量 子 场 论

第 1 章　预备知识

1.6 节和 1.7 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 3 月 22 日

1.6 节 作用量原理 1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

- 在**经典力学**中，**质点力学系统**可以用**拉格朗日量**（Lagrangian）描述，它是系统的**动能与势能之差**
- 对于具有 n **个自由度**的系统，可以定义 n 个相互独立的**广义坐标** (generalized coordinate) q_i ，它们的时间导数是**广义速度** (generalized velocity) $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$
- 从而将拉格朗日量表达为广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$
- 系统的**作用量**定义为 $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$

Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)

1.6 节 作用量原理 1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

在经典力学中，质点力学系统可以用拉格朗日量（Lagrangian）描述，它是系统的动能与势能之差

对于具有 n 个自由度的系统，可以定义 n 个相互独立的广义坐标 (generalized coordinate) q_i ，它们的时间导数是广义速度 (generalized velocity) $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$

从而将拉格朗日量表达为广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$

系统的作用量定义为 $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$

(最小) 作用量原理指出，

作用量的变分极值 ($\delta S = 0$) 对应于系统的经典运动轨迹

假设时间的变分 $\delta t = 0$，即不作时间坐标的变换，则

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i$$

也就是说，时间导数的变分等于变分的时间导数

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Euler-Lagrange 方程

从而得到

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \dot{q}_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

分部积分

Euler-Lagrange 方程

从而得到

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta \dot{q}_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta q_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}
$$

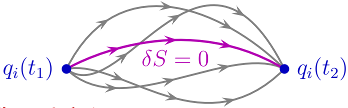
分部积分

Leonhard Euler
(1707–1783)

再**假设**在初始和结束时刻广义坐标的变分为零，即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

则**最后一行第二项为零**，由于变分 $\delta q_i(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ 是**任意**的，$\delta S = 0$ 等价于

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n
$$



这是 **Euler-Lagrange 方程**，它给出质点系统的**经典运动方程**

广义动量和哈密顿量

- 引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

- 求解上式表示的 n 个方程，将**广义速度**表达成 q_i 和 p_i 的函数 $\dot{q}_i(q_i, p_i)$，通过 **Legendre 变换**定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$

Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)

William Rowan Hamilton
(1805–1865)

广义动量和哈密顿量

- 引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

- 求解上式表示的 n 个方程，将**广义速度**表达成 q_i 和 p_i 的函数 $\dot{q}_i(q_i, p_i)$，通过 **Legendre 变换**定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$

- H 是 q_i 和 p_i 的函数
- 这样定义的 H 基本上是系统的**总能量**，即**动能与势能之和**
- 用 H 取替 L 来表达作用量 S，则**作用量的变分**为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta(p_i \dot{q}_i - H)$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)

William Rowan Hamilton
(1805–1865)

Hamilton 正则运动方程

- 由 $p_i\delta\dot{q}_i = p_i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i$ 得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\dot{q}_i\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] + p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

- 根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，上式最后一行第二项为零

Hamilton 正则运动方程

- 由 $p_i\delta\dot{q}_i = p_i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i$ 得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\dot{q}_i\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right]$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] + p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$

- 根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，上式最后一行第二项为零
- 于是 $\delta S = 0$ 给出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

- 这是 **Hamilton 正则运动方程**
- 相当于用 **$2n$ 个一阶方程**代替 **n 个二阶 Euler-Lagrange 方程** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- **广义坐标** q_i 和**广义动量** p_i 统称为**正则变量**

1.6.2 小节　经典场论中的作用量原理

- 场是时空坐标 x^μ 的函数
- 在经典场论中，场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 都是一个自由度
- 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学
- 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量 $L=\int d^3x\,\mathcal{L}(x)$
- 其中 $\mathcal{L}(x)$ 称为拉格朗日量密度，下文将它简称为拉氏量
- 这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ，没有再依赖于其它时空点

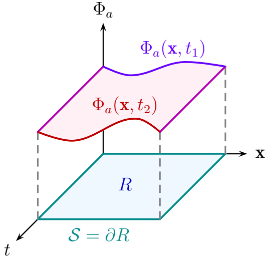
1.6.2 小节　经典场论中的作用量原理

- 场是时空坐标 x^μ 的函数
- 在经典场论中，场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 都是一个自由度
- 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学
- 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量 $L=\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(x)$
- 其中 $\mathcal{L}(x)$ 称为拉格朗日量密度，下文将它简称为拉氏量
- 这里的"局域"指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ，没有再依赖于其它时空点
- 设 $\mathcal{L}$ 是系统中 n 个场 $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ $(a=1,\cdots,n)$ 及其时空导数 $\partial_\mu\Phi_a$ 的函数
- 作用量表达为 $$S=\int \mathrm{d}t\,L=\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a,\partial_\mu\Phi_a)$$
- 由于 d^4x 是 Lorentz 不变的，如果 $\mathcal{L}$ 也是 Lorentz 不变的，则 S 就是 Lorentz 不变量，从而由作用量原理得到的运动方程满足狭义相对性原理
- 因此，构建相对论性场论的关键在于要求拉氏量 $\mathcal{L}$ 是一个 **Lorentz 标量**

经典场论的作用量变分

- 类似于前面质点力学的处理方式，假设时空坐标的变分 $\delta x^\mu = 0$
- 即不作时空坐标的变换，那么对场的时空导数的变分等于场变分的时空导数，

$$\delta(\partial_\mu \Phi_a) = \partial_\mu(\delta\Phi_a)$$



- 于是推出

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\, \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\,\delta(\partial_\mu \Phi_a)\right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\,\partial_\mu(\delta\Phi_a)\right] \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a}\,\delta\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\right]\delta\Phi_a\right\} \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\right]\delta\Phi_a + \int d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right]
\end{aligned}$$

- 上式最后一行第二项的被积函数是关于时空坐标的**全散度** (total divergence)

场的 Euler-Lagrange 方程

利用广义 Stokes 定理将上述全散度转化为边界面积分：

$$\int d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a \right] = \int_{\mathcal{S}} d\sigma_\mu\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a$$

其中 $\mathcal{S}$ 是积分区域 R 的边界面，$d\sigma_\mu$ 是 $\mathcal{S}$ 上的面元

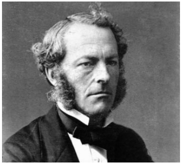
进一步假设在边界面 $\mathcal{S}$ 上 $\delta\Phi_a = 0$，则上式为零

我们通常讨论整个时空区域上的场，这里相当于假设 Φ_a 在无穷远时空边界上的变分为零，于是，由

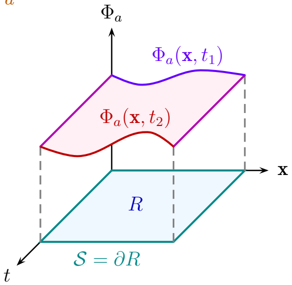
$$0 = \delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta\Phi_a + \int d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a \right]$$

推出

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0, \quad a = 1, \cdots, n$$



George Stokes (1819–1903)



这就是场的 Euler-Lagrange 方程，它给出场的经典运动方程

共轭动量密度

- 引入场的**共轭动量密度** (conjugate momentum density) $\pi_a(\mathbf{x},t) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}$

- π_a 也称为**正则共轭场**，接着用 Legendre 变换将**哈密顿量**定义为

$$H \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \pi_a \dot{\Phi}_a - L \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}$$

- 其中 $\mathcal{H}(\Phi_a, \pi_a, \nabla\Phi_a) = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$ 是**哈密顿量密度**，**作用量变分**为

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}^4x\, \delta\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\, \delta(\pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{H}) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\dot{\Phi}_a \delta\pi_a + \pi_a \delta\dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a}\, \delta\Phi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}\, \delta\pi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \cdot \delta(\nabla\Phi_a) \right]
\end{aligned}$$

- 方括号中的第二项和最后一项分别化为

$$\pi_a \delta\dot{\Phi}_a = \pi_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta\Phi_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a \delta\Phi_a) - \dot{\pi}_a \delta\Phi_a,$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \cdot \nabla(\delta\Phi_a) = -\nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\, \delta\Phi_a \right] + \left[\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \right] \delta\Phi_a$$

场的正则运动方程

- 从而得到

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \left\{ \left(\dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \right) \delta\pi_a - \left[\dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \right] \delta\Phi_a \right\}$$
$$+ \int \mathrm{d}^4x \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a \delta\Phi_a) - \int \mathrm{d}^4x \, \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \delta\Phi_a \right]$$

- 与前面一样，假设在**时空区域边界面上** $\delta\Phi_a = 0$
- 则上式最后一行的两个**全导数积分项均为零**
- 于是，$\delta S = 0$ 给出**场的正则运动方程**

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)}$$

- **场** Φ_a 和它的**共轭动量密度** π_a 是系统的**正则变量**

1.7 节 Noether 定理、对称性与守恒定律

- 如前所述，若一种对称变换可用连续变化的参数描述，则它是一种**连续变换**，连续变换对应的对称性称为**连续对称性**

- Lorentz 对称性就是一种连续对称性

- **Noether 定理**指出，

> 如果系统具有**一种连续对称性**，就必然存在**一条**对应的**守恒定律**

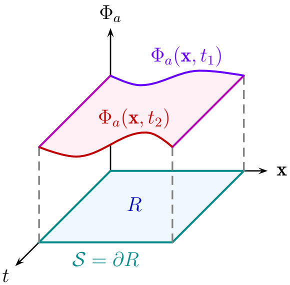
- Noether 定理首先是在**经典物理**中给出的，但实际上它适用于所有物理行为由**作用量原理**决定的系统

- 因此，可以将它推广到**量子物理**中

Emmy Noether
(1882–1935)

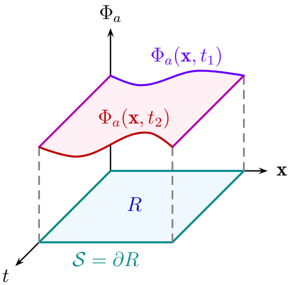
1.7.1 小节 场论中的 Noether 定理

- 下面在**场论**中证明 **Noether 定理**
- **时空区域** R 中的作用量为 $S=\int_R \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a,\partial_\mu\Phi_a)$
- 考虑一个**连续变换**，使得 $\Phi_a(x)\to\Phi'_a(x')$
- 其中已包含了**坐标变换** $x^\mu\to x'^\mu$
- 它引起的**拉氏量变换**为 $\mathcal{L}(x)\to\mathcal{L}'(x')$



1.7.1 小节　场论中的 Noether 定理

- 下面在场论中证明 Noether 定理
- 时空区域 R 中的作用量为 $S = \int_R d^4x\, \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$
- 考虑一个连续变换，使得 $\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x')$
- 其中已包含了坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$
- 它引起的拉氏量变换为 $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x')$
- 我们可以对连续对称性取极限，即考虑无穷小变换
- 记上述连续变换的无穷小变换形式为



$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a, \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}$$

- 如果在此变换下，$\delta S = \int_{R'} d^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x\, \mathcal{L}(x) = 0$，则系统具有相应的连续对称性

体积元的变化

- 体积元的变化为 $\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\mathrm{d}^4x$，$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \simeq \det\left[\delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right]$
- 上式中**约等于号**表示只展开到**一阶小量**，下同
- 任意方阵 A 满足 $\boxed{\det[\exp(A)] = \exp[\mathrm{tr}(A)]}$，其中 $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$
- 对于无穷小的 A，把上式两边展开至一阶小量，得 $\det(\mathbf{1}+A) \simeq 1 + \mathrm{tr}(A)$
- 利用上式将 Jacobi 行列式 $\mathcal{J}$ 化为 $\mathcal{J} \simeq 1 + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right] = 1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})$
- 从而，**体积元**的**无穷小变换**形式为 $\mathrm{d}^4x' \simeq [1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})]\mathrm{d}^4x$

体积元的变化

- 体积元的变化为 $\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\mathrm{d}^4x$，$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \simeq \det\left[\delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right]$
- 上式中**约等于号**表示只展开到**一阶小量**，下同
- 任意方阵 A 满足 $\boxed{\det[\exp(A)] = \exp[\mathrm{tr}(A)]}$，其中 $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$
- 对于无穷小的 A，把上式两边展开至一阶小量，得 $\det(\mathbf{1} + A) \simeq 1 + \mathrm{tr}(A)$
- 利用上式将 Jacobi 行列式 $\mathcal{J}$ 化为 $\mathcal{J} \simeq 1 + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right] = 1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})$
- 从而，**体积元**的**无穷小变换**形式为 $\mathrm{d}^4x' \simeq [1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})]\mathrm{d}^4x$
- **作用量**在此无穷小变换下的**变分**是

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{R'} \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) \\
&\simeq \int_R \mathrm{d}^4x\, [1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})][\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) \simeq \int_R \mathrm{d}^4x\, [\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(x)\partial_{\mu}(\delta x^{\mu})] \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}\delta(\partial_{\mu}\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_{\mu}(\delta x^{\mu})\right]
\end{aligned}
$$

两种变分算符

- 记 x^μ **固定**时的变分算符为 $\bar{\delta}$，满足

$$\bar{\delta}\Phi_a(x) = \Phi'_a(x) - \Phi_a(x)$$

- $\bar{\delta}$ **算符**可以**与时空导数交换**，$\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a)$，$\delta$ **算符**则**不一定**可以
- $\delta\Phi_a$ 与 $\bar{\delta}\Phi_a$ 的关系为

$$\begin{aligned}\delta\Phi_a &= \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \Phi'_a(x) - \Phi_a(x)\\ &= \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \bar{\delta}\Phi_a \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu\end{aligned}$$

- 即

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu$$

- 将上面的 Φ_a 替换为 $\partial_\mu\Phi_a$，即得

$$\delta(\partial_\mu\Phi_a) = \bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu$$

作用量变分

从而得到

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_R \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta(\partial_\mu\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right] \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}[\bar\delta\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}[\partial_\mu(\bar\delta\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu] + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\bar\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar\delta\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar\delta\Phi_a \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\,\partial_\mu(\partial_\nu\Phi_a)\delta x^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar\delta\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar\delta\Phi_a\right]\right. \\
&\qquad \left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\frac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\frac{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu + \mathcal{L}\,\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right]\right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar\delta\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar\delta\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right]\right\}
\end{aligned}
$$

第二步用到导数的乘积法则，最后一步涉及复合函数 $\mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu\Phi_a)$ 的求导关系

Noether 守恒流

- **Euler-Lagrange 方程**表明 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} = 0$
- 由于**积分区域** R 可以是**任意**的，

$$0 = \delta S = \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \right] \bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \right\}$$

等价于

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = 0$$

- 定义 **Noether 守恒流** $\boxed{j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu}$
- 则有**守恒流方程** $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$

Noether 守恒流

Euler-Lagrange 方程表明 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}-\partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}=0$

由于积分区域 R 可以是任意的，

$$0=\delta S=\int_R \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]\right\}$$

等价于

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]=0$$

定义 **Noether 守恒流**

$$j^\mu\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu$$

则有守恒流方程 $\partial_\mu j^\mu=0$，两边对空间区域 $\tilde{R}$ 积分，运用 Gauss 定理，得到

$$0=\int_{\tilde{R}}\mathrm{d}^3x\,\partial_\mu j^\mu=\int_{\tilde{R}}\mathrm{d}^3x\,\partial_0 j^0+\int_{\tilde{R}}\mathrm{d}^3x\,\nabla\cdot\mathbf{j}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tilde{R}}\mathrm{d}^3x\,j^0+\int_{\tilde{S}}\mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是边界面 $\tilde{S}$ 上的定向面元，以外法线方向为正向

守恒荷

- 引入**守恒荷** $Q \equiv \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\tilde{S}} \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

- 即**区域** $\tilde{R}$ 中的**守恒荷减少率**（**增加率**）等于从**边界面出来**（**进入**）的**流**
- 这表明守恒荷**不能**凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度

守恒荷

- 引入**守恒荷** $Q \equiv \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\tilde{S}} \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

- 即**区域** $\tilde{R}$ 中的**守恒荷减少率**（**增加率**）等于从**边界面出来**（**进入**）的**流**
- 这表明守恒荷**不能**凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度
- 对于**整个三维空间**而言，**边界面** $\tilde{S}$ 位于**无穷远**处
- 通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在**无穷远处** $\mathbf{j} \to \mathbf{0}$
- 故**全空间的守恒荷** $Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0$ 满足 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$
- 可见，Q 不随时间变化，是一个**守恒量**

守恒荷

- 引入守恒荷 $Q \equiv \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\tilde{S}} \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

- 即区域 $\tilde{R}$ 中的守恒荷减少率（增加率）等于从边界面出来（进入）的流
- 这表明守恒荷**不能**凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度
- 对于整个三维空间而言，边界面 $\tilde{S}$ 位于无穷远处
- 通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在无穷远处 $\mathbf{j} \to \mathbf{0}$
- 故全空间的守恒荷 $Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0$ 满足 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$
- 可见，Q 不随时间变化，是一个守恒量
- 综上，在场论中，如果一个系统具有某种连续对称性，则存在相应的守恒流 j^μ
- 它满足守恒流方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$，而全空间的守恒荷 Q 不随时间变化（守恒定律）

1.7.2 小节　时空平移对称性

- 时空坐标的**平移** (translation) **变换**定义为

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

- 其中 a^{μ} 是**平移变换参数**，**不依赖于** x^{μ}，故 $\mathrm{d}x'^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}$
- 从而，时空平移变换保持 $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ 不变，即

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$$

Henri Poincaré
(1854–1912)

- 因此，时空平移变换**保持** **Minkowski 时空**的**线元** (line element) $\mathrm{d}s$ **不变**
- 所有时空平移变换构成**时空平移群**
- **保持线元平方** $\mathrm{d}s^2$ **不变**的变换称为 **Poincaré 变换**，也称为**非齐次** Lorentz 变换

Poincaré 群

- 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**
- **线元不变**意味着**距离不变**
- 因而 Poincaré 群是 **Minkowski 时空**的**等距群** (isometry group)，记作 $\mathrm{ISO}(1,3)$
- **Lorentz 群**是 Poincaré 群的**子群**，$\mathrm{O}(1,3) < \mathrm{ISO}(1,3)$

Poincaré 群

- 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**
- **线元不变**意味着**距离不变**
- 因而 Poincaré 群是 **Minkowski 时空**的**等距群** (isometry group)，记作 $\mathrm{ISO}(1,3)$
- **Lorentz 群**是 Poincaré 群的**子群**，$\mathrm{O}(1,3) < \mathrm{ISO}(1,3)$
- 任意 Poincaré 变换可表示成 **Lorentz 变换**和**时空平移变换**的组合
- 也就是说，时空坐标的 **Poincaré 变换**表达为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

- 利用**保度规条件**，容易验证这样的变换**保持 $\mathrm{d}s^2$ 不变**：

$$\mathrm{d}s'^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma} = g_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma} = \mathrm{d}s^2$$

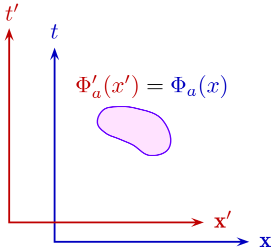
- 数学上称 Poincaré 群是 **Lorentz 群**与**时空平移群**的**半直积群**

时空平移对称性

Minkowski 时空是均匀 (homogeneous) 的，处于其中的系统具有时空平移对称性

在时空平移变换 $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的形状不会改变，有

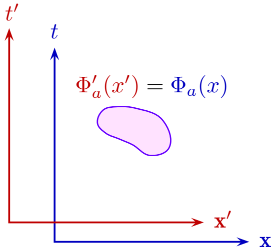
$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$$



时空平移对称性

- **Minkowski 时空**是**均匀** (homogeneous) 的，处于其中的系统具有**时空平移对称性**
- 在时空平移变换 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的**形状不会改变**，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$$



- 对于**无穷小变换**，将变换参数 a^μ 改记为 ε^μ，则

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \quad \delta\Phi_a = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = 0$$

- 故 $\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = -\varepsilon^\rho\partial_\rho\Phi_a$
- 代入到 **Noether 守恒流**表达式，得

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\varepsilon^\rho\partial_\rho\Phi_a + \mathcal{L}\varepsilon^\mu$$

$$= -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\rho\Phi_a - \delta^\mu{}_\rho\mathcal{L}\right]\varepsilon^\rho$$

能动张量

- 从而，$\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu{}_\rho \mathcal{L} \right] = 0$$

- 各项乘以 $g^{\rho\nu}$，缩并，得

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0$$

- 上式方括号部分是场的**能动张量** (energy-momentum tensor)

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

- 它满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

- 因此，对 $T^{0\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ 作**全空间积分**，就得到 **4 个守恒荷**
- 只要保证 $\mathcal{L}$ 是 **Lorentz 标量**，那么 $T^{\mu\nu}$ 就是 **2 阶 Lorentz 张量**

能量守恒定律和动量守恒定律

- 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 **分量**为 $T^{00}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\dot{\Phi}_a-\mathcal{L}=\pi_a\dot{\Phi}_a-\mathcal{L}=\mathcal{H}$
- 可见，T^{00} 就是**哈密顿量密度** $\mathcal{H}$，对应于**时间平移变换** $x'^0=x^0+\varepsilon^0$
- T^{00} 的全空间积分 $H=\int d^3x\,T^{00}=\int d^3x\,\mathcal{H}$ 是场的**哈密顿量**，即**总能量**
- 它是时间平移变换的**守恒荷**，因此 **时间平移对称性**对应于**能量守恒定律**

能量守恒定律和动量守恒定律

- 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 分量为 $T^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$
- 可见，T^{00} 就是哈密顿量密度 $\mathcal{H}$，对应于时间平移变换 $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$
- T^{00} 的全空间积分 $H = \int d^3x\, T^{00} = \int d^3x\, \mathcal{H}$ 是场的哈密顿量，即总能量
- 它是时间平移变换的守恒荷，因此 **时间平移对称性对应于能量守恒定律**
- 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量 $T^{0i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\partial^i\Phi_a = \pi_a\partial^i\Phi_a$ 是场的动量密度
- 它对应于空间平移变换 $x'^i = x^i + \varepsilon^i$
- T^{0i} 的全空间积分 $P^i = \int d^3x\, T^{0i} = \int d^3x\, \pi_a\partial^i\Phi_a$ 是场的总动量
- 三维矢量形式为 $\mathbf{P} = -\int d^3x\, \pi_a\nabla\Phi_a$
- 总动量是空间平移变换的守恒荷，因此 **空间平移对称性对应于动量守恒定律**

1.7.3 小节 Lorentz 对称性

在相对论性场论中，要求拉氏量 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 标量，因而作用量 S 是 Lorentz 不变量，系统具有 Lorentz 对称性

考虑无穷小固有保时向 Lorentz 变换

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$

其中 $\omega^\mu{}_\nu$ 是变换的无穷小参数，由保度规条件有

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta) \\ &\simeq g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\omega^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\omega^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

可见，$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu$ 关于两个指标反对称，

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

因此，$\omega_{\mu\nu}$ 只有 6 个独立分量

分别对应于沿 3 个空间轴方向的增速变换和绕 3 个空间轴的旋转变换

无穷小旋转变换

- 下面举两个例子说明 $\omega_{\mu\nu}$ 的具体形式
- 对于**绕 z 轴旋转 θ 角**的变换矩阵

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 利用三角函数展开式 $\cos\theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ 和 $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$，得

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

无穷小增速变换

🚲 对于沿 x 轴增速变换，引入快度 (rapidity) $\boxed{\xi \equiv \tanh^{-1}\beta}$，则 $\beta = \tanh\xi$

🚴 利用双曲函数公式 $\tanh\xi = \sinh\xi/\cosh\xi$ 和 $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1$ 推出

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = (1-\tanh^2\xi)^{-1/2} = \left(\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right)^{-1/2} = \cosh\xi$$

$$\beta\gamma = \tanh\xi\cosh\xi = \sinh\xi$$

🚵 增速变换矩阵改写成 $\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & & \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

🏁 根据双曲函数展开式 $\cosh\xi = 1 + \mathcal{O}(\xi^2)$ 和 $\sinh\xi = \xi + \mathcal{O}(\xi^3)$，有

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentz 群表示的生成元

🏇 在**无穷小 Lorentz 变换**的作用下，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) x^{\nu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

🏇 对变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 在 $\omega_{\mu\nu} = 0$ **附近**作 **Taylor 级数**，展开到 $\omega_{\mu\nu}$ **的第一阶**，得

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu} \left. \frac{\partial \Phi'_a(x')}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right|_{\omega_{\mu\nu}=0}$$

Brook Taylor
(1685–1731)

Lorentz 群表示的生成元

在无穷小 Lorentz 变换的作用下，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu})x^{\nu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

对变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 在 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 附近作 Taylor 级数，展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 的第一阶，得

$$\begin{aligned}\Phi'_a(x') &= \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu}\left.\frac{\partial\Phi'_a(x')}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=0} \\ &= \Phi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) \\ &= \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)\end{aligned}$$

其中 $(I^{\mu\nu})_{ab} \equiv \dfrac{2\mathrm{i}}{\Phi_b(x)}\left.\dfrac{\partial\Phi'_a(x')}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=0}$ 是 Φ_a 所属 Lorentz 群表示的生成元 (generator)

Brook Taylor
(1685–1731)

群表示	场 Φ_a	$(I^{\mu\nu})_{ab}$
恒等表示	标量场 ϕ	0
矢量表示	矢量场 A^{μ}	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\rho}{}_{\sigma}$
旋量表示	旋量场 ψ_a	$(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}$

由于 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的，$(I^{\mu\nu})_{ab}$ 关于 μ 和 ν 反对称，$(I^{\mu\nu})_{ab} = -(I^{\nu\mu})_{ab}$

Lorentz 对称性的 Noether 流

现在 $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$，有

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\Phi_a &= \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - (\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

Noether 流 $j^\mu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu$

$$\begin{aligned}&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right]\omega^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

其中 $T^\mu{}_\nu \equiv T^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$ 是**能动张量** $T^{\mu\nu}$ 的另一种写法

注意参与**缩并的 Lorentz 指标一升一降不会改变**表达式的结果：

$$T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho = T^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\sigma\omega^\sigma{}_\rho = T^\mu{}_\nu g^{\nu\alpha}g_{\alpha\sigma}\omega^\sigma{}_\rho = T^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}$$

Lorentz 对称性的守恒荷

再利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的**反对称性**推出

$$T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho x^\rho = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^\rho = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^\rho - T^{\mu\nu}\omega_{\rho\nu}x^\rho) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^\rho - T^{\mu\rho}\omega_{\nu\rho}x^\nu)$$
$$= \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu)$$

于是，**Noether 流**化为

$$j^\mu = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{J}^{\mu\nu\rho}\omega_{\nu\rho}$$

其中 $\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho}x^\nu - T^{\mu\nu}x^\rho - \mathrm{i}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b$

$\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出 $\partial_\mu\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0$，Lorentz 对称性的**守恒荷**为

$$J^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3x\,\mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int \mathrm{d}^3x\,[T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho - \mathrm{i}\pi_a(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b]$$

易见 $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$，因而一共有 **6 个独立的守恒荷**，满足 $\mathrm{d}J^{\nu\rho}/\mathrm{d}t = 0$

守恒荷的分解

为明确物理含义，将**守恒荷**分解成两项，

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}$$

第一项为 $L^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3x\,(T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho)$

关于指标的**反对称性**意味着它的**纯空间分量** L^{jk} 中只有 **3 个**是**独立**的

利用**三维 Levi-Civita 符号**将 L^{jk} **对偶**成**三维矢量**

$$L^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}L^{jk} = (L^{23}, L^{31}, L^{12})$$

由此推出

动量密度

$$L^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\int \mathrm{d}^3x\,(T^{0k}x^j - T^{0j}x^k) = \int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon^{ijk}x^j T^{0k} = \int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon^{ijk}x^j \pi_a \partial^k \Phi_a$$

写成矢量形式是 $\mathbf{L} = -\int \mathrm{d}^3x\;\mathbf{x}\times(\pi_a \nabla\Phi_a)$，这是场的**轨道角动量**

角动量守恒定律

- 第二项为 $S^{\nu\rho} \equiv -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \pi_a (I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b$
- 同样，$S^{\nu\rho}$ 纯空间分量的**对偶三维矢量**为

$$S^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}S^{jk} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ijk}\int \mathrm{d}^3x\, \pi_a (I^{jk})_{ab}\Phi_b$$

- 这是场的**自旋角动量**
- $J^{\nu\rho}$ 纯空间分量的**对偶三维矢量**为

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}J^{jk} = L^i + S^i$$

- 这是场的**总角动量**
- 固有保时向 Lorentz 群的**纯空间部分**就是**空间旋转群** $\mathrm{SO}(3)$
- **空间旋转对称性**对应于**角动量守恒定律**

质心运动守恒定律

- $L^{\nu\rho}$ 的 $i0$ **分量**为

$$L^{i0} = \int d^3x\,(T^{00}x^i - T^{0i}x^0) = \int d^3x\,(x^i\mathcal{H} - x^0\pi_a\partial^i\Phi_a) = \int d^3x\,x^i\mathcal{H} - tP^i$$

- 若 $\dfrac{dS^{i0}}{dt} = 0$，则 $\dfrac{dJ^{i0}}{dt} = 0$ 意味着 $\dfrac{dL^{i0}}{dt} = 0$，再结合**动量守恒** $\dfrac{dP^i}{dt} = 0$，得到

$$\frac{dL^{i0}}{dt} = \frac{d}{dt}\int d^3x\,x^i\mathcal{H} - P^i = 0$$

- 即

$$P^i = Hv_C^i, \quad v_C^i \equiv \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\int d^3x\,x^i\mathcal{H}$$

- 在**低速极限**下，**总能量**约等于**总质量**，$H \simeq M$，故**总动量** $\mathbf{P} \simeq M\mathbf{v}_C$
- $\mathbf{v}_C$ 是**质心** (即质量中心，center of mass) 的**运动速度**
- 应用 **Newton 第二定律**，**外力** $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = M\dfrac{d\mathbf{v}_C}{dt}$，这就是**质心运动定理**
- 因此，L^{i0} **的守恒**在经典力学中对应于**质心运动守恒定律**：当没有外力存在时，质心的加速度为零，质心保持静止或作匀速直线运动

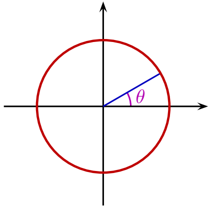
1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

- 考虑包含**复场** $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的**拉氏量** $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 对 ϕ 作 **U(1) 整体变换** $\boxed{\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)}$
- 其中**有理数** q 是常数，**连续变换参数** θ 是实数
- **整体** (global) 指 θ **不依赖于时空坐标** x^μ

1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

- 考虑包含**复场** $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的**拉氏量** $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 对 ϕ 作 **U(1) 整体变换** $\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)$
- 其中**有理数** q 是常数，**连续变换参数** θ 是实数
- **整体** (global) 指 θ **不依赖于时空坐标** x^μ
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$ 是一个**模为** 1 的**相位因子** (phase factor)
- 可看作一个 **1 维幺正矩阵** $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$，满足 $U^\dagger U = 1$
- 故 $\{U\}$ 构成 **U(1) 群**，它是与 **SO(2)** 同构的 Abel 群
- 如右图所示，**SO(2) 群空间**是一个**圆周**

$\mathrm{SO}(2):\ \theta \to [0, 2\pi]$



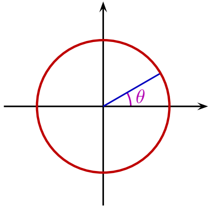
$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}:\ \theta \to [0, 2\pi/q]$

$U(0) = U(2\pi/q) = 1$

1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

- 考虑包含**复场** $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的**拉氏量** $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^*)\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi$
- 对 ϕ 作 **U(1) 整体变换** $\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x)$
- 其中**有理数** q 是常数，**连续变换参数** θ 是实数
- **整体** (global) 指 θ **不依赖于时空坐标** x^μ
- $e^{iq\theta}$ 是一个**模为** 1 的**相位因子** (phase factor)
- 可看作一个 **1 维幺正矩阵** $U = e^{iq\theta}$，满足 $U^\dagger U = 1$
- 故 $\{U\}$ 构成 **U(1) 群**，它是与 **SO(2)** 同构的 Abel 群
- 如右图所示，**SO(2) 群空间**是一个**圆周**

SO(2)： $\theta \to [0, 2\pi]$



$U = e^{iq\theta}$ ： $\theta \to [0, 2\pi/q]$

$U(0) = U(2\pi/q) = 1$

- 相应地，ϕ^* 的 U(1) 整体变换为 $[\phi^*(x)]' = [\phi'(x)]^* = e^{-iq\theta}\phi^*(x)$
- **拉氏量** $\mathcal{L}$ 在这种变换下不变，即具有 **U(1) 整体对称性**，q 称为相应的 **U(1) 荷**
- 与前面叙述的时空平移对称性和 Lorentz 对称性不同，这里的对称性出现在由场构成的**抽象空间**中，与时间和空间**相对独立** ($\delta x^\mu = 0$)，因而是一种**内部对称性**

无穷小 U(1) 整体变换

U(1) 整体变换的无穷小形式为

$$\phi'(x)=\phi(x)+\mathrm{i}q\theta\phi(x),\quad [\phi^*(x)]'=\phi^*(x)-\mathrm{i}q\theta\phi^*(x)$$

结合 $\delta x^\mu=0$，有

$$\bar\delta\phi=\delta\phi=\mathrm{i}q\theta\phi,\quad \bar\delta\phi^*=\delta\phi^*=-\mathrm{i}q\theta\phi^*$$

$\phi(x)$ 与 $\phi^*(x)$ 是线性独立的，代表两个相互独立的自由度，**Noether 流**表达为

$$\begin{aligned}
j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar\delta\Phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu\\
&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\bar\delta\phi^*=\partial^\mu\phi^*(\mathrm{i}q\theta\phi)+\partial^\mu\phi(-\mathrm{i}q\theta\phi^*)\\
&=\mathrm{i}q\theta[(\partial^\mu\phi^*)\phi-(\partial^\mu\phi)\phi^*]=-\mathrm{i}q\theta\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi
\end{aligned}$$

其中，$\overleftrightarrow{\partial^\mu}$ 符号定义为 $\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi\equiv\phi^*\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^*)\phi$

U(1) 守恒流和守恒荷

- 扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv \mathrm{i}q\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$$

- 则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$，相应的守恒荷是

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = \mathrm{i}q \int \mathrm{d}^3x\, \phi^* \overleftrightarrow{\partial^0} \phi$$

- 满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$

U(1) 守恒流和守恒荷

扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv \mathrm{i}q\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$$

则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$，相应的守恒荷是

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = \mathrm{i}q \int \mathrm{d}^3x\, \phi^* \overleftrightarrow{\partial^0}\phi$$

满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$

在实际应用中，q 是由 Φ 场描述的粒子所携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等

因此，一种 U(1) 整体对称性对应于一条荷数守恒定律

比如，**电磁 U(1) 整体对称性对应于电荷守恒定律**