

量子场论

第 1 章 预备知识

1.6 节和 1.7 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2025 年 6 月 6 日



1.6 节 作用量原理

1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

📦 在经典力学中，质点力学系统可以用拉格朗日量 (Lagrangian) 描述，它是系统的动能与势能之差

🌀 对于具有 n 个自由度的系统，可以定义 n 个相互独立的广义坐标 (generalized coordinate) q_i ，它们的时间导数是广义速度 (generalized velocity) $\dot{q}_i = dq_i/dt$

🍪 从而将拉格朗日量表达为广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$

🍪 系统的作用量定义为 $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$



Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)

1.6 节 作用量原理

1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

🍌 在经典力学中，质点力学系统可以用拉格朗日量 (Lagrangian) 描述，它是系统的动能与势能之差

🍌 对于具有 n 个自由度的系统，可以定义 n 个相互独立的广义坐标 (generalized coordinate) q_i ，它们的时间导数是广义速度 (generalized velocity) $\dot{q}_i = dq_i/dt$

🍌 从而将拉格朗日量表达为广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$

🍌 系统的作用量定义为 $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$

🍌 (最小) 作用量原理指出，

作用量的变分极值 ($\delta S = 0$) 对应于系统的经典运动轨迹

🍌 假设时间的变分 $\delta t = 0$ ，即不作时间坐标的变换，则

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

🍌 也就是说，时间导数的变分等于变分的时间导数



Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)

Euler-Lagrange 方程

 广义坐标和广义速度的变分 δq_i 和 $\delta \dot{q}_i$ 导致的作用量变分为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right)$$

分部积分

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Euler-Lagrange 方程

🍰 广义坐标和广义速度的变分 δq_i 和 $\delta \dot{q}_i$ 导致的作用量变分为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right)$$

分部积分

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right]$$

积分

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

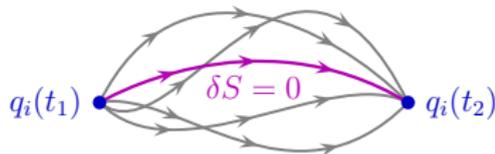


Leonhard Euler
(1707–1783)

🍰 再假设在初始和结束时刻广义坐标的变分为零，即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

🍰 则最后一行第二项为零，由于变分 $\delta q_i(t)$ ($t_1 < t < t_2$) 是任意的， $\delta S = 0$ 等价于

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$



🍰 这是 Euler-Lagrange 方程，它给出质点系统的经典运动方程

广义动量和哈密顿量

引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

求解上式表示的 n 个方程，将**广义速度**表达成 q_i 和 p_i 的函数 $\dot{q}_i(q_i, p_i)$ ，通过 **Legendre 变换**定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$



Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)



William Rowan Hamilton
(1805–1865)

广义动量和哈密顿量

引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

求解上式表示的 n 个方程，将**广义速度**表达成 q_i 和 p_i 的函数 $\dot{q}_i(q_i, p_i)$ ，通过 **Legendre 变换**定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$

并将 H 表达为 q_i 和 p_i 的函数

这样定义的 H 基本上是系统的**总能量**，即**动能与势能之和**

用 H 代替 L 来表达作用量 S ，则**作用量的变分**为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta(p_i \dot{q}_i - H) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \end{aligned}$$



Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)



William Rowan Hamilton
(1805–1865)

Hamilton 正则运动方程

 由 $p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i$ 得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\dot{q}_i \delta p_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

 根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ，上式最后一行第二项为**零**

Hamilton 正则运动方程

🏠 由 $p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i$ 得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\dot{q}_i \delta p_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

🌈 根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ，上式最后一行第二项为**零**

🔧 于是 $\delta S = 0$ 给出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

🍎 这是 **Hamilton 正则运动方程**

👉 相当于用 **$2n$ 个一阶方程**代替 **n 个二阶 Euler-Lagrange 方程** $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

👉 **广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 统称为正则变量**

1.6.2 小节 经典场论中的作用量原理

 场是时空坐标 x^μ 的函数

 在经典场论中，场 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 \mathbf{x} 都是一个自由度

 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学

 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量表达为 $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x)$

 其中 $\mathcal{L}(x)$ 是拉格朗日量密度，在下文中将 $\mathcal{L}(x)$ 简称为拉氏量

 这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ ，没有再依赖于其它时空点

1.6.2 小节 经典场论中的作用量原理

 场是时空坐标 x^μ 的函数

 在经典场论中，场 $\Phi(x, t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 \mathbf{x} 都是一个自由度

 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学

 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量表达为 $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x)$

 其中 $\mathcal{L}(x)$ 是拉格朗日量密度，在下文中将 $\mathcal{L}(x)$ 简称为拉氏量

 这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ ，没有再依赖于其它时空点

 设 \mathcal{L} 是系统中 n 个场 $\Phi_a(x, t)$ ($a = 1, \dots, n$) 及其时空导数 $\partial_\mu \Phi_a$ 的函数

 作用量表达为
$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$$

 由于 d^4x 是 Lorentz 不变的，如果 \mathcal{L} 也是 Lorentz 不变的，则 S 就是 Lorentz 不变量，从而由作用量原理得到的运动方程满足狭义相对性原理

 因此，构建相对论性场论的关键在于要求拉氏量 \mathcal{L} 是一个 Lorentz 标量

经典场论的作用量变分

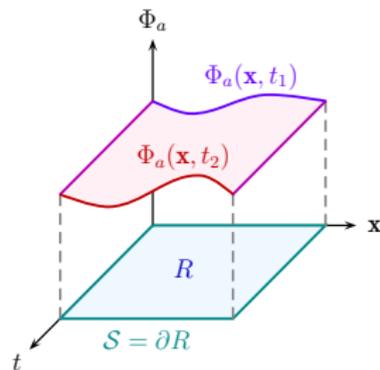
🍎 类似于前面质点力学的处理方式，假设时空坐标的变分 $\delta x^\mu = 0$

🥜 即不作时空坐标的变换，那么对场的时空导数的变分等于场变分的时空导数，

$$\delta(\partial_\mu \Phi_a) = \partial_\mu(\delta\Phi_a)$$

🍆 于是， $\delta\Phi_a$ 和 $\delta(\partial_\mu \Phi_a)$ 导致的作用量变分为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} \delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \delta(\partial_\mu\Phi_a) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} \delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \partial_\mu(\delta\Phi_a) \right] \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} \delta\Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \delta\Phi_a \right] - \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \right] \delta\Phi_a \right\} \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \right] \delta\Phi_a + \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \delta\Phi_a \right] \end{aligned}$$



🍏 上式最后一行第二项的被积函数是关于时空坐标的**全散度** (total divergence)

场的 Euler-Lagrange 方程

🍎 利用广义 Stokes 定理将上述全散度转化为边界面积分：

$$\int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right] = \int_S d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a$$

🥦 其中 S 是积分区域 R 的边界面， $d\sigma_\mu$ 是 S 上的面元

🥬 进一步假设在边界面 S 上 $\delta \Phi_a = 0$ ，则上式为**零**

🥕 我们通常讨论整个时空区域上的场，这里相当于假设 Φ_a 在无穷远时空边界上的变分为零，于是，由

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a + \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right]$$

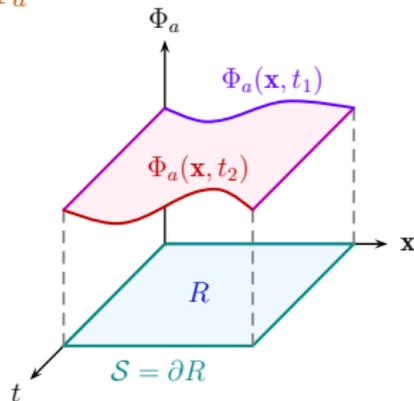
推出

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0, \quad a = 1, \dots, n$$

🌶️ 这就是场的 Euler-Lagrange 方程，它给出场的经典运动方程



George Stokes
(1819–1903)



共轭动量密度

 引入场的**共轭动量密度** (conjugate momentum density)

$$\pi_a(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}$$

 π_a 也称为**正则共轭场**，接着用 Legendre 变换将**哈密顿量**定义为

$$H \equiv \int d^3x \pi_a \dot{\Phi}_a - L \equiv \int d^3x \mathcal{H}$$

 其中 $\mathcal{H}(\Phi_a, \pi_a, \nabla\Phi_a) = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$ 是**哈密顿量密度**，**作用量变分为**

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \delta(\pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{H}) \\ &= \int d^4x \left[\dot{\Phi}_a \delta \pi_a + \pi_a \delta \dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \delta \pi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \cdot \delta (\nabla \Phi_a) \right] \end{aligned}$$

 方括号中的第二项和最后一项分别化为

$$\begin{aligned} \pi_a \delta \dot{\Phi}_a &= \pi_a \frac{\partial}{\partial t} \delta \Phi_a = \frac{\partial}{\partial t} (\pi_a \delta \Phi_a) - \dot{\pi}_a \delta \Phi_a, \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \cdot \nabla (\delta \Phi_a) &= -\nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \delta \Phi_a \right] + \left[\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a \end{aligned}$$

场的正则运动方程

🍏 从而得到

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \left(\dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \right) \delta \pi_a - \left[\dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a \right\} \\ + \int d^4x \frac{\partial}{\partial t} (\pi_a \delta \Phi_a) - \int d^4x \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \delta \Phi_a \right]$$

🍏 与前面一样，假设在**时空区域边界面上** $\delta \Phi_a = 0$

🍏 则上式最后一行的两个**全导数积分项均为零**

🍏 于是， $\delta S = 0$ 给出**场的正则运动方程**

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)}$$

🍏 **场** Φ_a 和它的**共轭动量密度** π_a 是系统的**正则变量**

1.7 节 Noether 定理、对称性与守恒定律

🍦 如前所述，若一种对称变换可用连续变化的参数描述，则它是一种**连续变换**，连续变换对应的对称性称为**连续对称性**

🍊 Lorentz 对称性就是一种连续对称性

🍷 **Noether 定理**指出，

🍷 如果系统具有**一种连续对称性**，就必然存在**一条对应的守恒定律**

🍪 Noether 定理首先是在**经典物理**中给出的，但实际上它适用于所有物理行为由**作用量原理**决定的系统

🍩 因此，可以将它推广到**量子物理**中



Emmy Noether
(1882–1935)

1.7.1 小节 经典场论中的 Noether 定理

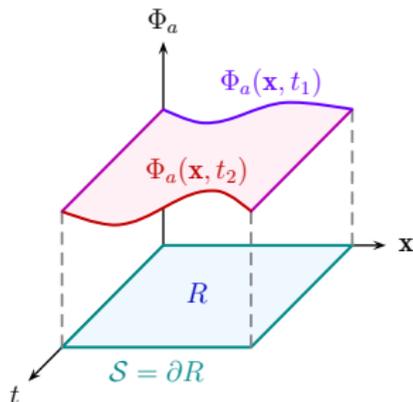
🎆 下面在经典场论中证明 **Noether 定理**

🍫 **时空区域** R 中的作用量为 $S = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$

🌀 考虑一个**连续变换**，使得 $\Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x')$

👛 其中已包含了**坐标变换** $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

🎈 它引起的**拉氏量变换**为 $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x')$



1.7.1 小节 经典场论中的 Noether 定理

 下面在经典场论中证明 **Noether 定理**

 **时空区域** R 中的作用量为 $S = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$

 考虑一个**连续变换**，使得 $\Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x')$

 其中已包含了**坐标变换** $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

 它引起的**拉氏量变换**为 $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x')$

 我们可以对连续对称性**取极限**，即考虑**无穷小变换**

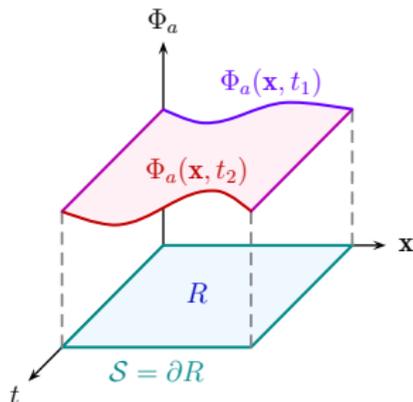
 记**上述连续变换的无穷小变换形式**为

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a, \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}$$

 如果在此变换下，对**任意时空区域** R 都有

$$\delta S = \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) = 0,$$

则系统具有相应的**连续对称性**



体积元的变化

🍼 体积元的变化为 $d^4x' = |\mathcal{J}|d^4x$, $\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \det\left[\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right]$

🥛 任意方阵 A 满足 $\det[\exp(A)] = \exp[\text{tr}(A)]$, 其中 $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

🍵 对于无穷小的 A , 把上式两边展开至一阶小量, 得 $\det(\mathbf{1} + A) \simeq 1 + \text{tr}(A)$

🍲 上式中约等于号表示只展开到一阶小量, 下同

☕ 利用上式将 Jacobi 行列式 \mathcal{J} 化为 $\mathcal{J} \simeq 1 + \text{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right] = 1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})$

🍼 从而, 体积元的无穷小变换形式为 $d^4x' \simeq [1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})]d^4x$

体积元的变化

 体积元的变化为 $d^4x' = |\mathcal{J}|d^4x$, $\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \det\left[\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right]$

 任意方阵 A 满足 $\det[\exp(A)] = \exp[\text{tr}(A)]$, 其中 $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

 对于无穷小的 A , 把上式两边展开至一阶小量, 得 $\det(\mathbf{1} + A) \simeq 1 + \text{tr}(A)$

 上式中约等于号表示只展开到一阶小量, 下同

 利用上式将 Jacobi 行列式 \mathcal{J} 化为 $\mathcal{J} \simeq 1 + \text{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^{\mu})}{\partial x^{\nu}}\right] = 1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})$

 从而, 体积元的无穷小变换形式为 $d^4x' \simeq [1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})]d^4x$

 作用量在此无穷小变换下的变分是

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) \\ &\simeq \int_R d^4x [1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})][\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) \simeq \int_R d^4x [\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(x)\partial_{\mu}(\delta x^{\mu})] \\ &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} \delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)} \delta(\partial_{\mu}\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_{\mu}(\delta x^{\mu}) \right] \end{aligned}$$

两种变分算符

 记 x^μ 固定时的变分算符为 $\bar{\delta}$ ，满足

$$\bar{\delta}\Phi_a(x) = \Phi'_a(x) - \Phi_a(x)$$

 $\bar{\delta}$ 算符可以与时空导数交换， $\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a)$ ， δ 算符则不一定可以

 $\delta\Phi_a$ 与 $\bar{\delta}\Phi_a$ 的关系为

$$\begin{aligned}\delta\Phi_a &= \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \Phi'_a(x) - \Phi_a(x) \\ &= \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \bar{\delta}\Phi_a \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu\end{aligned}$$

 即

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu$$

 将上面的 Φ_a 替换为 $\partial_\mu\Phi_a$ ，即得

$$\delta(\partial_\mu\Phi_a) = \bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu$$

作用量变分

 从而得到

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta (\partial_\mu \Phi_a) + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right] \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} [\bar{\delta} \Phi_a + (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\mu] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} [\partial_\mu (\bar{\delta} \Phi_a) + \partial_\nu (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\nu] + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right\} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \bar{\delta} \Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\mu + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a \right] - \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_a)} \partial_\mu (\partial_\nu \Phi_a) \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right\} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \frac{\partial \Phi_a}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_a)} \frac{\partial (\partial_\nu \Phi_a)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L} \frac{\partial (\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right] \right\} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \right\}
 \end{aligned}$$

 第二步用到分部积分，最后一步涉及对复合函数 $\mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$ 求导的链式法则

Noether 守恒流

 Euler-Lagrange 方程表明 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} = 0$

 对于任意的积分区域 R ,

$$0 = \delta S = \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \right\}$$

意味着

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

 定义 **Noether 守恒流** $j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu$

 则有守恒流方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$

Noether 守恒流

 Euler-Lagrange 方程表明 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} = 0$

 对于任意的积分区域 R ,

$$0 = \delta S = \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \right\}$$

意味着

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

 定义 **Noether 守恒流** $j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu$

 则有守恒流方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$, 两边对空间区域 \tilde{R} 积分, 运用 **Gauss 定理**, 得到

$$0 = \int_{\tilde{R}} d^3x \partial_\mu j^\mu = \int_{\tilde{R}} d^3x \partial_0 j^0 + \int_{\tilde{R}} d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{d}{dt} \int_{\tilde{R}} d^3x j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

 $d\boldsymbol{\sigma}$ 是边界面 \tilde{S} 上的定向面元, 以外法线方向为正向

守恒荷

🔪 引入守恒荷 $Q \equiv \int_{\tilde{R}} d^3x j^0$ ，则 $\frac{d}{dt} \int_{\tilde{R}} d^3x j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

🍲 即空间区域 \tilde{R} 中的守恒荷减少率 (增加率) 等于从边界面出来 (进入) 的流

🍲 这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度

守恒荷

🔪 引入守恒荷 $Q \equiv \int_{\tilde{R}} d^3x j^0$ ，则 $\frac{d}{dt} \int_{\tilde{R}} d^3x j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

🍲 即空间区域 \tilde{R} 中的守恒荷减少率 (增加率) 等于从边界面出来 (进入) 的流

🍲 这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度

🗑️ 对于整个三维空间而言，边界面 \tilde{S} 位于无穷远处

🗑️ 通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在无穷远处 $\mathbf{j} \rightarrow 0$

🍽️ 故全空间的守恒荷 $Q = \int d^3x j^0$ 满足 $\frac{dQ}{dt} = 0$

🍴 可见， Q 不随时间变化，是一个守恒量

守恒荷

🔪 引入守恒荷 $Q \equiv \int_{\tilde{R}} d^3x j^0$ ，则 $\frac{d}{dt} \int_{\tilde{R}} d^3x j^0 + \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

🍲 即空间区域 \tilde{R} 中的守恒荷减少率 (增加率) 等于从边界面出来 (进入) 的流

🍲 这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度

🗑️ 对于整个三维空间而言，边界面 \tilde{S} 位于无穷远处

🍷 通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在无穷远处 $\mathbf{j} \rightarrow 0$

🍷 故全空间的守恒荷 $Q = \int d^3x j^0$ 满足 $\frac{dQ}{dt} = 0$

🍷 可见， Q 不随时间变化，是一个守恒量

🍷 综上，在经典场论中，如果系统具有某种连续对称性，则存在相应的守恒流 j^μ

🍷 它满足守恒流方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$ ，而全空间的守恒荷 Q 不随时间变化 (守恒定律)

1.7.2 小节 时空平移对称性

🌿 时空坐标的**平移** (translation) **变换**定义为

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

🐌 其中 a^{μ} 是**平移变换参数**，不依赖于 x^{μ} ，故 $dx'^{\mu} = dx^{\mu}$

🍄 从而，时空平移变换保持 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ 不变，即

$$g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

🐞 因此，时空平移变换**保持 Minkowski 时空的线元平方 ds^2 不变**

🌱 所有时空平移变换构成**时空平移群**

🐛 **保持线元平方 ds^2 不变的变换称为 Poincaré 变换**，也称为**非齐次 Lorentz 变换**



Henri Poincaré
(1854–1912)

Poincaré 群

 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**

 **线元不变意味着距离不变**

 因而 Poincaré 群是 **Minkowski 时空的等距群** (isometry group)，记作 $ISO(1, 3)$

 **Lorentz 群** 是 Poincaré 群的**子群**， $O(1, 3) < ISO(1, 3)$

Poincaré 群

 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**

 **线元不变意味着距离不变**

 因而 Poincaré 群是 **Minkowski 时空的等距群** (isometry group), 记作 $ISO(1, 3)$

 **Lorentz 群** 是 Poincaré 群的**子群**, $O(1, 3) < ISO(1, 3)$

 任意 Poincaré 变换可表示成 **Lorentz 变换**和**时空平移变换**的组合

 也就是说, 时空坐标的 **Poincaré 变换**表达为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

 利用**保度规条件**, 容易验证这样的变换**保持 ds^2 不变**:

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} = g_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} = ds^2$$

 数学上称 Poincaré 群是 **Lorentz 群**与**时空平移群**的**半直积群**

时空平移对称性

 **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 是不依赖于时空点的**常数**，因而 **Minkowski 时空**是**均匀的**，处于其中的场具有**时空平移对称性**

 在**时空平移变换** $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的**形状不会改变**，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x + a) = \Phi_a(x)$$

 相应地，由场 $\Phi_a(x)$ 构造的拉氏量在变换下也满足

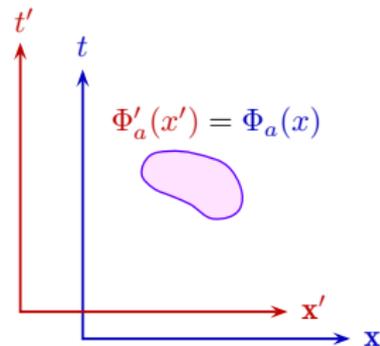
$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$$

 而时空体积元保持不变， $d^4x' = d^4x$

 于是，**狭义相对论性局域场论**的**作用量** $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ 在时空平移变换下不变，

$$S' = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int d^4x \mathcal{L}(x) = S$$

 这是**时空平移对称性**的体现



时空平移对称性

 **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 是不依赖于时空点的**常数**，因而 **Minkowski 时空**是**均匀的**，处于其中的场具有**时空平移对称性**

 在**时空平移变换** $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的**形状不会改变**，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x + a) = \Phi_a(x)$$

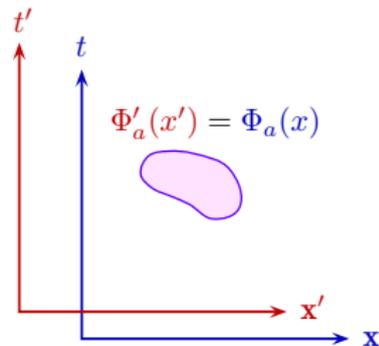
 对于**无穷小变换**，将变换参数 a^{μ} 改记为 ε^{μ} ，则

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}, \quad \delta \Phi_a = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = 0$$

 故 $\bar{\delta} \Phi_a = \delta \Phi_a - (\partial_{\mu} \Phi_a) \delta x^{\mu} = -\varepsilon^{\rho} \partial_{\rho} \Phi_a$

 代入到 **Noether 守恒流**表达式，得

$$\begin{aligned} j^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^{\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Phi_a)} \varepsilon^{\rho} \partial_{\rho} \Phi_a + \mathcal{L} \varepsilon^{\mu} \\ &= -\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Phi_a)} \partial_{\rho} \Phi_a - \delta^{\mu}_{\rho} \mathcal{L} \right] \varepsilon^{\rho} \end{aligned}$$



能动张量

 由于小量 ε^ρ 是任意的, $\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu_\rho \mathcal{L} \right] = 0$$

 各项乘以 $g^{\rho\nu}$, 缩并, 得

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0$$

 上式方括号部分是场的**能动张量** (energy-momentum tensor)

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

 它满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

 因此, 对 $T^{0\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) 作**全空间积分**, 就得到 **4 个守恒荷**

 只要保证 \mathcal{L} 是 **Lorentz 标量**, 那么 $T^{\mu\nu}$ 就是 **2 阶 Lorentz 张量**

能量守恒定律和动量守恒定律

🦩 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 分量为 $T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$

🦉 可见, T^{00} 就是哈密顿量密度 \mathcal{H} , 对应于时间平移变换 $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$

🦅 T^{00} 的全空间积分 $H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H}$ 是场的哈密顿量, 即总能量

🦆 它是时间平移变换的守恒荷, 因此 时间平移对称性对应于能量守恒定律

能量守恒定律和动量守恒定律

 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 分量为 $T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$

 可见, T^{00} 就是哈密顿量密度 \mathcal{H} , 对应于时间平移变换 $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$

 T^{00} 的全空间积分 $H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H}$ 是场的哈密顿量, 即总能量

 它是时间平移变换的守恒荷, 因此 时间平移对称性对应于能量守恒定律

 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量 $T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} \partial^i \Phi_a = \pi_a \partial^i \Phi_a$ 是场的动量密度

 它对应于空间平移变换 $x'^i = x^i + \varepsilon^i$

 T^{0i} 的全空间积分 $P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \pi_a \partial^i \Phi_a$ 是场的总动量

 三维矢量形式为 $\mathbf{P} = - \int d^3x \pi_a \nabla \Phi_a$

 总动量是空间平移变换的守恒荷, 因此 空间平移对称性对应于动量守恒定律

1.7.3 小节 Lorentz 对称性

 在相对论性场论中，要求拉氏量 \mathcal{L} 是 Lorentz 标量，具体来说，在固有保时向 Lorentz 变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ 的作用下，拉氏量满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

 前面已经推出 $d^4 x' = d^4 x$ ，于是作用量 S 在变换下满足

$$S' = \int d^4 x' \mathcal{L}'(x') = \int d^4 x \mathcal{L}(x) = S$$

 即系统具有 Lorentz 对称性

 考虑无穷小固有保时向 Lorentz 变换 $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$

 其中 ω^{μ}_{ν} 是变换的无穷小参数，由保度规条件有

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\mu\nu} (\delta^{\mu}_{\alpha} + \omega^{\mu}_{\alpha}) (\delta^{\nu}_{\beta} + \omega^{\nu}_{\beta}) \\ &\simeq g_{\mu\nu} \delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} + g_{\mu\nu} \delta^{\mu}_{\alpha} \omega^{\nu}_{\beta} + g_{\mu\nu} \omega^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

 可见， $\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho} \omega^{\rho}_{\nu}$ 关于两个指标反对称， $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$

 因此， $\omega_{\mu\nu}$ 只有 6 个独立分量，可取为 ω_{01} 、 ω_{02} 、 ω_{03} 、 ω_{12} 、 ω_{23} 和 ω_{31}

 它们分别对应于沿 3 个空间轴方向的增速变换和绕 3 个空间轴的旋转变换

无穷小旋转变换



下面举两个例子说明 $\omega_{\mu\nu}$ 的具体形式



对于绕 z 轴旋转 θ 角的变换矩阵

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

利用三角函数展开式 $\cos\theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ 和 $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$, 得

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

无穷小增速变换

🚲 对于沿 x 轴增速变换, 引入**快度** (rapidity) $\xi \equiv \tanh^{-1} \beta$, 则 $\beta = \tanh \xi$

🚲 利用双曲函数公式 $\tanh \xi = \sinh \xi / \cosh \xi$ 和 $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$ 推出

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - \tanh^2 \xi)^{-1/2} = \left(\frac{\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi}{\cosh^2 \xi} \right)^{-1/2} = \cosh \xi$$

$$\beta\gamma = \tanh \xi \cosh \xi = \sinh \xi$$

🚲 增速变换矩阵改写成 $\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & & \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

🏁 根据双曲函数展开式 $\cosh \xi = 1 + \mathcal{O}(\xi^2)$ 和 $\sinh \xi = \xi + \mathcal{O}(\xi^3)$, 有

$$\omega^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \omega^\rho_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentz 群表示的生成元

 在无穷小 Lorentz 变换的作用下,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}) x^{\nu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

 而变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 可以展开为

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{ab} \Phi_b(x) = \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{ab} \right] \Phi_b(x)$$

 $(I^{\mu\nu})_{ab}$ 是 Φ_a 所属 Lorentz 群表示的生成元 (generator)

 它们是以 a 和 b 为行列指标的一组常数矩阵, 而且关于 μ 和 ν 反对称,

$$(I^{\mu\nu})_{ab} = -(I^{\nu\mu})_{ab}$$

 因而这组矩阵里只有 6 个独立矩阵, 每个独立矩阵与 $\omega_{\mu\nu}$ 的一个独立分量相匹配

群表示	场 Φ_a	$(I^{\mu\nu})_{ab}$
恒等表示	标量场 ϕ	0
矢量表示	矢量场 A^{μ}	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}$
旋量表示	旋量场 ψ_a	$(S^{\mu\nu})_{ab}$

Lorentz 对称性的 Noether 流

 现在 $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, 有

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\Phi_a &= \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - (\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

 **Noether 流** $j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu$

$$\begin{aligned}&= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right]\omega^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

 其中 $T^\mu{}_\nu \equiv T^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$ 是**能动张量** $T^{\mu\nu}$ 的另一种写法

 注意参与**缩并的 Lorentz 指标一升一降不会改变表达式的结果**:

$$T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho = T^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\sigma\omega^\sigma{}_\rho = T^\mu{}_\nu g^{\nu\alpha}g_{\alpha\sigma}\omega^\sigma{}_\rho = T^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}$$

Lorentz 对称性的守恒荷

 再利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性推出

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu \omega^\nu{}_\rho x^\rho &= T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\nu} \omega_{\rho\nu} x^\rho) = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\rho} \omega_{\nu\rho} x^\nu) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \end{aligned}$$

 于是, **Noether 流**化为

$$j^\mu = -\frac{i}{2} \omega_{\nu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b - \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) = \frac{1}{2} \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho}$$

 其中 $\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho} x^\nu - T^{\mu\nu} x^\rho - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b$

 由于小量 $\omega_{\nu\rho}$ 是任意的, $\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出 $\partial_\mu \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0$, Lorentz 对称性的守恒荷为

$$J^{\nu\rho} \equiv \int d^3x \mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int d^3x [T^{0\rho} x^\nu - T^{0\nu} x^\rho - i\pi_a (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b]$$

 易见 $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$, 因而一共有 **6 个独立的守恒荷**, 满足 $dJ^{\nu\rho}/dt = 0$

守恒荷的分解

 为明确物理含义，将守恒荷分解成两项，

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}$$

 第一项为 $L^{\nu\rho} \equiv \int d^3x (T^{0\rho} x^\nu - T^{0\nu} x^\rho)$

 关于指标的反对称性意味着它的纯空间分量 L^{jk} 中只有 3 个是独立的

 利用三维 Levi-Civita 符号将 L^{jk} 对偶成三维矢量

$$L^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L^{jk} = (L^{23}, L^{31}, L^{12})$$

 由此推出

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int d^3x (T^{0k} x^j - T^{0j} x^k) = \int d^3x \varepsilon^{ijk} x^j \overset{\text{动量密度}}{T^{0k}} = \int d^3x \varepsilon^{ijk} x^j \pi_a \partial^k \Phi_a$$

 写成矢量形式是 $\mathbf{L} = - \int d^3x \mathbf{x} \times (\pi_a \nabla \Phi_a)$ ，这是场的轨道角动量

角动量守恒定律

 第二项为 $S^{\nu\rho} \equiv -i \int d^3x \pi_a (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b$

 同样, $S^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$S^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} S^{jk} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \int d^3x \pi_a (I^{jk})_{ab} \Phi_b$$

 这是场的自旋角动量

 $J^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$J^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} = L^i + S^i$$

 这是场的总角动量

 固有保时向 Lorentz 群的纯空间部分就是空间旋转群 $SO(3)$

 空间旋转对称性对应于角动量守恒定律

质心运动守恒定律

🏐 $L^{\nu\rho}$ 的 $i0$ 分量为

$$L^{i0} = \int d^3x (T^{00} x^i - T^{0i} x^0) = \int d^3x (x^i \mathcal{H} - x^0 \pi_a \partial^i \Phi_a) = \int d^3x x^i \mathcal{H} - t P^i$$

🏆 若 $\frac{dS^{i0}}{dt} = 0$, 则 $\frac{dJ^{i0}}{dt} = 0$ 意味着 $\frac{dL^{i0}}{dt} = 0$, 再结合动量守恒 $\frac{dP^i}{dt} = 0$, 得到

$$\frac{dL^{i0}}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x x^i \mathcal{H} - P^i = 0$$

🏆 即
$$P^i = H v_C^i, \quad v_C^i \equiv \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \int d^3x x^i \mathcal{H}$$

🏆 在低速近似下, 总能量约等于总质量, $H \simeq M$, 故总动量 $\mathbf{P} \simeq M \mathbf{v}_C$

🏆 \mathbf{v}_C 是质心 (即质量中心, center of mass) 的运动速度

🏆 应用 Newton 第二定律, 外力 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}$, 这就是质心运动定理

🏆 因此, L^{i0} 的守恒在经典力学中对应于质心运动守恒定律: 当没有外力存在时, 质心的加速度为零, 质心保持静止或作匀速直线运动

1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

 考虑包含复场 $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

 对 ϕ 作 U(1) 整体变换 $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

 其中有理数 q 是常数，连续变换参数 θ 是实数

 整体 (global) 指 θ 不依赖于时空坐标 x^μ

1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

考虑包含复场 $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

对 ϕ 作 U(1) 整体变换 $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

SO(2) : $\varphi \in [0, 2\pi]$

其中有理数 q 是常数, 连续变换参数 θ 是实数

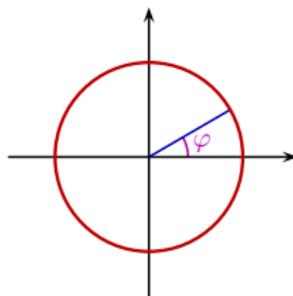
整体 (global) 指 θ 不依赖于时空坐标 x^μ

$e^{iq\theta}$ 是一个模为 1 的相位因子 (phase factor)

可看作一个 1 维幺正矩阵 $U(\theta) = e^{iq\theta}$, 满足 $U^\dagger U = 1$

$\{U(\theta)\}$ 构成 U(1) 群, 它是与 SO(2) 同构的 Abel 群

如右图所示, SO(2) 群空间是一个圆周



$U(\theta) = e^{iq\theta} : \theta \in [0, 2\pi/q]$

$U(0) = U(2\pi/q) = 1$

1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

考虑包含复场 $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

对 ϕ 作 U(1) 整体变换 $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

SO(2) : $\varphi \in [0, 2\pi]$

其中有理数 q 是常数, 连续变换参数 θ 是实数

整体 (global) 指 θ 不依赖于时空坐标 x^μ

$e^{iq\theta}$ 是一个模为 1 的相位因子 (phase factor)

可看作一个 1 维幺正矩阵 $U(\theta) = e^{iq\theta}$, 满足 $U^\dagger U = 1$

$\{U(\theta)\}$ 构成 U(1) 群, 它是与 SO(2) 同构的 Abel 群

$U(\theta) = e^{iq\theta} : \theta \in [0, 2\pi/q]$

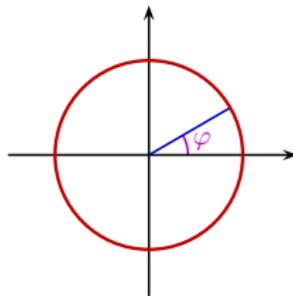
如右图所示, SO(2) 群空间是一个圆周

$U(0) = U(2\pi/q) = 1$

相应地, ϕ^* 的 U(1) 整体变换为 $[\phi^*(x)]' = [\phi'(x)]^* = e^{-iq\theta} \phi^*(x)$

拉氏量 \mathcal{L} 在这种变换下不变, 即具有 U(1) 整体对称性, q 称为相应的 U(1) 荷

与前面叙述的时空平移对称性和 Lorentz 对称性不同, 这里的对称性出现在由场构成的抽象空间中, 与时间和空间相对独立 ($\delta x^\mu = 0$), 因而是一种内部对称性



无穷小 U(1) 整体变换

 U(1) 整体变换的**无穷小**形式为

$$\phi'(x) = \phi(x) + iq\theta\phi(x), \quad [\phi^*(x)]' = \phi^*(x) - iq\theta\phi^*(x)$$

 结合 $\delta x^\mu = 0$, 有

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi = iq\theta\phi, \quad \bar{\delta}\phi^* = \delta\phi^* = -iq\theta\phi^*$$

 $\phi(x)$ 与 $\phi^*(x)$ 是**线性独立**的, 代表两个**相互独立**的自由度, **Noether 流**表达为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \bar{\delta}\phi^* = \partial^\mu \phi^*(iq\theta\phi) + \partial^\mu \phi(-iq\theta\phi^*) \\ &= iq\theta[(\partial^\mu \phi^*)\phi - (\partial^\mu \phi)\phi^*] = -iq\theta\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \end{aligned}$$

 其中, $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$ 符号定义为 $\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \equiv \phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi$

U(1) 守恒流和守恒荷

 扔掉无穷小参数 $-\theta$ ，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv iq\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$$

 则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，相应的守恒荷是

$$Q = \int d^3x J^0 = iq \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi$$

 满足 $dQ/dt = 0$

U(1) 守恒流和守恒荷

 扔掉无穷小参数 $-\theta$ ，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv iq\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$$

 则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，相应的守恒荷是

$$Q = \int d^3x J^0 = iq \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi$$

 满足 $dQ/dt = 0$

 在实际应用中， q 是由 Φ 场描述的粒子所携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等

 因此，一种 U(1) 整体对称性对应于一条荷数守恒定律

 比如，电磁 U(1) 整体对称性对应于电荷守恒定律