量 子 场 论

标准模型简介

余钊焕

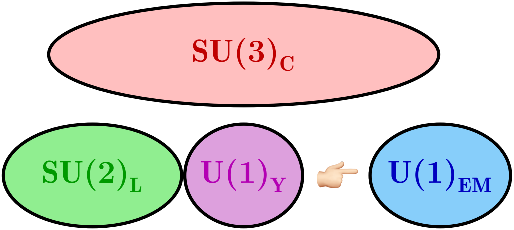
中山大学物理学院

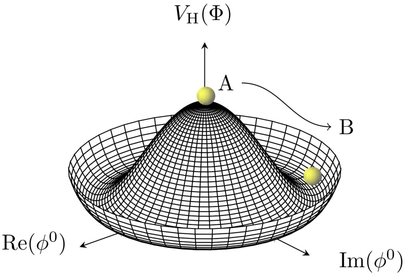
https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 12 月 30 日

粒子物理标准模型

- 粒子物理**标准模型**是一个 $\mathbf{SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$ **规范场论**
- 模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用
- $\mathrm{SU(3)_C}$ 部分描述**强相互作用**，称为**量子色动力学**，规范玻色子是**胶子**
- $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 部分描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱规范理论**，在这个理论中引入一个 **Higgs 标量二重态**，从而引起规范群的**对称性自发破缺**，使得 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 群破缺为 $\mathbf{U(1)_{EM}}$ 群



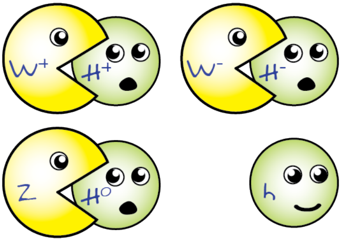


基本粒子质量起源

- 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

- 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得质量，成为 $W^{\pm}$ 玻色子和 Z^0 玻色子，传递**弱相互作用**

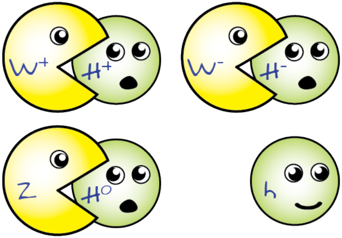
- 剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递**电磁相互作用**



Higgs 玻色子

基本粒子质量起源

- 🍔 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数
- 🍕 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得质量，成为 $W^{\pm}$ 玻色子和 Z^0 玻色子，传递弱相互作用
- 🍰 剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递电磁相互作用
- 🍒 与 Higgs 场的 Yukawa 耦合导致左手和右手费米子组合成 Dirac 费米子，并获得质量



Higgs 玻色子

- 🥨 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量
- 🥐 1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理

非 Abel 规范理论

非 Abel 群的生成元彼此不对易，因而规范变换形式与 $\mathrm{U}(1)$ 群（Abel 群）不同

1954 年，杨振宁和 Robert Mills 提出**非 Abel 规范理论**，也称为 **Yang-Mills 理论**，其规范场称为 **Yang-Mills 场**

对于非 Abel 的 Lie 群，生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = \mathrm{i}f^{abc}t^c$，依赖时空坐标的**群幺正变换**为 $U(x) = \exp[\mathrm{i}\theta^a(x)t^a]$，旋量场多重态 $\psi(x)$ 和规范场 $A^a_\mu(x)$ 的**规范变换**是

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x), \quad A^a_\mu(x)t^a \to U(x)A^a_\mu(x)t^a U^\dagger(x) - \frac{\mathrm{i}}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

定义**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gA^a_\mu t^a$，就可以利用 $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ 推出

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) &\to \left[\partial_\mu + \mathrm{i}g\left(UA^a_\mu t^a U^\dagger - \frac{\mathrm{i}}{g}U\partial_\mu U^\dagger\right)\right]U\psi \\ &= UU^\dagger(\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu\psi + \mathrm{i}gUA^a_\mu t^a\psi + U(\partial_\mu U^\dagger)U\psi \\ &= U(\partial_\mu + \mathrm{i}gA^a_\mu t^a)\psi + U\partial_\mu(U^\dagger U)\psi = U(x)D_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

具有**非 Abel 规范对称性**的拉氏量是 $\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu}}$

规范场的**场强张量** $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$

量子色动力学

量子色动力学 (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**，是 $\mathbf{SU(3)_C}$ **非 Abel 规范理论**，规范场 $G^a_\mu(x)$ 对应于 8 种胶子，夸克旋量场 $q(x)$ 是 $\mathbf{SU(3)_C}$ **三重态**，拉氏量

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \sum_q \bar{q}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \cdots, 8}$$

协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} g_\mathrm{s} G^a_\mu t^a$，场强张量 $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_\mathrm{s} f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$

g_s 称为**强耦合常数**，**结构常数** f^{abc} 对 3 个指标全反对称，独立分量为

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = 1/2, \quad f^{458} = f^{678} = \sqrt{3}/2$$

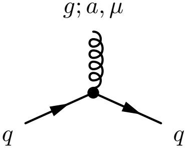
$t^a = \lambda^a/2$ 是 $\mathbf{SU(3)_C}$ **基础表示**的生成元，其中 λ^a 是 8 个 **Gell-Mann 矩阵**

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

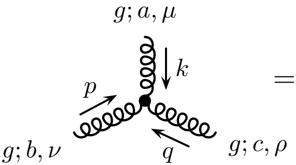
QCD 相互作用顶点

- $\mathcal{L}_{\rm QCD}$ 中 $-g_s G^a_\mu \bar{q}\gamma^\mu t^a q$ **项**的相互作用顶点如右图

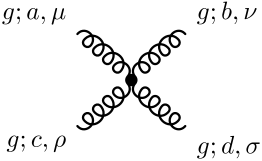


$$= -\mathrm{i}g_s\gamma^\mu t^a$$

- $-G^a_{\mu\nu}G^{a,\mu\nu}/4$ **项**带来**非 Abel 规范理论特有**的以下**规范玻色子自相互作用顶点**——胶子 g 的**三线性**和**四线性**自相互作用顶点



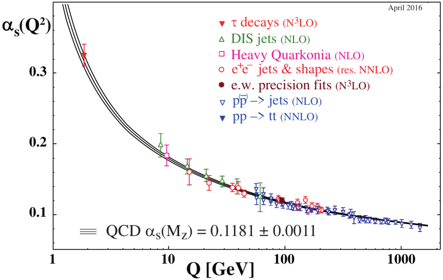
$$= -g_s f^{abc}\left[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu\right]$$



$$\begin{aligned} = -\mathrm{i}g_s^2\Big[&f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &+f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &+f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\Big] \end{aligned}$$

渐近自由和夸克禁闭

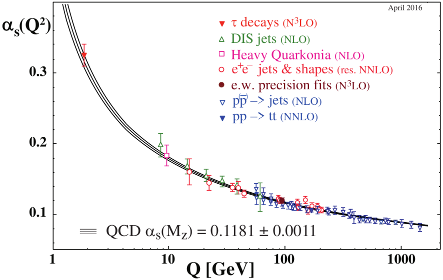
- 受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会**“跑动”**的，即数值依赖于能标 Q
- 在 QED 中，**电磁耦合常数** $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi}$ **随能标升高而增大**
- 然而，QCD 的情况相反，**强耦合常数** $\alpha_s = \dfrac{g_s^2}{4\pi}$ **随能标升高而减小**
- 这个特性称为 **QCD 的渐近自由**，而**高能标**意味着**短距离**



[PDG 2018]

渐近自由和夸克禁闭

- 受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会**“跑动”**的，即数值依赖于能标 Q
- 在 QED 中，**电磁耦合常数** $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi}$ **随能标升高而增大**
- 然而，QCD 的情况相反，**强耦合常数** $\alpha_s = \dfrac{g_s^2}{4\pi}$ **随能标升高而减小**



[PDG 2018]

- 这个特性称为 **QCD 的渐近自由**，而高能标意味着短距离
- 随着能标下降，α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强
- 夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**
- 实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态
- 由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中

旋量场手征性与宇称不守恒

- 利用**左手**投影矩阵 $P_\mathrm{L} \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ 和**右手**投影矩阵 $P_\mathrm{R} \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$
- 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为**左手旋量场** $\psi_\mathrm{L} \equiv P_\mathrm{L}\psi$ 和**右手旋量场** $\psi_\mathrm{R} \equiv P_\mathrm{R}\psi$
- 对于**无质量**旋量场，或在可忽略质量的**高能极限**下，**手征性等价于螺旋度**

  - **左手场** $\psi_\mathrm{L}(x)$ $\begin{cases}\text{左旋正费米子}\\ \text{右旋反费米子}\end{cases}$ **右手场** $\psi_\mathrm{R}(x)$ $\begin{cases}\text{右旋正费米子}\\ \text{左旋反费米子}\end{cases}$

- **质量项** $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L} + \bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R})$ 相当于左右手旋量场的耦合项

旋量场手征性与宇称不守恒

- 利用左手投影矩阵 $P_\mathrm{L} \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ 和右手投影矩阵 $P_\mathrm{R} \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$
- 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为左手旋量场 $\psi_\mathrm{L} \equiv P_\mathrm{L}\psi$ 和右手旋量场 $\psi_\mathrm{R} \equiv P_\mathrm{R}\psi$
- 对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

  左手场 $\psi_\mathrm{L}(x)$ $\begin{cases} \text{左旋正费米子} \\ \text{右旋反费米子} \end{cases}$　　右手场 $\psi_\mathrm{R}(x)$ $\begin{cases} \text{右旋正费米子} \\ \text{左旋反费米子} \end{cases}$

- 质量项 $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L} + \bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R})$ 相当于左右手旋量场的耦合项
- 在空间反射变换下，螺旋度符号翻转，左手旋量场和右手旋量场相互转换
- 对于宇称守恒的理论，如量子电动力学和量子色动力学，左右手旋量场具有相同的相互作用，因而存在空间反射对称性
- 在弱相互作用中，**宇称不守恒**，不存在空间反射对称性，其根源在于左右手旋量场参与不同的规范相互作用

电弱规范理论

- 电弱规范理论的规范群是 $\mathbf{SU(2)_L} \times \mathbf{U(1)_Y}$
- 每一代左手旋量场构成 2 个 $\mathbf{SU(2)_L}$ 二重态，u'_i 和 d'_i 标记夸克场的规范本征态

$$\boxed{L_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} P_\mathrm{L}\nu_i \\ P_\mathrm{L}\ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathrm{L}} \\ \ell_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad Q_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} P_\mathrm{L}u'_i \\ P_\mathrm{L}d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{i\mathrm{L}} \\ d'_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3}$$

电弱规范理论

- **电弱规范理论**的规范群是 $\mathbf{SU(2)_L} \times \mathbf{U(1)_Y}$
- 每一代**左手旋量场**构成 2 个 $\mathbf{SU(2)_L}$ **二重态**，u'_i 和 d'_i 标记夸克场的**规范本征态**

$$\boxed{L_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} P_\mathrm{L}\nu_i \\ P_\mathrm{L}\ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathrm{L}} \\ \ell_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad Q_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} P_\mathrm{L}u'_i \\ P_\mathrm{L}d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{i\mathrm{L}} \\ d'_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3}$$

- 它们的**协变导数**是 $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gW^a_\mu\tau^a + \mathrm{i}g'B_\mu Y$
- $W^a_\mu(x)$ $(a = 1,2,3)$ 是 $\mathrm{SU(2)_L}$ **规范场**，$B_\mu(x)$ 是 $\mathbf{U(1)_Y}$ **规范场**
- g 和 g' 分别是 $\mathbf{SU(2)_L}$ 和 $\mathbf{U(1)_Y}$ 的**规范耦合常数**
- $\tau^a = \sigma^a/2$ 是 $\mathrm{SU(2)_L}$ 群基础表示的生成元，对应于**弱同位旋**
- 生成元 τ^3 的本征值是**弱同位旋第 3 分量**，记为 T^3；Y 是**弱超荷**

电弱规范理论

- 电弱规范理论的规范群是 $\mathbf{SU(2)_L} \times \mathbf{U(1)_Y}$
- 每一代左手旋量场构成 2 个 $\mathbf{SU(2)_L}$ 二重态，u_i' 和 d_i' 标记夸克场的规范本征态

$$\boxed{L_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} P_\mathrm{L}\nu_i \\ P_\mathrm{L}\ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathrm{L}} \\ \ell_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad Q_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} P_\mathrm{L}u_i' \\ P_\mathrm{L}d_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i\mathrm{L}}' \\ d_{i\mathrm{L}}' \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3}$$

- 它们的协变导数是 $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gW_\mu^a\tau^a + \mathrm{i}g'B_\mu Y$
- $W_\mu^a(x)$ $(a = 1,2,3)$ 是 $\mathrm{SU(2)_L}$ 规范场，$B_\mu(x)$ 是 $\mathbf{U(1)_Y}$ 规范场
- g 和 g' 分别是 $\mathbf{SU(2)_L}$ 和 $\mathbf{U(1)_Y}$ 的规范耦合常数
- $\tau^a = \sigma^a/2$ 是 $\mathrm{SU(2)_L}$ 群基础表示的生成元，对应于弱同位旋
- 生成元 τ^3 的本征值是弱同位旋第 3 分量，记为 T^3；Y 是弱超荷
- 各代右手旋量场 $\boxed{\ell_{i\mathrm{R}} = P_\mathrm{R}\ell_i, \quad u_{i\mathrm{R}}' = P_\mathrm{R}u_i', \quad d_{i\mathrm{R}}' = P_\mathrm{R}d_i'}$ 是 $\mathbf{SU(2)_L}$ 单态
- 它们的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}g'B_\mu Y$

旋量场的电弱量子数

电荷定义为 $\boxed{Q \equiv T^3 + Y}$，而 $\tau^3 = \dfrac{\sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$

下表列出三代旋量场的弱同位旋第 3 分量 T^3、弱超荷 Y 和电荷 Q

统一记号	第 1 代	第 2 代	第 3 代	T^3	Y	Q
$L_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathrm{L}} \\ \ell_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{e\mathrm{L}} \\ e_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu\mathrm{L}} \\ \mu_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau\mathrm{L}} \\ \tau_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	0 -1
$Q_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u'_{i\mathrm{L}} \\ d'_{i\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u'_{\mathrm{L}} \\ d'_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c'_{\mathrm{L}} \\ s'_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t'_{\mathrm{L}} \\ b'_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
$\ell_{i\mathrm{R}}$	e_{R}	μ_{R}	τ_{R}	0	-1	-1
$u'_{i\mathrm{R}}$	u'_{R}	c'_{R}	t'_{R}	0	$2/3$	$2/3$
$d'_{i\mathrm{R}}$	d'_{R}	s'_{R}	b'_{R}	0	$-1/3$	$-1/3$

Brout–Englert–Higgs 机制

❗ 夸克、带电轻子、Z^0 和 $W^{\pm}$ 都具有**质量**，但现在 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ 规范不变的拉氏量**不能具有任何质量项**

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是**可重整性**

😟 在规范理论中直接放入**规范场的质量项**，会**破坏规范对称性**

😨 **左右手旋量场**参与不同的规范相互作用，直接引入**质量项**也会**破坏规范对称性**

Brout–Englert–Higgs 机制

❗ 夸克、带电轻子、Z^0 和 $W^\pm$ 都具有**质量**，但现在 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 规范不变的拉氏量**不能具有任何质量项**

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是**可重整性**

😟 在规范理论中直接放入**规范场的质量项**，会**破坏规范对称性**

😨 **左右手旋量场**参与不同的规范相互作用，直接引入**质量项**也会**破坏规范对称性**

🤔 为了在保证**可重整性**的同时提供规范玻色子和费米子的**质量**，需要引入 **Brout–Englert–Higgs (BEH) 机制**，使 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 对称性自发破缺

🏟️ 引进 **Higgs 标量场** $\boxed{\Phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}}$，$\phi^+$ 和 ϕ^0 都是复标量场，角标表征**电荷**

🥅 Φ 是 $\mathbf{SU(2)_L}$ **二重态**，具有**弱超荷** $Y=1/2$，电弱规范不变的拉氏量为

$$\boxed{\mathcal{L}_\mathrm{H}=(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)-V_\mathrm{H}(\Phi),\quad V_\mathrm{H}(\Phi)=-\mu^2\Phi^\dagger\Phi+\lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2}$$

🏑 协变导数为 $D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gW_\mu^a\tau^a+\mathrm{i}g'YB_\mu$

🏒 $V_\mathrm{H}(\Phi)$ 是 Higgs 标量场的**势能项**，依赖于 $\Phi^\dagger\Phi=|\phi^+|^2+|\phi^0|^2$

自发对称性破缺

🏢 **势能**的行为由 $V_{\mathrm{H}}(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$ 中参数 μ^2 和 λ 决定；**假设** $\lambda > 0$

🛶 **如果** $\mu^2 < 0$，势能项 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的最小值对应于 $\Phi^\dagger\Phi = 0$；**Higgs 场的真空期待值**为 $\langle\Phi\rangle \equiv \langle 0|\,\Phi\,|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，它在电弱规范变换下**不变**，故**规范对称性未受到破坏**

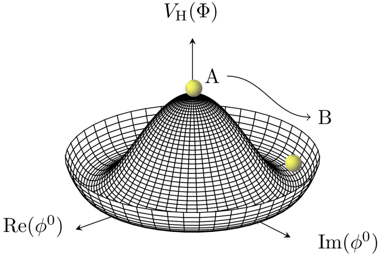
自发对称性破缺

🏢 **势能**的行为由 $V_{\mathrm{H}}(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$ 中参数 μ^2 和 λ 决定；**假设** $\lambda > 0$

🛶 **如果** $\mu^2 < 0$，势能项 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的最小值对应于 $\Phi^\dagger\Phi = 0$；**Higgs 场的真空期待值**为 $\langle\Phi\rangle \equiv \langle 0|\,\Phi\,|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，它在电弱规范变换下**不变**，故**规范对称性未受到破坏**

🚤 **如果** $\mu^2 > 0$，$\Phi^\dagger\Phi = 0$ 处变成 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的极大值，而最小值位于 $\Phi^\dagger\Phi = v^2/2$ 对应的 **3 维球面**上，其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

🌮 若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现右图所示**墨西哥草帽状**的形式



🌯 **Higgs 场的真空期待值**位于上述 **3 维球面**上的某一点，可取为 $\langle\Phi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

🫓 电弱规范变换会**改变**这个**期待值**，故真空态**不满足**电弱规范对称性

🥙 这种**拉氏量满足对称性**、**真空态却不满足**的现象称为**对称性自发破缺**

幺正规范

🏣 不失一般性地将 **Higgs 场真空期待值**取为 $\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ 之后，其它真空期待值可以通过 $\mathbf{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ **整体变换** $\langle\Phi\rangle \to \exp(i\alpha^a\tau^a)\exp(i\alpha^Y Y_H)\langle\Phi\rangle$ 得到

🍞 这是因为 $\langle\Phi^\dagger\Phi\rangle$ 在**这样的变换**下保持**不变**

幺正规范

- 🏣 不失一般性地将 **Higgs 场真空期待值**取为 $\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ 之后，其它真空期待值可以通过 $\mathbf{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ **整体变换** $\langle\Phi\rangle \to \exp(i\alpha^a\tau^a)\exp(i\alpha^Y Y_H)\langle\Phi\rangle$ 得到
- 🍞 这是因为 $\langle\Phi^\dagger\Phi\rangle$ 在**这样的变换**下保持**不变**
- 🥖 若 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ 且 $\alpha^3 = \alpha^Y$，则 $\alpha^3\tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + \mathbf{1})/2 = \mathrm{diag}(\alpha^3, 0)$，$\exp(i\alpha^a\tau^a)\exp(i\alpha^Y Y_H) = \mathrm{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$，而 $\langle\Phi\rangle$ 在此变换下**不变**
- 🧂 因此，有 **1 个方向**的对称性**没有受到破坏**，只有 **3 个方向**的对称性发生**自发破缺**
- 🧈 根据 **Goldstone 定理**，破缺后存在 **3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子**
- 🧀 有 **3 个规范玻色子**结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 **BEH 机制**获得**质量**

幺正规范

- 不失一般性地将 **Higgs 场真空期待值**取为 $\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ 之后，其它真空期待值可以通过 $\mathbf{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ **整体变换** $\langle\Phi\rangle \to \exp(\mathrm{i}\alpha^a\tau^a)\exp(\mathrm{i}\alpha^Y Y_H)\langle\Phi\rangle$ 得到
- 这是因为 $\langle\Phi^\dagger\Phi\rangle$ 在**这样的变换**下保持**不变**
- 若 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ 且 $\alpha^3 = \alpha^Y$，则 $\alpha^3\tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + \mathbf{1})/2 = \mathrm{diag}(\alpha^3, 0)$，$\exp(\mathrm{i}\alpha^a\tau^a)\exp(\mathrm{i}\alpha^Y Y_H) = \mathrm{diag}(e^{\mathrm{i}\alpha^3}, 1)$，而 $\langle\Phi\rangle$ 在此变换下**不变**
- 因此，有 **1 个方向**的对称性**没有受到破坏**，只有 **3 个方向**的对称性发生**自发破缺**
- 根据 **Goldstone 定理**，破缺后存在 **3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子**
- 有 **3 个规范玻色子**结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 **BEH 机制**获得**质量**
- 以 $\langle\Phi\rangle$ 为基础，将 Higgs 场参数化为 $\Phi(x) = \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\chi^a(x)}{v}\tau^a\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v+H(x)\end{pmatrix}$
- χ^a 和 H 都是实标量场，而 $\exp(-\mathrm{i}\chi^a\tau^a/v)$ 因子能够通过 $\mathbf{SU(2)_L}$ **规范变换消去**
- 因而可以直接取 $\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v+H(x)\end{pmatrix}}$，这种取法称为**幺正规范**

Higgs 玻色子

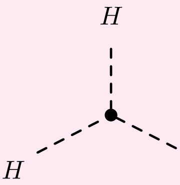
在**幺正规范**下，$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$，$\Phi^\dagger\Phi = \frac{1}{2}(v+H)^2$

此时 Higgs 场只剩下一个**物理自由度** $H(x)$，势能项化为

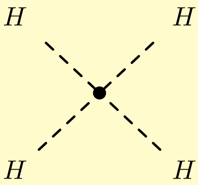
$$-V_{\mathrm{H}}(\Phi) = \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4$$

实标量场 $H(x)$ 对应于一个电中性标量玻色子 H，称为 **Higgs 玻色子**

Higgs 玻色子的**质量**为 $\boxed{m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v}$，具有**三线性**和**四线性**自相互作用



$= -6\mathrm{i}\lambda v$



$= -6\mathrm{i}\lambda$

电弱规范玻色子的质量项

- 由于 $\tau^a = \dfrac{\sigma^a}{2}$，$\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$，$\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}$，$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

- 有 $g' B_\mu Y_H + g W^a_\mu \tau^a = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} g' B_\mu + g W^3_\mu & g(W^1_\mu - \mathrm{i} W^2_\mu) \\ g(W^1_\mu + \mathrm{i} W^2_\mu) & g' B_\mu - g W^3_\mu \end{pmatrix}$

- **真空期待值** v 对**协变导数** $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + \mathrm{i}(g' B_\mu Y_H + g W^a_\mu \tau^a)]\Phi$ 的贡献为

$$D_\mu \Phi \supset \mathrm{i}(g' B_\mu Y_H + g W^a_\mu \tau^a) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \supset \frac{\mathrm{i} v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(W^1_\mu - \mathrm{i} W^2_\mu) \\ g' B_\mu - g W^3_\mu \end{pmatrix}$$

- **协变动能项** $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$ 中正比于 v^2 的项是

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &\supset \frac{v^2}{8} [g^2 |W^1_\mu - \mathrm{i} W^2_\mu|^2 + (g' B_\mu - g W^3_\mu)^2] \\ &= \frac{v^2}{8} [g^2 (W^{1\mu} W^1_\mu + W^{2\mu} W^2_\mu + W^{3\mu} W^3_\mu) + g'^2 B^\mu B_\mu - 2 g g' B^\mu W^3_\mu] \end{aligned}$$

- 这些项是**规范玻色子的质量项**

Weinberg 转动

- 将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GBM}} = \frac{1}{2}\, m_W^2 (W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} M_{W^3B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

- W_μ^1 和 W_μ^2 获得的**质量** $\boxed{m_W \equiv \frac{1}{2} gv}$

- $W^{3\mu}$ 和 B^μ 的**质量平方矩阵**为 $M_{W^3B}^2 \equiv \dfrac{v^2}{4}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$

Weinberg 转动

- 将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GBM}} = \frac{1}{2}\, m_W^2 \,(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} M_{W^3B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

- W_μ^1 和 W_μ^2 获得的**质量** $\boxed{m_W \equiv \frac{1}{2} gv}$

- $W^{3\mu}$ 和 B^μ 的**质量平方矩阵**为 $M_{W^3B}^2 \equiv \dfrac{v^2}{4}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$

- 为了使 $M_{W^3B}^2$ 矩阵**对角化**，定义 $\boxed{\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}}$

- 其中 $\boxed{s_W \equiv \sin\theta_W = \dfrac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}},\quad c_W \equiv \cos\theta_W = \dfrac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}}$

- θ_W 称为 **Weinberg 角**，也称为**弱混合角**

- 从后面的讨论可以看出 A_μ 就是**电磁场**，对应于光子；Z_μ 对应于**矢量玻色子** Z

Z 玻色子的质量

反过来，有 $\begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$

利用 $M^2_{W^3B} = \frac{v^2}{4}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} = \frac{(g^2+g'^2)v^2}{4}\begin{pmatrix} c_W^2 & -s_W c_W \\ -s_W c_W & s_W^2 \end{pmatrix}$，推出

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} M^2_{W^3B} \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(g^2+g'^2)v^2}{8}\begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_W^2 & -s_W c_W \\ -s_W c_W & s_W^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(g^2+g'^2)v^2}{8}\begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu$$

Z 玻色子的质量是 $\boxed{m_Z \equiv \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,v = \frac{gv}{2c_W} = \frac{m_W}{c_W}}$，而光子没有质量

实验测得 $m_Z = 91.2$ GeV 和 $m_W = 80.4$ GeV，故 $\theta_W = \cos^{-1}\frac{m_W}{m_Z} = 28.2^\circ$

$W^\pm$ 玻色子的质量

- 另一方面，用质量相同的实矢量场 W_μ^1 和 W_μ^2 线性组合出**复矢量场**

$$\boxed{W_\mu^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2)}$$

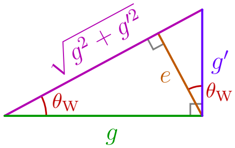
- 它的厄米共轭为 $W_\mu^- \equiv (W_\mu^+)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2)$
- 则 $W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-)$，$W_\mu^2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-)$
- 从而 $\frac{1}{2}(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) = W^{+,\mu}W_\mu^-$，于是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{GBM}} &= \frac{1}{2}m_W^2(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}W^{3\mu} & B^\mu\end{pmatrix} M_{W^3B}^2 \begin{pmatrix}W_\mu^3 \\ B_\mu\end{pmatrix} \\ &= m_W^2 W^{+,\mu}W_\mu^- + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu\end{aligned}$$

- 复矢量场 W_μ^+ 描述一对**正反矢量玻色子** $W^\pm$，**质量为** m_W
- 可见，**BEH 机制**使传递**弱相互作用**的规范玻色子 $W^\pm$ 和 Z 获得了**质量**，有 3 个 Higgs 场自由度变成它们的**纵向极化分量**

用规范场质量本征态表达

- 接下来用**质量本征态** $W_\mu^\pm$、A_μ 和 Z_μ 表达 $(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)$



- 由 $B_\mu = c_W A_\mu - s_W Z_\mu$ 和 $W_\mu^3 = s_W A_\mu + c_W Z_\mu$ 得

$$\begin{aligned} g'B_\mu + gW_\mu^3 &= g'(c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g(s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= \frac{2gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu + \frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu = 2eA_\mu + \frac{g}{c_W}(c_W^2 - s_W^2) Z_\mu \end{aligned}$$

- 其中 $\boxed{e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} = g s_W = g' c_W}$，后面讨论将表明 e 就是**单位电荷量**

- 协变导数 $D_\mu\Phi = [\partial_\mu + \mathrm{i}(g'B_\mu Y_H + gW_\mu^a\tau^a)]\Phi$ 中的**相关因子**化为

$$\begin{aligned} g'B_\mu Y_H + gW_\mu^a\tau^a &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g'B_\mu + gW_\mu^3 & g(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2) & g'B_\mu - gW_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} eA_\mu + \frac{g}{2c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu & \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- & -\frac{g}{2c_W} Z_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Higgs 场协变动能项

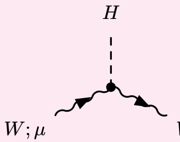
于是，幺正规范下的 Higgs 场协变动能项化为

$$
\begin{aligned}
&(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)\\
=\;& \left|[\partial_\mu + \mathrm{i}(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)]\Phi\right|^2\\
=\;& \left|\begin{pmatrix} \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu + \dfrac{\mathrm{i}g}{2c_\mathrm{W}}(c_\mathrm{W}^2 - s_\mathrm{W}^2)Z_\mu & \dfrac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \dfrac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu - \dfrac{\mathrm{i}g}{2c_\mathrm{W}}Z_\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix}\right|^2\\
=\;& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}W_\mu^-(v+H) & \partial_\mu H + \dfrac{\mathrm{i}g}{2c_\mathrm{W}}Z_\mu(v+H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}W_\mu^+(v+H) \\ \partial_\mu H - \dfrac{\mathrm{i}g}{2c_\mathrm{W}}Z_\mu(v+H) \end{pmatrix}\\
=\;& \frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + (v+H)^2\left(\frac{g^2}{4}W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2}{8c_\mathrm{W}^2}Z_\mu Z^\mu\right)
\end{aligned}
$$

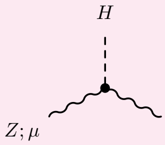
Higgs 玻色子与 $W^\pm$、Z 玻色子的耦合

- 将上述 **Higgs 场协变动能项**表达为

$$
\begin{aligned}
(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) = {} & \frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) \\
& + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2}\, m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
& + g m_W H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g m_Z}{2c_W}\, H Z_\mu Z^\mu \\
& + \frac{g^2}{4}\, H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g^2}{8c_W^2}\, H^2 Z_\mu Z^\mu
\end{aligned}
$$

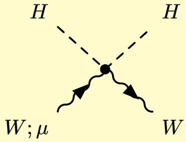


$$= \mathrm{i} g m_W g^{\mu\nu}$$

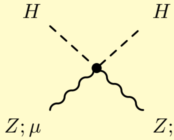


$$= \frac{\mathrm{i} g m_Z}{c_W}\, g^{\mu\nu}$$

- 除了 $W^\pm$ 和 Z 玻色子的**质量项**之外
- 还出现了 Higgs 玻色子 H 与 $W^\pm$、Z 玻色子的**三线性**和**四线性**耦合项



$$= \frac{\mathrm{i} g^2}{2}\, g^{\mu\nu}$$



$$= \frac{\mathrm{i} g^2}{2c_W^2}\, g^{\mu\nu}$$

Yukawa 相互作用

🏠 Higgs 场 $\Phi(x)$ 的**弱超荷**为 $+1/2$，记 $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$，引入 $\Phi(x)$ 的**共轭态**

$$\boxed{\tilde{\Phi}(x) = \mathrm{i}\sigma^2\Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}}$$

🍚 则 $\tilde{\Phi}(x)$ 是**弱超荷**为 $-1/2$ 的 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 二重态

🍙 在**幺正规范**下，$\tilde{\Phi}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

Yukawa 相互作用

- Higgs 场 $\Phi(x)$ 的**弱超荷**为 $+1/2$，记 $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$，引入 $\Phi(x)$ 的**共轭态**

$$\tilde{\Phi}(x) = \mathrm{i}\sigma^2\Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

- 则 $\tilde{\Phi}(x)$ 是**弱超荷**为 $-1/2$ 的 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$ 二重态
- 在**幺正规范**下，$\tilde{\Phi}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H(x) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v+H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$
- 与费米子场组成满足 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ 规范对称性的 **Yukawa 相互作用拉氏量**

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -\tilde{y}_{d,ij}\bar{Q}_{i\mathrm{L}}d'_{j\mathrm{R}}\Phi - \tilde{y}_{u,ij}\bar{Q}_{i\mathrm{L}}u'_{j\mathrm{R}}\tilde{\Phi} - y_{\ell_i}\bar{L}_{i\mathrm{L}}\ell_{i\mathrm{R}}\Phi + \mathrm{H.c.}$$

$$Y: \quad -\tfrac{1}{6}\ -\tfrac{1}{3}\ +\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{1}{6}\ +\tfrac{2}{3}\ -\tfrac{1}{2} \qquad +\tfrac{1}{2}\ -1\ +\tfrac{1}{2}$$

- 其中 $\mathrm{H.c.}$ 表示**厄米共轭**
- **Yukawa 耦合常数** $\tilde{y}_{d,ij}$ 和 $\tilde{y}_{u,ij}$ 联系着**不同代**的**夸克场**
- **Yukawa 耦合常数** y_{ℓ_i} 只联系**同一代**的**轻子场**

幺正规范下的 Yukawa 相互作用

在幺正规范下，利用

$$\bar{Q}_{i\mathrm{L}}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{u}'_{i\mathrm{L}} & \bar{d}'_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v+H\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\bar{d}'_{i\mathrm{L}}$$

$$\bar{Q}_{i\mathrm{L}}\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{u}'_{i\mathrm{L}} & \bar{d}'_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v+H\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\bar{u}'_{i\mathrm{L}}$$

$$\bar{L}_{i\mathrm{L}}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_{i\mathrm{L}} & \bar{\ell}_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v+H\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\bar{\ell}_{i\mathrm{L}}$$

推出 $\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)(\tilde{y}_{d,ij}\bar{d}'_{i\mathrm{L}}d'_{j\mathrm{R}} + \tilde{y}_{u,ij}\bar{u}'_{i\mathrm{L}}u'_{j\mathrm{R}} + y_{\ell_i}\bar{\ell}_{i\mathrm{L}}\ell_{i\mathrm{R}} + \mathrm{H.c.})$

$\tilde{y}_{d,ij}$ 和 $\tilde{y}_{u,ij}$ 可看作 **3×3 矩阵** $\tilde{y}_d$ 和 $\tilde{y}_u$ 的元素

$\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger$ 是**厄米矩阵**，必定可以通过**幺正矩阵** U_d 和 U_u 分别对角化成两个对角元为实数的**对角矩阵** y_{D}^2 和 y_{U}^2，满足 $U_d^\dagger\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger U_d = y_{\mathrm{D}}^2$ 和 $U_u^\dagger\tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger U_u = y_{\mathrm{U}}^2$，即

$$\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger = U_d y_{\mathrm{D}}^2 U_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger = U_u y_{\mathrm{U}}^2 U_u^\dagger$$

Yukawa 耦合矩阵的对角化

🏘️ 符合 $\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger = U_d y_{\mathrm{D}}^2 U_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger = U_u y_{\mathrm{U}}^2 U_u^\dagger$ 的 $\tilde{y}_d$ 和 $\tilde{y}_u$ 可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_{\mathrm{D}} K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_{\mathrm{U}} K_u^\dagger$$

🥟 **对角矩阵** y_{D} 和 y_{U} 满足 $y_{\mathrm{D}} y_{\mathrm{D}} = y_{\mathrm{D}}^2$ 和 $y_{\mathrm{U}} y_{\mathrm{U}} = y_{\mathrm{U}}^2$，$K_d^\dagger$ 和 $K_u^\dagger$ 是两个**幺正矩阵**

🥮 将 y_{D} 和 y_{U} 表示成

$$y_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

Yukawa 耦合矩阵的对角化

- 符合 $\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger = U_d y_{\mathrm{D}}^2 U_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger = U_u y_{\mathrm{U}}^2 U_u^\dagger$ 的 $\tilde{y}_d$ 和 $\tilde{y}_u$ 可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_{\mathrm{D}} K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_{\mathrm{U}} K_u^\dagger$$

- **对角矩阵** y_{D} 和 y_{U} 满足 $y_{\mathrm{D}}y_{\mathrm{D}} = y_{\mathrm{D}}^2$ 和 $y_{\mathrm{U}}y_{\mathrm{U}} = y_{\mathrm{U}}^2$，$K_d^\dagger$ 和 $K_u^\dagger$ 是两个**幺正矩阵**
- 将 y_{D} 和 y_{U} 表示成

$$y_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

- 定义 $d_{i\mathrm{L}} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{L}}$，$d_{i\mathrm{R}} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{R}}$，$u_{i\mathrm{L}} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{L}}$ 和 $u_{i\mathrm{R}} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{R}}$
- 从而，$\bar{d}_{i\mathrm{L}} = \bar{d}'_{j\mathrm{L}} U_{d,ji}$，$\bar{u}_{i\mathrm{L}} = \bar{u}'_{j\mathrm{L}} U_{u,ji}$，则

$$\tilde{y}_{d,ij}\bar{d}'_{i\mathrm{L}}d'_{j\mathrm{R}} = \bar{d}'_{i\mathrm{L}}(U_d y_{\mathrm{D}} K_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{R}} = \bar{d}'_{i\mathrm{L}} U_{d,ik} y_{d_k} (K_d^\dagger)_{kj} d'_{j\mathrm{R}} = y_{d_k}\bar{d}_{k\mathrm{L}} d_{k\mathrm{R}} = y_{d_i}\bar{d}_{i\mathrm{L}} d_{i\mathrm{R}}$$

$$\tilde{y}_{u,ij}\bar{u}'_{i\mathrm{L}}u'_{j\mathrm{R}} = \bar{u}'_{i\mathrm{L}}(U_u y_{\mathrm{U}} K_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{R}} = y_{u_i}\bar{u}_{i\mathrm{L}} u_{i\mathrm{R}}$$

费米子质量和 Yukawa 耦合

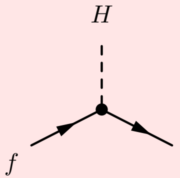
于是得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)(y_{d_i}\bar{d}_{i\mathrm{L}}d_{i\mathrm{R}} + y_{u_i}\bar{u}_{i\mathrm{L}}u_{i\mathrm{R}} + y_{\ell_i}\bar{\ell}_{i\mathrm{L}}\ell_{i\mathrm{R}} + \mathrm{H.c.}) \\ &= -m_{d_i}\bar{d}_i d_i - m_{u_i}\bar{u}_i u_i - m_{\ell_i}\bar{\ell}_i\ell_i - \frac{m_{d_i}}{v}H\bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v}H\bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v}H\bar{\ell}_i\ell_i\end{aligned}$$

- 其中前三项是**费米子质量项**，后三项是 Higgs 玻色子与费米子的 **Yukawa 耦合项**
- 于是，三代夸克和带电轻子获得了**质量**

$$m_{d_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}y_{d_i}v, \quad m_{u_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}y_{u_i}v$$

$$m_{\ell_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}y_{\ell_i}v$$



$$= -\frac{\mathrm{i}m_f}{v}$$

- $d'_{i\mathrm{L}}$、$d'_{i\mathrm{R}}$、$u'_{i\mathrm{L}}$ 和 $u'_{i\mathrm{R}}$ 是夸克**规范本征态**
- $d_{i\mathrm{L}}$、$d_{i\mathrm{R}}$、$u_{i\mathrm{L}}$ 和 $u_{i\mathrm{R}}$ 是夸克**质量本征态**

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵

🏨 $d_{i\mathrm{L}} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{L}}$，$d_{i\mathrm{R}} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{R}}$，$u_{i\mathrm{L}} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{L}}$ 和 $u_{i\mathrm{R}} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{R}}$ 表明

$$d'_{i\mathrm{L}} = U_{d,ij} d_{j\mathrm{L}}, \quad d'_{i\mathrm{R}} = K_{d,ij} d_{j\mathrm{R}}, \quad u'_{i\mathrm{L}} = U_{u,ij} u_{j\mathrm{L}}, \quad u'_{i\mathrm{R}} = K_{u,ij} u_{j\mathrm{R}}$$

🥛 从而

$$\bar{d}'_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu d'_{i\mathrm{L}} = \bar{d}_{j\mathrm{L}} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{k\mathrm{L}} = \bar{d}_{j\mathrm{L}} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{k\mathrm{L}} = \bar{d}_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu d_{i\mathrm{L}}$$

☕ 同理有

$$\bar{u}'_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu u'_{i\mathrm{L}} = \bar{u}_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu u_{i\mathrm{L}}, \quad \bar{d}'_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu d'_{i\mathrm{R}} = \bar{d}_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu d_{i\mathrm{R}}, \quad \bar{u}'_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu u'_{i\mathrm{R}} = \bar{u}_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu u_{i\mathrm{R}}$$

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵

$d_{i\mathrm{L}} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{L}}$，$d_{i\mathrm{R}} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{j\mathrm{R}}$，$u_{i\mathrm{L}} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{L}}$ 和 $u_{i\mathrm{R}} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{j\mathrm{R}}$ 表明

$$d'_{i\mathrm{L}} = U_{d,ij} d_{j\mathrm{L}}, \quad d'_{i\mathrm{R}} = K_{d,ij} d_{j\mathrm{R}}, \quad u'_{i\mathrm{L}} = U_{u,ij} u_{j\mathrm{L}}, \quad u'_{i\mathrm{R}} = K_{u,ij} u_{j\mathrm{R}}$$

从而

$$\bar{d}'_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu d'_{i\mathrm{L}} = \bar{d}_{j\mathrm{L}} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{k\mathrm{L}} = \bar{d}_{j\mathrm{L}} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{k\mathrm{L}} = \bar{d}_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu d_{i\mathrm{L}}$$

同理有

$$\bar{u}'_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu u'_{i\mathrm{L}} = \bar{u}_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu u_{i\mathrm{L}}, \quad \bar{d}'_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu d'_{i\mathrm{R}} = \bar{d}_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu d_{i\mathrm{R}}, \quad \bar{u}'_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu u'_{i\mathrm{R}} = \bar{u}_{i\mathrm{R}} \gamma^\mu u_{i\mathrm{R}}$$

另一方面，

$$\bar{u}'_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu d'_{i\mathrm{L}} = \bar{u}_{j\mathrm{L}} (U_u^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{k\mathrm{L}} = \bar{u}_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu V_{ij} d_{j\mathrm{L}}$$

$$\bar{d}'_{i\mathrm{L}} \gamma^\mu u'_{i\mathrm{L}} = \bar{d}_{j\mathrm{L}} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{u,ik} u_{k\mathrm{L}} = \bar{d}_{j\mathrm{L}} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{i\mathrm{L}}$$

其中 $\boxed{V \equiv U_u^\dagger U_d}$ 称为 **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵**

其厄米共轭矩阵为 $V^\dagger = U_d^\dagger U_u$

费米子协变动能项

$\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 规范不变的费米子协变动能项为

$$\mathcal{L}_\mathrm{EWF}=\bar{Q}_{i\mathrm{L}}\mathrm{i}\not{D}Q_{i\mathrm{L}}+\bar{u}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}u'_{i\mathrm{R}}+\bar{d}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}d'_{i\mathrm{R}}+\bar{L}_{i\mathrm{L}}\mathrm{i}\not{D}L_{i\mathrm{L}}+\bar{\ell}_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}\ell_{i\mathrm{R}}$$

根据 $Q=T^3+Y$ 和 $e=gs_\mathrm{W}=g'c_\mathrm{W}$，有

$$g'YB_\mu+gT^3W^3_\mu=g'Y(c_\mathrm{W}A_\mu-s_\mathrm{W}Z_\mu)+gT^3(s_\mathrm{W}A_\mu+c_\mathrm{W}Z_\mu)$$

$$=e(Y+T^3)A_\mu+\left(gc_\mathrm{W}T^3-\frac{gs_\mathrm{W}}{c_\mathrm{W}}s_\mathrm{W}Y\right)Z_\mu=QeA_\mu+\frac{g}{c_\mathrm{W}}(T^3c^2_\mathrm{W}-Ys^2_\mathrm{W})Z_\mu$$

$$=QeA_\mu+\frac{g}{c_\mathrm{W}}(T^3-Qs^2_\mathrm{W})Z_\mu$$

故 $D_\mu Q_{i\mathrm{L}}=(\partial_\mu+\mathrm{i}g'B_\mu Y+\mathrm{i}gW^a_\mu\tau^a)Q_{i\mathrm{L}}$

$$=\partial_\mu Q_{i\mathrm{L}}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}g'YB_\mu+gT^3W^3_\mu & \frac{g}{2}(W^1_\mu-\mathrm{i}W^2_\mu)\\ \frac{g}{2}(W^1_\mu+\mathrm{i}W^2_\mu) & g'YB_\mu+gT^3W^3_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_{i\mathrm{L}}\\ d'_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}$$

$$=\partial_\mu Q_{i\mathrm{L}}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}\left[QeA_\mu+\frac{g}{c_\mathrm{W}}(T^3-Qs^2_\mathrm{W})Z_\mu\right]u'_{i\mathrm{L}}+\frac{g}{\sqrt{2}}W^+_\mu d'_{i\mathrm{L}}\\ \frac{g}{\sqrt{2}}W^-_\mu u'_{i\mathrm{L}}+\left[QeA_\mu+\frac{g}{c_\mathrm{W}}(T^3-Qs^2_\mathrm{W})Z_\mu\right]d'_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}$$

$\bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL}$ 中的电弱规范相互作用项

🏥 于是，$\bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL}$ 包含的**电弱规范相互作用项**为

$$
\begin{aligned}
\bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL} \supset & -\left[QeA_\mu + \frac{g}{c_W}(T^3 - Qs_W^2)Z_\mu\right] \bar{u}'_{iL}\gamma^\mu u'_{iL} \\
& -\left[QeA_\mu + \frac{g}{c_W}(T^3 - Qs_W^2)Z_\mu\right] \bar{d}'_{iL}\gamma^\mu d'_{iL} \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_{iL}\gamma^\mu d'_{iL} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}'_{iL}\gamma^\mu u'_{iL} \\
= & -\left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu\right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_i \\
& -\left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu\right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d_i \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i
\end{aligned}
$$

🍸 其中**左手耦合系数**为

$$\boxed{g_L \equiv T^3 - Qs_W^2}$$

$\bar{u}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}u'_{i\mathrm{R}} + \bar{d}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}d'_{i\mathrm{R}}$ 中的电弱规范相互作用项

另一方面，

$$\begin{aligned} D_\mu d'_{i\mathrm{R}} &= (\partial_\mu + \mathrm{i}g' B_\mu Y)d'_{i\mathrm{R}} = \partial_\mu d'_{i\mathrm{R}} + \mathrm{i}g' Q(c_\mathrm{W} A_\mu - s_\mathrm{W} Z_\mu)d'_{i\mathrm{R}} \\ &= \partial_\mu d'_{i\mathrm{R}} + \mathrm{i}QeA_\mu d'_{i\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{i}g}{c_\mathrm{W}} Q s_\mathrm{W}^2 Z_\mu d'_{i\mathrm{R}} \end{aligned}$$

则 $\bar{u}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}u'_{i\mathrm{R}} + \bar{d}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}d'_{i\mathrm{R}}$ 包含的**电弱规范相互作用项**为

$$\begin{aligned} &\bar{u}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}u'_{i\mathrm{R}} + \bar{d}'_{i\mathrm{R}}\mathrm{i}\not{D}d'_{i\mathrm{R}} \\ \supset & -\left(QeA_\mu - \frac{g}{c_\mathrm{W}} Q s_\mathrm{W}^2 Z_\mu\right)\bar{u}'_{i\mathrm{R}}\gamma^\mu u'_{i\mathrm{R}} - \left(QeA_\mu - \frac{g}{c_\mathrm{W}} Q s_\mathrm{W}^2 Z_\mu\right)\bar{d}'_{i\mathrm{R}}\gamma^\mu d'_{i\mathrm{R}} \\ = & -\left(QeA_\mu + \frac{g}{c_\mathrm{W}} g_\mathrm{R} Z_\mu\right)\bar{u}_i\gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} u_i - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_\mathrm{W}} g_\mathrm{R} Z_\mu\right)\bar{d}_i\gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} d_i \end{aligned}$$

其中**右手耦合系数**为

$$\boxed{g_\mathrm{R} \equiv -Q s_\mathrm{W}^2}$$

费米子的电弱规范相互作用

- 引入**矢量流**和**轴矢量流**耦合系数

$$\boxed{g_{\mathrm{V}} \equiv g_{\mathrm{L}} + g_{\mathrm{R}} = T^3 - 2Qs_{\mathrm{W}}^2, \quad g_{\mathrm{A}} \equiv g_{\mathrm{L}} - g_{\mathrm{R}} = T^3}$$

- 将以上**夸克电弱规范相互作用项**改写为

$$\begin{aligned}
&\bar{Q}_{i\mathrm{L}} \mathrm{i}\not{D} Q_{i\mathrm{L}} + \bar{u}'_{i\mathrm{R}} \mathrm{i}\not{D} u'_{i\mathrm{R}} + \bar{d}'_{i\mathrm{R}} \mathrm{i}\not{D} d'_{i\mathrm{R}} \\
\supset\ & -Qe\bar{u}_i\gamma^\mu u_i A_\mu - Qe\bar{d}_i\gamma^\mu d_i A_\mu - \frac{g}{2c_{\mathrm{W}}}\bar{u}_i\gamma^\mu(g_{\mathrm{V}} - g_{\mathrm{A}}\gamma^5)u_i Z_\mu \\
& - \frac{g}{2c_{\mathrm{W}}}\bar{d}_i\gamma^\mu(g_{\mathrm{V}} - g_{\mathrm{A}}\gamma^5)d_i Z_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{u}_i\gamma^\mu P_{\mathrm{L}} V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{d}_j V_{ji}^\dagger\gamma^\mu P_{\mathrm{L}} u_i
\end{aligned}$$

- 同理，$\bar{L}_{i\mathrm{L}} \mathrm{i}\not{D} L_{i\mathrm{L}} + \bar{\ell}_{i\mathrm{R}} \mathrm{i}\not{D} \ell_{i\mathrm{R}}$ 包含的**轻子电弱规范相互作用项**为

$$\begin{aligned}
&\bar{L}_{i\mathrm{L}} \mathrm{i}\not{D} L_{i\mathrm{L}} + \bar{\ell}_{i\mathrm{R}} \mathrm{i}\not{D} \ell_{i\mathrm{R}} \\
\supset\ & -Qe\bar{\ell}_i\gamma^\mu \ell_i A_\mu - \frac{g}{2c_{\mathrm{W}}}\bar{\ell}_i\gamma^\mu(g_{\mathrm{V}} - g_{\mathrm{A}}\gamma^5)\ell_i Z_\mu - \frac{g}{2c_{\mathrm{W}}}\bar{\nu}_i\gamma^\mu(g_{\mathrm{V}} - g_{\mathrm{A}}\gamma^5)\nu_i Z_\mu \\
& - \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{\nu}_i\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\ell_i - \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{\ell}_i\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\nu_i
\end{aligned}$$

费米子的电弱流耦合

将这些电弱规范相互作用项写成**流耦合**的形式，得

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EWF}} \supset -A_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}} - Z_\mu J^\mu_Z - W^+_\mu J^{+,\mu}_{\mathrm{W}} - W^-_\mu J^{-,\mu}_{\mathrm{W}}$$

电磁流 $J^\mu_{\mathrm{EM}} \equiv \sum_f Q_f e \bar{f}\gamma^\mu f$，其中 f 代表任意费米子场（质量本征态）

弱中性流 $J^\mu_Z \equiv \dfrac{g}{2c_{\mathrm{W}}} \sum_f \bar{f}\gamma^\mu (g^f_{\mathrm{V}} - g^f_{\mathrm{A}}\gamma^5) f$, $\quad g^f_{\mathrm{V}} = T^3_f - 2Q_f s^2_{\mathrm{W}}, \quad g^f_{\mathrm{A}} = T^3_f$

弱带电流 $J^{+,\mu}_{\mathrm{W}} \equiv \dfrac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}_i\gamma^\mu V_{ij} P_{\mathrm{L}} d_j + \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_{\mathrm{L}} \ell_i)$

弱带电流 $J^{-,\mu}_{\mathrm{W}} \equiv (J^{+,\mu}_{\mathrm{W}})^\dagger = \dfrac{g}{\sqrt{2}}(\bar{d}_j V^\dagger_{ji} \gamma^\mu P_{\mathrm{L}} u_i + \bar{\ell}_i \gamma^\mu P_{\mathrm{L}} \nu_i)$

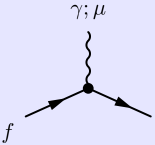
不同代夸克间相互作用只发生在**弱带电流耦合**中，源自 **CKM 矩阵** V 的非对角元

可以看到，**电磁流耦合**与 **QED 耦合**完全相同

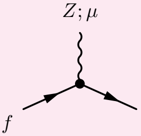
由此辨认出 A_μ 是**电磁场**，e 是单位电荷量，$Q = T^3 + Y$ 确实是电荷

为了保持电荷守恒，指定**复矢量场** $W^+_\mu(x)$ 携带 $Q = +1$ 的电荷

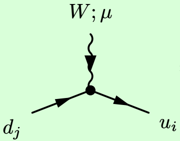
费米子电弱规范相互作用的顶点规则



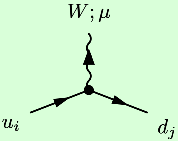
$$= -\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$$



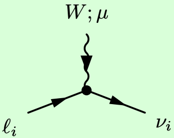
$$= -\frac{\mathrm{i}g}{2c_\mathrm{W}}\gamma^\mu(g_\mathrm{V}^f - g_\mathrm{A}^f\gamma^5)$$



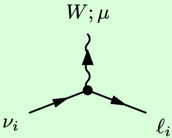
$$= -\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}V_{ij}\gamma^\mu P_\mathrm{L}$$



$$= -\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}V_{ji}^\dagger\gamma^\mu P_\mathrm{L}$$



$$= -\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu P_\mathrm{L}$$



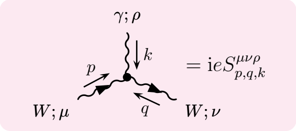
$$= -\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu P_\mathrm{L}$$

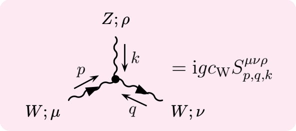
电弱规范玻色子的自相互作用

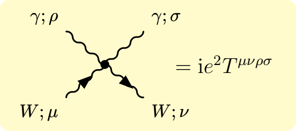
电弱规范场自身的 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 规范不变拉氏量为

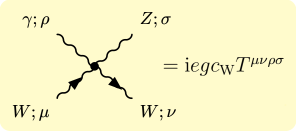
$$\mathcal{L}_{\mathrm{EWG}} = -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

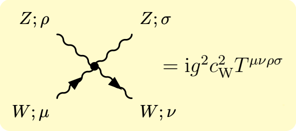
场强张量 $W^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\varepsilon^{abc} W^b_\mu W^c_\nu$，$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

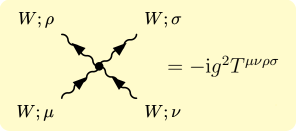












图中 $S^{\mu\nu\rho}_{p,q,k} \equiv g^{\mu\nu}(p-q)^\rho + g^{\nu\rho}(q-k)^\mu + g^{\rho\mu}(k-p)^\nu$

$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$

CKM 矩阵

概率守恒要求 CKM 矩阵 V 是幺正矩阵，标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

其中 $s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$，$c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$，拟合实验数据得到

$$s_{12} = 0.22501 \pm 0.00068, \qquad s_{23} = 0.04183^{+0.00079}_{-0.00069}$$

$$s_{13} = 0.003732^{+0.000090}_{-0.000085}, \qquad \delta = 1.147 \pm 0.026$$

V 包含 3 个转动角 $\theta_{12} \simeq 13^\circ$，$\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$，$\theta_{13} \simeq 0.21^\circ$，

1 个引起 CP 破坏的相角 $\delta \simeq 66^\circ$

夸克味混合

如果只讨论第一、二代夸克的混合，CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C & \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

θ_C 称为 **Cabibbo 角**，满足 $\sin\theta_C = s_{12} = 0.225$

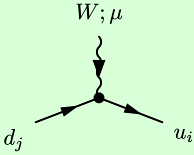
CKM 矩阵的非对角元非零意味着弱带电流可以耦合不同代的夸克，这是夸克味混合现象

$W^+ \to u'\bar{d}'$ 过程在质量态上表现为

$$W^+ \to u\bar{d}\ (V_{11}\ 引起)$$

$$W^+ \to u\bar{s}\ (V_{12}\ 引起)$$

$$W^+ \to u\bar{b}\ (V_{13}\ 引起)$$



$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ij}\gamma^\mu P_L$$

超出标准模型：中微子味混合

中微子振荡实验表明，中微子具有**微小质量**，而且存在**味混合**

Dirac 中微子的味本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 **Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵 U** 联系：

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\delta}}\\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23}-\bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}-\bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13}\\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}-\bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23}-\bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13}\end{pmatrix}$$

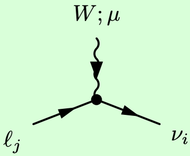
$\bar{\theta}_{12}\sim 33^\circ$，$\bar{\theta}_{23}\sim 41^\circ$（质量正序）或 $\bar{\theta}_{23}\sim 50^\circ$（质量逆序），$\bar{\theta}_{13}\sim 8.4^\circ$

如果中微子是 **Majorana 费米子**，则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ρ 和 σ，PMNS 矩阵应该再右乘 $\mathrm{diag}(1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma})$

太阳中微子振荡 $\bar{\theta}_{12}$

大气中微子振荡 $\bar{\theta}_{23}$

反应堆中微子振荡 $\bar{\theta}_{13}$



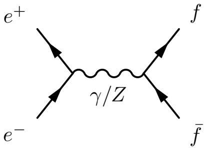
$$= -\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}U_{ij}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}$$

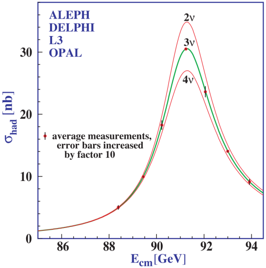
e^+e^- 湮灭

🚓 通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

🚀 $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的**共振峰**

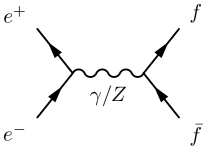


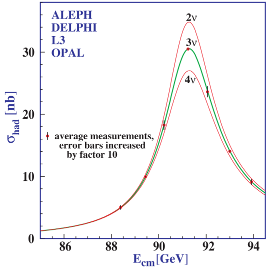


e^+e^- 湮灭

通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$





$\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的**共振峰**

受共振态和弱中性流影响较小时，

截面比 $R = \dfrac{\sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$ 体现

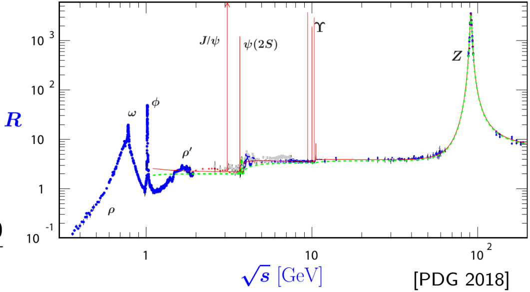
夸克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

$1\ \text{GeV} \le \sqrt{s} \le 3.6\ \text{GeV}$ 处，

$$R \simeq 3\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = 2$$

$3.7\ \text{GeV} \le \sqrt{s} \le 10\ \text{GeV}$ 处，

$$R \simeq 3\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{10}{3}$$



[PDG 2018]

β 衰变

- 弱相互作用引起**原子核 β 衰变**
- 质量数为 $A = Z + N$ 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子，通过 β 衰变会变成具有 $Z+1$ 个质子和 $N-1$ 个中子的原子核 A'，即

$$A(Z,N) \to A'(Z+1,N-1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

- 在**核子**层次，以上过程体现为**中子 β 衰变**，

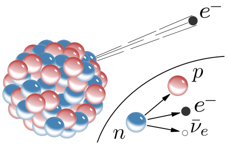
$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

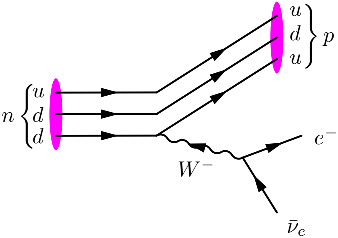
- 在**夸克**层次，以上过程体现为 **d 夸克 β 衰变**

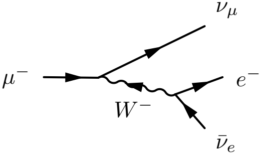
$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$$

- 此过程来自 W^- 玻色子传递的**弱带电流**相互作用
- 在**轻子**方面，类似的过程有 **μ 子衰变**

$$\mu^- \to \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$







μ 子衰变

考虑 μ **子衰变过程** $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$，相应的领头阶不变振幅为

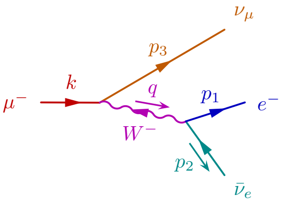
$$i\mathcal{M} = \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p_3)\gamma^\mu P_\mathrm{L} u(k) \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}(p_1)\gamma^\nu P_\mathrm{L} v(p_2)$$

$$= \frac{ig^2(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{8(q^2 - m_W^2)} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu(1-\gamma^5)v(p_2)$$

由于 $m_\mu \ll m_W$，W **传播子**的**四维动量**满足 $q^2 \ll m_W^2$

因此，可在**低能近似**下**忽略** q^μ 和 q^2，将振幅化为

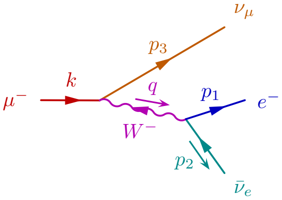
$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{ig^2}{8m_W^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2)$$



μ 子衰变

考虑 μ **子衰变过程** $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$，相应的领头阶不变振幅为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M} &= \left(\frac{-\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p_3)\gamma^\mu P_\mathrm{L} u(k)\, \frac{-\mathrm{i}(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{q^2 - m_W^2}\, \bar{u}(p_1)\gamma^\nu P_\mathrm{L} v(p_2) \\
&= \frac{\mathrm{i}g^2(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{8(q^2 - m_W^2)}\, \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu(1-\gamma^5)v(p_2)
\end{aligned}
$$



由于 $m_\mu \ll m_W$，W **传播子**的**四维动量**满足 $q^2 \ll m_W^2$

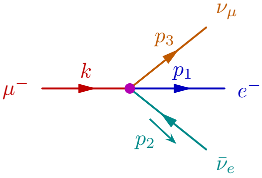
因此，可在**低能近似**下**忽略** q^μ 和 q^2，将振幅化为

$$
\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\frac{\mathrm{i}g^2}{8m_W^2}\, \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2)
$$

可以将这样的振幅看作**有效拉氏量**

$$
\mathcal{L}_\mathrm{eff} = -\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}\, \bar{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma^5)\mu\, \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_e + \mathrm{H.c.}
$$

的结果，其中 **Fermi 常数** G_F 定义为 $\boxed{\dfrac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \equiv \dfrac{g^2}{8m_W^2}}$



四费米子相互作用理论

🚎 可进一步将 $\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\bar{\mu}\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_e + \text{H.c.}$

推广到其它参与弱相互作用的标准模型费米子

🐆 耦合常数 G_{F} 是普适的，对所有费米子都适用

🐅 这样得到的理论称为四费米子相互作用理论

🌺 为了解释 β 衰变，**Enrico Fermi** 于 1933 年首次提出这个理论

🍄 现在认为它是标准模型弱相互作用的低能有效理论

Enrico Fermi (1901–1954)

四费米子相互作用理论

🚎 可进一步将 $\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma^5)\mu\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_e + \text{H.c.}$

推广到其它参与弱相互作用的标准模型费米子

🐆 耦合常数 G_{F} 是普适的，对所有费米子都适用

🐅 这样得到的理论称为四费米子相互作用理论

🌺 为了解释 β 衰变，**Enrico Fermi** 于 1933 年首次提出这个理论

🍄 现在认为它是标准模型弱相互作用的低能有效理论

Enrico Fermi (1901–1954)

🦌 忽略电子质量，通过以上振幅计算出 μ 子寿命为 $\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} \simeq \frac{192\pi^3}{G_{\text{F}}^2 m_\mu^5}$

🦓 根据更精确的结果，由 $\tau_\mu = 2.197\times10^{-6}$ s 推出 $G_{\text{F}} = 1.166\times10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}$

🦒 注意到 $m_W = gv/2$，Fermi 常数 G_{F} 与 **Higgs 场真空期待值** v 的关系为

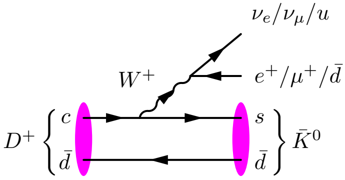
$$G_{\text{F}} = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2} = \frac{\sqrt{2}g^2}{2g^2v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}, \qquad \boxed{v = (\sqrt{2}G_{\text{F}})^{-1/2} = 246.2\ \text{GeV}}$$

介子弱衰变

- 弱带电流相互作用也会引起介子衰变
- $D^+(c\bar{d})$ 衰变到 $\bar{K}^0$ 和轻子或夸克（介子）

$$D^+ \to \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$

- D^+ 中 $\bar{d}$ 夸克实际没参与衰变，称为**旁观者**

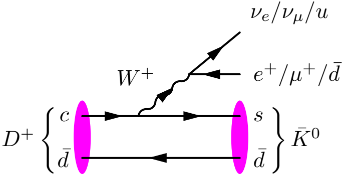


介子弱衰变

弱带电流相互作用也会引起介子衰变

$D^+(c\bar{d})$ 衰变到 $\bar{K}^0$ 和轻子或夸克（介子）

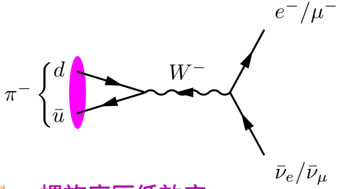
$$D^+ \to \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 $\bar{d}$ 夸克实际没参与衰变，称为**旁观者**

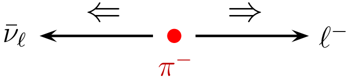
$\pi^-(\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

$$\pi^- \to e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



π^- 静止系中，**角动量守恒**要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同，但弱带电流只耦合左旋正费米子和右旋反费米子，需要由**质量翻转螺旋度** **螺旋度压低效应**

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2\times 10^{-5}$$



$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%，$\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%