

量子场论

第 1 章 预备知识

1.3 节至 1.5 节

余钊焕

中山大学物理学院


<https://yzhxxzxy.github.io>

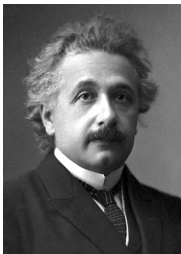


更新日期：2024 年 3 月 24 日

1.3 节 Lorentz 变换和 Lorentz 群

 描述高速运动的系统需要用到**狭义相对论**，它的基本原理如下

- ① **光速不变原理**：在任意惯性参考系中，真空中的**光速**具有**相同**的大小
 - ② **狭义相对性原理**：在任意惯性参考系中，**物理定律**具有**相同**的形式
-  任意两个惯性参考系的直角坐标由 **Lorentz 变换** 联系起来

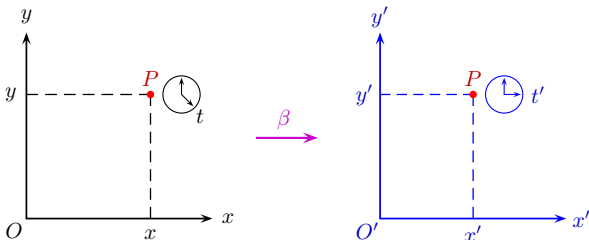



Albert Einstein
(1879–1955)




Hendrik Lorentz
(1853–1928)

Lorentz 增速变换




 设惯性坐标系 O' 沿着惯性坐标系 O 的 x 轴方向以**速度** β 匀速运动

 **事件** P 在 O 系中的坐标为 (t, x, y, z) ，在 O' 系中的坐标为 (t', x', y', z')

 相应 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z$$


 **Lorentz 因子** $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ，而 $0 \leq |\beta| < 1$


 这种 Lorentz 变换称为沿 x 轴方向的**增速** (boost) 变换


Lorentz 不变量

 在上述 Lorentz 增速变换下, 有

$$\begin{aligned}
 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \gamma^2(t - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta t)^2 - y^2 - z^2 \\
 &= \frac{1}{1 - \beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2
 \end{aligned}$$

 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**, 是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)

 Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同的值**

 这是 Lorentz 变换对应的对称性, 称为 **Lorentz 对称性**

Lorentz 不变量

⚙️ 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta t)^2 - y^2 - z^2$$

$$= \frac{1}{1 - \beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

🔧 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)

🔧 Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同的值**

🔧 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 **Lorentz 对称性**

📎 结合时间和空间坐标，构成四维 **Minkowski 时空**，坐标为

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

📎 x^μ 是一个**逆变** (contravariant) 的 **Lorentz 四维矢量** (vector)

📎 “逆变” 指它的**指标** (index) μ 写在**右上角**

📌 受到 $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 的启发，定义 **Lorentz 不变的内积**

$$x^2 \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$$



Hermann Minkowski
(1864–1909)

Minkowski 度规



引入**对称的 Minkowski 度规** (metric)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号，**空白**的矩阵元是**零**



也就是说， $g_{00} = +1$ ， $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ，其它分量都是 0

Minkowski 度规



引入**对称的 Minkowski 度规** (metric)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号，**空白**的矩阵元是**零**



也就是说， $g_{00} = +1$ ， $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ，其它分量都是 0



利用度规把**内积** x^2 化为求和式，

$$\begin{aligned} x^2 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \end{aligned}$$



第二步采用 **Einstein 求和约定**：**不写出求和符号，重复的指标即表示求和**



除非特别指出，后面默认使用这个约定



在上面的表达式中，用同个字母表示的指标分别在**上标**和**下标**重复出现并**求和**，这称为**缩并** (contraction)，是 **Lorentz 不变量**的特点

协变矢量

🔗 为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})$$

🔗 “协变”指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

🔗🔗 将 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ 看成用**度规**缩并，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

协变矢量

🔗 为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})$$

📏 “协变”指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

🔗 将 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ 看成用**度规**缩并，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

⚖️ 从方阵的角度看，**度规** $g_{\mu\nu}$ 的**逆** (矩阵) 为 $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} =$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

对应于 $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$

🧵 这里 **Kronecker δ 符号** 定义为 $\delta^a_b = \delta_a^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$



Leopold Kronecker
(1823–1891)

升降指标

🛡️ **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有**相同**的矩阵形式

🪄 但**更一般**的度规可能与它的逆不同


🔧 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$ ，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$


🔪 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将**协变矢量** x_μ 的**指标升起来**，变成**逆变矢量** x^σ

🔪 可见，逆变矢量与协变矢量**一一对应**，是对同一个 Lorentz 矢量的两种**等价**描述

升降指标


 **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有**相同**的矩阵形式


 但**更一般**的度规可能与它的逆不同

 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$ ，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将**协变矢量** x_μ 的**指标升起来**，变成**逆变矢量** x^σ

 可见，逆变矢量与协变矢量**一一对应**，是对同一个 Lorentz 矢量的两种**等价**描述


 利用 Kronecker 符号的定义、 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ 和度规的对称性，推出

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}$$

 这两条式子表明，度规也可以用来对**度规自身的指标进行升降**


Lorentz 增速变换的矩阵形式

 将 Lorentz 增速变换 $t' = \gamma(t - \beta x)$, $x' = \gamma(x - \beta t)$, $y' = y$, $z' = z$ 表达成矩阵与列矢量的乘积形式,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

 用四维矢量记号改写为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

 将 Λ^{μ}_{ν} 视作矩阵时, 偏左的指标 μ 表示行的编号, 偏右的指标 ν 表示列的编号

 Λ^{μ}_{ν} 的特点是保持内积 $x^2 = x^{\mu} x_{\mu}$ 不变, 使 $x^{\mu} x_{\mu}$ 在不同惯性系中具有相同的值

Lorentz 变换

👑 进一步将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 推广为所有保持 $x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换，称为 (齐次) Lorentz 变换

🏠 由于 $x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$

🏰 要得到 $x'^2 = x^2$ ，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须满足保度规条件 $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

Lorentz 变换

👑 进一步将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 推广为**所有保持 $x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换**，称为**(齐次) Lorentz 变换**

💡 由于 $x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$

🏰 要得到 $x'^2 = x^2$ ，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须满足**保度规条件** $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

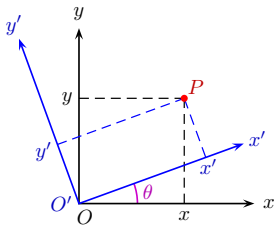
🌿 由于 $x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$ ，**保持 $|\mathbf{x}|^2$ 不变的空间旋转变换**也属于 Lorentz 变换

🎀 设惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角，则事件 P 在两系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z$$


👗 因而相应的 Lorentz 变换矩阵为


$$[R_z(\theta)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



👠 可以验证它满足**保度规条件**

Lorentz 逆变换

 δ^μ_ν 的矩阵形式是**单位矩阵 1**，它是一个特殊的 Lorentz 变换


 它使得 $x'^\mu = \delta^\mu_\nu x^\nu = x^\mu$ ，即 x^μ 在这个变换下不变，可见 δ^μ_ν 是**恒等变换**

 对于任意 **Lorentz 变换** Λ^α_β ，引入

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha_\beta$$

 那么，由**保度规条件**得

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha_\beta \Lambda^\rho_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu_\nu$$


 上式表明，先作 Λ 变换，再作 Λ^{-1} 变换，相当于作**恒等变换**

 也就是说， Λ^{-1} 是 Λ 的**逆变换**，因而也是一个 Lorentz 变换

 在这些记号下，**协变矢量** x_μ 的 Lorentz 变换可以表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

保度规条件的等价形式

 Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换, 必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$


 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}g^{\mu\gamma}g_{\rho\delta}\Lambda^\delta{}_\gamma g^{\nu\phi}g_{\sigma\tau}\Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta\delta^\beta{}_\tau\delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi}\Lambda^\delta{}_\gamma\Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi}\Lambda^\alpha{}_\nu\Lambda^\beta{}_\phi \end{aligned}$$

 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}$$

保度规条件的等价形式

 Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$


 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} g^{\mu\gamma} g_{\rho\delta} \Lambda^\delta{}_\gamma g^{\nu\phi} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta \delta^\beta{}_\tau \delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi} \Lambda^\delta{}_\gamma \Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\phi \end{aligned}$$

 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}$$

 将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 视作矩阵 Λ ，则其**转置矩阵** Λ^T 的分量满足 $(\Lambda^T)_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$

 保度规条件化为 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = (\Lambda^T)_\alpha{}^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta$ ，于是**重复的相邻指标**发生**缩并**，对应于**矩阵乘法**

 用 g 代表**度规矩阵**，将**保度规条件**写成**矩阵等式**

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

时空体积元

🧑 对保度规条件 $\Lambda^T g \Lambda = g$ 取行列式，得

$$\det(g) = \det(\Lambda^T) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g) [\det(\Lambda)]^2$$

👕 因此 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$ ，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1$$

👜 Lorentz 坐标变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ 的 **Jacobi 行列式**是

$$\mathcal{J} = \det \left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right] = \det \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = \det(\Lambda)$$

👢 于是 Lorentz 变换将体积元 d^4x 变换为


$$d^4x' = |\mathcal{J}| d^4x = |\det(\Lambda)| d^4x = d^4x$$

👢 可见，**Minkowski 时空**的体积元 d^4x 是 **Lorentz 不变**的



Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804–1851)

Lorentz 变换分类


 可以用 $\det(\Lambda)$ 的值给 Lorentz 变换**分类**


 $\det(\Lambda) = +1$ 的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换

 $\det(\Lambda) = -1$ 的变换称为**非固有** (improper) Lorentz 变换


 此外, 由**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$ 得

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_0\Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2$$

 即 $(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \geq 1$, 故 $\Lambda^0_0 \geq +1$ 或 $\Lambda^0_0 \leq -1$

 $\Lambda^0_0 \geq +1$ 的变换称为**保时向** (orthochronous)


Lorentz 变换

 $\Lambda^0_0 \leq -1$ 的变换称为**反时向** (antichronous)

Lorentz 变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

群

 在数学上，对称性由群论描述，对称变换的集合称为群 (group)

 群元素具有乘法，两个群元素的乘积就是两次对称变换相继作用，满足以下条件

① 群对乘积具有封闭性，即群 G 中任意两个群元 g_1 和 g_2 的乘积仍属于此群：

$$g_1 g_2 \in G, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

② 群乘法满足结合律：

$$g_1 (g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$


③ 群 G 中必有一个恒元 e ，对应于恒等变换，它与任一群元 g 的乘积仍为 g ：


$$eg = ge = g, \quad \forall g \in G$$


④ 任一群元 g 都可以在群 G 中找到一个逆元 g^{-1} ，它对应于逆变换，两者之积为恒元：


$$\forall g \in G, \quad \exists g^{-1} \in G, \quad \text{使得 } g^{-1} g = gg^{-1} = e$$


更多群论概念


 在**线性代数**中，矩阵具有乘法

 可逆方阵能够依照自身乘法关系构成群，即**矩阵群**

 群乘法讲究运算次序， g_1g_2 不一定等于 g_2g_1 ，也就是说，**交换律**不一定成立

 满足交换律的群称为 **Abel 群**

 不满足交换律的群称为**非 Abel 群**

 如果群 G 的子集 H 中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称 H 是 G 的**子群** (subgroup)，记作 $H < G$



Niels Henrik Abel
(1802–1829)

$O(N)$ 群和 $SO(N)$ 群

🥚 满足 $O^T O = O O^T = 1$ 的实方阵 O 称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)

🐔 所有 N 阶实正交矩阵 $\{O\}$ 构成**正交群** $O(N)$

🐣 对 $1 = O^T O$ 取行列式, 得 $1 = \det(O^T) \det(O) = [\det(O)]^2$

🐤 可见, 实正交矩阵 O 的行列式为 $\det(O) = \pm 1$

🐣 由 $\det(O) = 1$ 的 N 阶实正交矩阵 O 构成的群称为**特殊正交群** $SO(N)$

🐦 显然, $SO(N) < O(N)$

🐠 非 Abel 群 $SO(3)$ 描述三维空间中的所有旋转变换, 称为**空间旋转群**

🐧 Abel 群 $SO(2)$ 描述二维平面上的所有旋转变换, 或者说, 描述绕某条固定轴的旋转变换, 如 $R_z(\theta)$, 因而 $SO(2) < SO(3)$

U(N) 群和 SU(N) 群

👹 满足 $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}$ 的复方阵 U 称为**么正矩阵** (unitary matrix)

🐋 所有 N 阶么正矩阵 $\{U\}$ 构成**么正群** $U(N)$

🦀 对 $\mathbf{1} = U^\dagger U$ 取行列式, 得 $1 = \det(U^\dagger) \det(U) = [\det(U)]^* \det(U) = |\det(U)|^2$


🦀 可见, 么正矩阵 U 的行列式满足 $|\det(U)| = 1$

🐋 由 $\det(U) = 1$ 的 N 阶么正矩阵 U 构成的群称为**特殊么正群** $SU(N)$

🐚 显然, $SU(N) < U(N)$


Lorentz 群

 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abelian 群

 **保度规条件** $\Lambda^T g \Lambda = g$ 是正交条件 $O^T \mathbf{1} O = \mathbf{1}$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $O(1, 3)$

 $O(3)$ 群对应于 $O(1, 3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $O(3) < O(1, 3)$

 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $SO(1, 3)$

 显然 $SO(1, 3) < O(1, 3)$

Lorentz 群

🐷 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abelian 群

🐷 **保度规条件** $\Lambda^T g \Lambda = g$ 是正交条件 $O^T 1 O = 1$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $O(1, 3)$

🐶 $O(3)$ 群对应于 $O(1, 3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $O(3) < O(1, 3)$

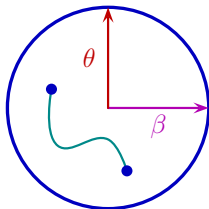
🐱 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $SO(1, 3)$

🐿 显然 $SO(1, 3) < O(1, 3)$


🐆 Lorentz 变换可用一组连续变化的参数 (如 β 、 θ 等) 描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数变化区域称为**群空间**

🦌 群空间中的一个**点**就对应着一个**群元**

🐆 如果群空间中任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通的**，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**



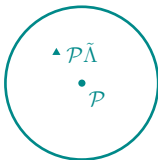
Lorentz 群的连通分支

 Lorentz 群是一个混合连续群，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支

非固有保时向分支

$$\det(\Lambda) = -1$$

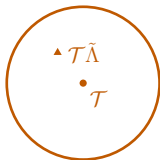
$$\Lambda^0_0 \geq +1$$



非固有反时向分支

$$\det(\Lambda) = -1$$

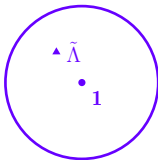
$$\Lambda^0_0 \leq -1$$



固有保时向分支
(固有保时向 Lorentz 群)

$$\det(\Lambda) = +1$$

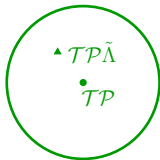
$$\Lambda^0_0 \geq +1$$




固有反时向分支


$$\det(\Lambda) = +1$$

$$\Lambda^0_0 \leq -1$$



 恒元在固有保时向分支里面，这个分支是 $SO(1,3)$ 的子群，称为固有保时向 Lorentz 群，记作 $SO^\uparrow(1,3)$ ，它包含物理上联系惯性参考系的所有 Lorentz 变换


 Lorentz 不变量通常指的是在固有保时向 Lorentz 变换下不变的量


 子群从属关系： $SO(2) < SO(3) < SO^\uparrow(1,3) < SO(1,3) < O(1,3)$


宇称变换和时间反演变换

 定义**宇称** (parity) 变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$


 它是一个**非固有保时向** Lorentz 变换，亦称为**空间反射** (space inversion) 变换

 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ 的作用是让**所有空间分量反向**

 定义**时间反演** (time reversal) 变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$


 它是一个**非固有反时向** Lorentz 变换，作用是让**时间分量反向**


 对于**固有保时向 Lorentz 群**中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$ ，乘上宇称变换或(和)时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$ 、 $\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{TP}\tilde{\Lambda}$ ，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支


宇称变换和时间反演变换

 定义**宇称** (parity) 变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$


 它是一个**非固有保时向** Lorentz 变换，亦称为**空间反射** (space inversion) 变换


 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ 的作用是让**所有空间分量反向**


 定义**时间反演** (time reversal) 变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

 它是一个**非固有反时向** Lorentz 变换，作用是让**时间分量反向**

 对于**固有保时向 Lorentz 群**中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$ ，乘上宇称变换或(和)时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$ 、 $\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{TP}\tilde{\Lambda}$ ，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支

 类似地，**O(3) 群**也是混合连续群，具有两个连通分支

 包含**恒元**的连通分支是 **SO(3) 群**，对应于 $\det(O) = 1$ ；另一个连通分支对应于 $\det(O) = -1$ ，里面任意元素可由 $\text{diag}(-1, -1, -1)$ 乘以 **SO(3) 群元素**得到

1.4 节 Lorentz 矢量

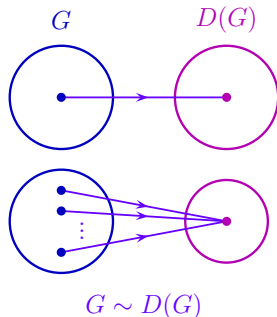
🌱 如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G

👉 这些矩阵构成群 G 的一个 m 维线性表示 (linear representation) $D(G)$

🍀 具体来说，群 G 中任意群元 g_1 和 g_2 分别对应于表示 $D(G)$ 中的表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$ ，而 g_2g_1 对应于表示矩阵 $D(g_2g_1)$ ，且满足同态关系

$$D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1)$$

🍀 $D(G)$ 中的一个矩阵可以一一对应于 G 中的一个群元，或者对应于 G 中的多个群元；数学上称 G 与 $D(G)$ 同态 (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$



1.4 节 Lorentz 矢量

🌱 如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G

👉 这些矩阵构成群 G 的一个 m 维线性表示 (linear representation) $D(G)$

🍀 具体来说，群 G 中任意群元 g_1 和 g_2 分别对应于表示 $D(G)$ 中的表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$ ，而 g_2g_1 对应于表示矩阵 $D(g_2g_1)$ ，且满足同态关系

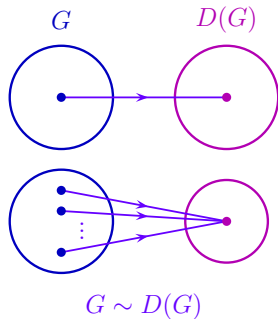
$$D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1)$$

🍀 $D(G)$ 中的一个矩阵可以一一对应于 G 中的一个群元，或者对应于 G 中的多个群元；数学上称 G 与 $D(G)$ 同态 (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$

🌿 利用群的 m 维线性表示，可将对称变换视作 $m \times m$ 矩阵，将变换作用的对象视作 m 维列矢量

🍁 所有这样的列矢量构成了一个 m 维线性空间，称为相应的表示空间

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & D(g) & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

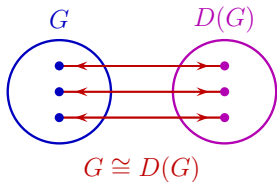


群的特殊表示

🌱 取群中**所有**元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的**恒等表示**，也称为**平庸表示**

🌹 如果群 G 中每个群元**一一**对应于表示 $D(G)$ 中每个矩阵，则称 G 与 $D(G)$ **同构** (isomorphism)，记作 $G \cong D(G)$

👉 此时称 $D(G)$ 是 G 的**忠实表示** (faithful representation)



🌲 如果 $D(G)$ 中所有矩阵都是**么正**的，则称 $D(G)$ 是**么正表示**

🌱 矩阵群**本身**就是自己的一个表示，称为**自身表示**，也称为**基础表示**

等价表示和可约表示

🌻 如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中对应的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的**相似变换**关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示**等价**；等价表示是在表示空间中取**不同基底**得到的，**没有本质差别**

等价表示和可约表示

 如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中对应的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的**相似变换**关系，即


$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$


则称这两个表示**等价**；等价表示是在表示空间中取**不同基底**得到的，**没有本质差别**

 如果每个表示矩阵 $D(g)$ 都可以通过**同一个相似变换**化为**相同形式的阶梯矩阵**，

$$S^{-1} D(g) S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G,$$

其中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 是方阵， $M(g)$ 可以是零矩阵，则称 $D(G)$ 是**可约表示**，否则称 $D(G)$ 为**不可约表示** (irreducible representation)

 可以证明 (见讲义)，集合 $\{D_1(g)\}$ 和 $\{D_2(g)\}$ 分别构成群 G 的线性表示

 **可约表示**能够通过**不可约表示构造**出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的**不等价不可约表示**

Lorentz 矢量

🌴 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ ，可见 $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 **4 维线性表示**，即**基础表示**

🌸 它是一个**不可约忠实表示**，称为**矢量表示**

🌺 **Lorentz 矢量 x^ν** 是**矢量表示空间中 Lorentz 变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$** 所作用的**列矢量**

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{👉} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentz 矢量

🌴 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ ，可见 $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 **4 维线性表示**，即**基础表示**

🌸 它是一个**不可约忠实表示**，称为**矢量表示**

🌸 **Lorentz 矢量 x^ν** 是**矢量表示空间中 Lorentz 变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$** 所作用的**列矢量**

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{👉} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

🚗 一般地，**Lorentz 矢量 A^μ** 在定义上要求它在**固有保时向** Lorentz 变换下满足

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

🚗 类似于 $x'_\mu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ ，逆变矢量 A^μ 对应的协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$A'_\mu = A_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

Lorentz 矢量的内积

🚗 任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为


$$A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

🚜 由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，


$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

🚚 像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)


Lorentz 矢量的内积


 任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

 由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

 像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

 由于度规的对角元有正有负，Lorentz 矢量 A^μ 的自我内积 $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$ 的符号不是确定的，可以分为三类

- 1 若 $A^2 > 0$ ，即 $|A^0| > |\mathbf{A}|$ ，则称 A^μ 为**类时** (timelike) 矢量
- 2 若 $A^2 < 0$ ，即 $|A^0| < |\mathbf{A}|$ ，则称 A^μ 为**类空** (spacelike) 矢量
- 3 若 $A^2 = 0$ ，即 $|A^0| = |\mathbf{A}|$ ，则称 A^μ 为**类光** (lightlike) 矢量

 由于 A^2 是 Lorentz 不变量，**不能**通过 Lorentz 变换改变 A^μ 的类型

极矢量和轴矢量

🚲 以上讨论的是**广义**的 Lorentz 矢量，可以通过**宇称变换**性质将它们分为两种矢量

🛴 第一种矢量称为**极矢量** (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

🛴 经常将极矢量简称为**矢量**，即**狭义**的矢量

🚦 极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ；时空坐标 x^{μ} 就是一个极矢量

🛴 另一种矢量称为**赝矢量**，或者**轴矢量** (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

🚦 轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

极矢量和轴矢量

🚲 以上讨论的是**广义**的 Lorentz 矢量，可以通过**宇称变换**性质将它们分为两种矢量

🛩️ 第一种矢量称为**极矢量** (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

🚲 经常将极矢量简称为**矢量**，即**狭义**的矢量

🚦 极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ；时空坐标 x^{μ} 就是一个极矢量

🛵 另一种矢量称为**赝矢量**，或者**轴矢量** (axial vector)，宇称变换为


$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

🚦 轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$


🚲 在**经典力学**中，空间坐标 \mathbf{x} 和动量 \mathbf{p} 都是极矢量，而角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 是轴矢量

🚲 在**空间反射变换**下， $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ ， $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ ， $\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{p}' = (-\mathbf{x}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$ ，与以上定义一致

四维动量

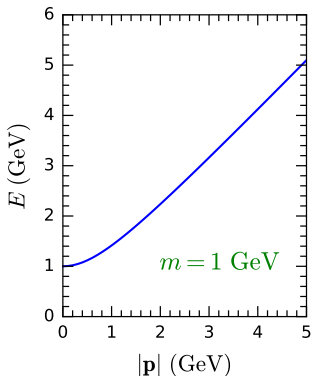
 狭义相对论中自由质点的能量 E 、动量 \mathbf{p} 和 (静止) 质量 m 具有色散关系 (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$


 可以用 E 和 \mathbf{p} 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$


称为**四维动量**，它是一个**极矢量**



四维动量


 狭义相对论中自由质点的能量 E 、动量 \mathbf{p} 和 (静止) 质量 m 具有色散关系 (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

 可以用 E 和 \mathbf{p} 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$


称为**四维动量**，它是一个**极矢量**

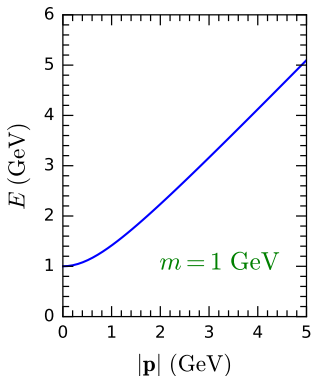
 四维动量的自我内积为

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

 这是合理的，因为质量 m 在狭义相对论中是一个 Lorentz 不变量

 p^μ 在 $m > 0$ 时是**类时**矢量，在 $m = 0$ 时是**类光**矢量

 $p^2 = m^2$ 称为**质壳** (mass shell) 条件，对应于四维动量空间中由质量 m 决定的**三维双曲面** (质壳)




时空导数

 将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

 那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu_\rho = g^{\mu\nu}$$

 上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于时空导数指标位置的写法是合理的


时空导数


 将对时空坐标的偏导数记为


$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$


 那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu_\rho = g^{\mu\nu}$$

 上式中的**指标**始终是**平衡**的，因而这里关于**时空导数指标位置**的写法是**合理**的

 对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\mu$

 两边与 Λ^μ_ν 缩并得 $\Lambda^\mu_\nu x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu = x_\rho \delta^\rho_\nu$ ，即 $x_\nu = \Lambda^\mu_\nu x'_\mu$

 故 $\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu$


时空导数


 将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$


 那么


$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu_\rho = g^{\mu\nu}$$

 上式中的**指标**始终是**平衡**的，因而这里关于**时空导数指标位置**的写法是**合理**的


 对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\mu$

 两边与 Λ^μ_ν 缩并得 $\Lambda^\mu_\nu x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu = x_\rho \delta^\rho_\nu$ ，即 $x_\nu = \Lambda^\mu_\nu x'_\mu$

 故 $\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu$

 这是时空导数 ∂^μ 的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同

 因而可以将 ∂^μ 看作一个 **Lorentz 矢量**

 相应地， ∂_μ 的 Lorentz 变换是 $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$

d'Alembert 算符

定义 d'Alembert 微分算符

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$

由保度规条件得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

可见， ∂^2 算符是 Lorentz 不变的



Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

d'Alembert 算符

定义 d'Alembert 微分算符

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$

由保度规条件得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

可见, ∂^2 算符是 Lorentz 不变的

用它把 Klein-Gordon 方程 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ 改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2)\Psi(x) = 0$$


其中 x 表示四维时空坐标

Klein-Gordon 微分算符 $\partial^2 + m^2$ 是 Lorentz 不变的, 因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有相同的形式, 即具有 Lorentz 协变性 (covariance)



Jean le Rond d'Alembert
(1717-1783)


1.5 节 Lorentz 张量

 Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广


 一个 $p + q$ 阶的 (p, q) 型 Lorentz 张量 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

 这里的逆变指标和协变指标统称为 Lorentz 指标

 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 Lorentz 协变性，在不同惯性系中具有相同的形式，从而满足狭义相对性原理


1.5 节 Lorentz 张量

 Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广


 一个 $p + q$ 阶的 (p, q) 型 Lorentz 张量 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：


$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

 这里的逆变指标和协变指标统称为 Lorentz 指标


 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 Lorentz 协变性，在不同惯性系中具有相同的形式，从而满足狭义相对性原理

 Lorentz 标量是 0 阶 Lorentz 张量，不具有 Lorentz 指标

 Lorentz 矢量是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标

 Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 是一个 2 阶的 $(0, 2)$ 型 Lorentz 张量，不过，它是常数，在任何惯性系中不变，Lorentz 变换规则就是保度规条件 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\alpha} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta}$

 $\delta^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \delta^{\rho}_{\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu}$ 表明 Kronecker 符号 δ^{μ}_{ν} 是 $(1, 1)$ 型常数 Lorentz 张量

 注意，虽然 Λ^{μ}_{ν} 具有两个指标，它却不是 Lorentz 张量

指标的升降和缩并


✈️ 利用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型

✈️ 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的

✈️ 比如， $T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$ ，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 (3,0) 型张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 (2,1) 型张量 $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$

✈️ 相应地， $T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ ，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 (2,1) 型张量 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ 升为 (3,0) 型张量 $T^{\mu\nu\rho}$

指标的升降和缩并

 利用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型

 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的

 比如， $T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$ ，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 (3,0) 型张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 (2,1) 型张量 $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$


 相应地， $T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ ，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 (2,1) 型张量 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ 升为 (3,0) 型张量 $T^{\mu\nu\rho}$

 对 (p, q) 型 Lorentz 张量的一个逆变指标和一个协变指标进行缩并，会得到一个 $(p-1, q-1)$ 型 Lorentz 张量，例如，

$$T^{\mu\nu}{}_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} (\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \delta^{\gamma}{}_{\alpha} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\alpha}$$

 可见， $T^{\mu\nu}{}_{\mu}$ 是一个 Lorentz 矢量

 可以通过缩并若干个 Lorentz 张量的所有指标来构造 Lorentz 不变量

 这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的 Λ 因子和 Λ^{-1} 因子总是相互抵消；比如，以下表达式都是 Lorentz 标量：


$$T^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu}, \quad T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\rho} T^{\sigma\rho}{}_{\nu}$$

狭义张量和赝张量


 类似于 Lorentz 矢量，按**宇称变换**性质将 Lorentz 张量分成两种

 第一种张量是**狭义的张量**，宇称变换为

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

 另一种张量称为**赝张量** (pseudotensor)，宇称变换为

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

 因此，在宇称变换下，**狭义的标量** ϕ 满足 $\phi' = \phi$


 而**赝标量** (pseudoscalar) φ 满足 $\varphi' = -\varphi$


四维 Levi-Civita 符号


引入四维 Levi-Civita 符号

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换 (如 } \epsilon^{1032}) \\ -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换 (如 } \epsilon^{1023}) \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$


 这里的**置换** (permutation) 指的是将指标重新排列

 调换两个指标的位置称为**对换**

 **奇置换**通过**奇数次对换**得到, **偶置换**通过**偶数次对换**得到

 这样定义出来的 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是**全反对称**的, 即关于任意两个指标反对称, 如

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\epsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\epsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$$

 **全反对称性**意味着具有 2 个或以上**相同指标**的 Levi-Civita 符号为**零**, 比如, $\epsilon^{0120} = -\epsilon^{0120} = 0$, 这属于定义式中的**“其它情况”**



Tullio Levi-Civita
(1873–1941)

协变的四维 Levi-Civita 符号

🔍 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的协变形式为 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

🔍 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 也是全反对称的, 如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}(-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

🔍 根据定义, $\varepsilon_{0123} = g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123} = -\varepsilon^{0123}$, 有

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

🔍 而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

🔍 从而

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4!$$

Levi-Civita 符号与行列式

🏀 利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照行列式定义写成

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_{\alpha} \Lambda^1{}_{\beta} \Lambda^2{}_{\gamma} \Lambda^3{}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

♠	♥	♣	♦
♦	♠	♥	♣
♣	♦	♠	♥
♥	♣	♦	♠

	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	$(0, 1, 2, 3)$	+
♥	$(1, 2, 3, 0)$	-
♣	$(2, 3, 0, 1)$	+
♦	$(3, 0, 1, 2)$	-

Levi-Civita 符号与行列式

利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照行列式定义写成

$$\begin{aligned}\det(\Lambda) &= \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

♠	♥	♣	♦
♦	♠	♥	♣
♣	♦	♠	♥
♥	♣	♦	♠

于是

$$\begin{aligned}\varepsilon^{0123} &= 1 = [\det(\Lambda)]^2 \\ &= \det(\Lambda) \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	(0, 1, 2, 3)	+
♥	(1, 2, 3, 0)	-
♣	(2, 3, 0, 1)	+
♦	(3, 0, 1, 2)	-

利用 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性质得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1023} &= -\varepsilon^{0123} = -\det(\Lambda) \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\det(\Lambda) \Lambda^1_{\beta} \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda) \Lambda^1_{\beta} \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\end{aligned}$$

依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda) \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Levi-Civita 符号的 Lorentz 变换

对于固有保时向 Lorentz 变换, $\det(\Lambda) = +1$, 则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

对于宇称变换, $\det(\mathcal{P}) = -1$, 则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu_\alpha \mathcal{P}^\nu_\beta \mathcal{P}^\rho_\gamma \mathcal{P}^\sigma_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

可见, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 (4,0) 型 Lorentz 赝张量, 不过它是常数, 在任何惯性系中不变

于是, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 (0,4) 型 Lorentz 赝张量, 相应的固有 Lorentz 变换为

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu (\Lambda^{-1})^\beta_\nu (\Lambda^{-1})^\gamma_\rho (\Lambda^{-1})^\delta_\sigma$$

从而

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\rho \Lambda^\delta_\sigma \\ &= \varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon} (\Lambda^{-1})^\kappa_\alpha (\Lambda^{-1})^\lambda_\beta (\Lambda^{-1})^\tau_\gamma (\Lambda^{-1})^\varepsilon_\delta \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\rho \Lambda^\delta_\sigma \\ &= \varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon} \delta^\kappa_\mu \delta^\lambda_\nu \delta^\tau_\rho \delta^\varepsilon_\sigma \end{aligned}$$

即

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\rho \Lambda^\delta_\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$


三维 Levi-Civita 符号


 三维 Levi-Civita 符号定义为

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -1, & (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

 满足


$$\epsilon^{ijk} = \epsilon^{0ijk}, \quad \epsilon^{123} = +1$$


 显然, ϵ^{ijk} 关于三个空间指标是**全反对称**的

 通常用 i, j, k 等**拉丁字母**代表**三维空间指标**, 取值范围是 $1, 2, 3$


 而用 μ, ν, ρ 等**希腊字母**代表**四维时空指标**, 取值范围是 $0, 1, 2, 3$


三维 Levi-Civita 符号求和关系

 由 ϵ^{ijk} 的全反对称性有 $\epsilon^{i23}\epsilon^{i23} = \epsilon^{123}\epsilon^{123} = 1$ 和 $\epsilon^{i23}\epsilon^{i32} = \epsilon^{123}\epsilon^{132} = -1$


 依此类推，归纳出求和式

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$$

 根据 $\epsilon^{ij3}\epsilon^{ij3} = \epsilon^{123}\epsilon^{123} + \epsilon^{213}\epsilon^{213} = 2$ 和 $\epsilon^{ij3}\epsilon^{ij1} = \epsilon^{123}\epsilon^{121} + \epsilon^{213}\epsilon^{211} = 0$

 归纳出另一条求和式

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$$

 利用 ϵ^{ijk} ，可以将三维矢量外积

$$\begin{aligned} a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 &= \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\ &= (b^2c^3 - b^3c^2)\mathbf{e}_1 + (b^3c^1 - b^1c^3)\mathbf{e}_2 + (b^1c^2 - b^2c^1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

表达为 $a^i = \epsilon^{ijk}b^jc^k$

四维电流密度和四维矢势

🎵 接下来讨论真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式

🎵 电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{J} 组成一个 Lorentz 矢量 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, 称为四维电流密度

🎸 将电流连续性方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 写成 Lorentz 协变形式

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

🎵 用电势 Φ 和矢势 \mathbf{A} 将电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 表达为

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$$

🥁 Φ 和 \mathbf{A} 组成 Lorentz 矢量 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$, 称为四维矢势, 则上式的分量形式为

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$



James Clerk Maxwell
(1831–1879)

场强张量

🎹 引入**电磁场**的**场强张量** (field strength tensor)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$$

🔊 它是一个 2 阶**反对称** Lorentz 张量

🔔 由于两个**时空导数**的次序**可以交换**，从上述定义推出

$$\begin{aligned} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \partial^\mu \partial^\rho A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu A^\rho + \partial^\nu \partial^\mu A^\rho - \partial^\nu \partial^\rho A^\mu \\ &= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} \end{aligned}$$

🎤 即 **Bianchi 恒等式**

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$



Luigi Bianchi
(1856–1928)

场强张量的分量

📡 $F^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i$

📢 可见, F^{0i} 对应于**电场强度**

🎷 由求和式 $\varepsilon^{jki} \varepsilon^{imn} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{imn} = \delta^{jm} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{km}$ 得到

$$\varepsilon^{ijk} B^k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m A^n = (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i$$

🎷 从而 $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk} B^k$

📢 故 $F^{\mu\nu}$ 的 ij 分量对应于**磁感应强度**

🎷 把 $F^{\mu\nu}$ 写成**矩阵形式**是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss 定律和 Ampère 环路定律

♠ Gauss 定律对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ 等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

♥ Ampère 环路定律对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

📖 归纳起来, 得到 **Maxwell 方程**

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



André-Marie Ampère
(1775–1836)

Gauss 定律和 Ampère 环路定律

♠ Gauss 定律对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ 等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

♥ Ampère 环路定律对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

📖 归纳起来, 得到 **Maxwell 方程**

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

🎷 这个方程完全是用 Lorentz 张量写的, 具有 **Lorentz 协变性**

🎸 在固有保时向 **Lorentz 变换**下, 有

$$\begin{aligned} \partial'_\mu F'^{\mu\nu} &= \partial_\alpha [(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma F^{\beta\gamma}] = \partial_\alpha (\delta^\alpha{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma F^{\beta\gamma}) \\ &= \Lambda^\nu{}_\gamma \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} = \Lambda^\nu{}_\gamma J^\gamma = J'^\nu \end{aligned}$$

🎪 可见它在**不同惯性系**中具有**相同形式**, 满足**狭义相对性原理**



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



André-Marie Ampère
(1775–1836)

Gauss 磁定律

🔑 由 $\varepsilon^{kij} \varepsilon^{ijl} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$ 得 $\varepsilon^{ijk} F^{jk} = -\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{jkl} B^l = -2\delta^{il} B^l = -2B^i$ ，即

$$B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk}$$

♣ Gauss 磁定律对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6} (\varepsilon^{ijk} \partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki} \partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij} \partial_k F^{ij}) \\ &= -\frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} (\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij}) \end{aligned}$$

† 第三步通过**更换指标字母**写出三个相等的项

🔊 毕竟，对于参与**缩并**或**求和**的指标，更换指标字母**不会影响结果**

🎧 上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0$$

🎧 这是 **Bianchi 恒等式**取**纯空间分量**的形式

Faraday 电磁感应定律

◆ Faraday 电磁感应定律对应的 Maxwell-Faraday 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

🔔 写成分量的形式，得

$$-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn} \partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn} \partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn} \partial_m F^{n0}$$

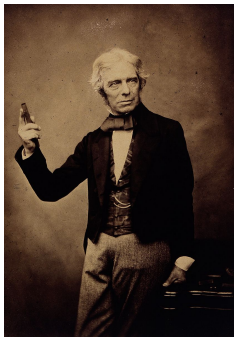
📀 从 $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k$ 推出

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{ij} &= -\varepsilon^{ijk} \partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m F^{n0} \\ &= (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial_m F^{j0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0} \end{aligned}$$

📀 即


$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0$$

🔊 这也是 Bianchi 恒等式取特定分量的形式



Michael Faraday
(1791–1867)


对偶场强张量


 利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (dual field strength tensor)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}$$

 它也是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**, \tilde{F}^{0i} 对应于**磁感应强度**:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{j\mu} g_{k\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{jm} g_{kn} F^{mn} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{jkl} B^l = -\frac{1}{2} 2\delta^{il} B^l = -B^i \end{aligned}$$

 第五步利用了 $g_{jm} F^{mn} = -\delta^{jm} F^{mn} = -F^{jn}$, 倒数第二步用到**求和关系**

 另一方面, \tilde{F}^{ij} 对应于**电场强度**:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij0k} F_{0k} + \varepsilon^{ijk0} F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk} F_{0k} = \varepsilon^{ijk} g_{0\mu} g_{k\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \varepsilon^{ijk} g_{00} g_{kl} F^{0l} = -\varepsilon^{ijk} F^{0k} = \varepsilon^{ijk} E^k \end{aligned}$$

对偶场强张量与 Bianchi 恒等式



对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的矩阵形式是 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$

由 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义有

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{6} (\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu} \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho} \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{6} \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

因此 Bianchi 恒等式 $\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$ 等价于

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$



从这些讨论可以看到，用 Lorentz 张量语言表达 Maxwell 方程组是十分简单的，而且方程的 Lorentz 协变性非常明确