第一行对应于**非物理极化态**，第二行对应于**两种物理的圆极化态**

单粒子螺旋度本征态

- 引入物理的单粒子态 $|\mathbf{p},\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle,\quad \lambda=\pm$
- 类似于有质量矢量场的情况，可以推出 $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \lambda\,|\mathbf{p},\lambda\rangle,\quad \lambda=\pm$
- 即 $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态
- 因此新定义的湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\pm}$ 正是螺旋度 $\lambda=\pm$ 所对应的湮灭算符
- 此外，容易推出 $\sum_{\sigma=1}^{2} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{p},\sigma} = \sum_{\lambda=\pm} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda}$
- 因而物理态 $|\Psi\rangle$ 的能量期待值和动量期待值也能表示为

$$\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\sum_{\lambda=\pm}\langle\Psi|\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}\,|\Psi\rangle + E_{\mathrm{vac}}\,\langle\Psi|\Psi\rangle$$

$$\langle\Psi|\,\mathbf{P}\,|\Psi\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\sum_{\lambda=\pm}\langle\Psi|\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}\,|\Psi\rangle$$