粒子物理简介

第四节　量子电动力学

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

2021 年 9 月

U(1) 整体对称性

时空坐标的函数称为**场**。在**量子场论**中，场被量子化，而**粒子**是场的激发态，粒子间相互作用来源于各种场之间的相互作用。场的运动规律由**最小作用量原理**决定，作用量 $S=\int d^4x\,\mathcal{L}(x)$，其中拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是用场表达出来的。

对于**不参与相互作用**的**狄拉克旋量场** $\psi(x)$，运动规律可以用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x)=\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)-m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

描述，其中狄拉克矩阵 γ^{μ} 是满足 $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu}$ 的 4×4 常数矩阵，时空导数 $\partial_{\mu}\equiv\partial/\partial x^{\mu}$，$m$ 为相应**费米子**的质量，$\bar{\psi}\equiv\psi^{\dagger}\gamma^{0}$。对 ψ 作 **U(1) 整体变换**

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{\mathrm{i}Q\theta}\psi(x),$$

（**整体**指变换参数 θ **不是**时空坐标的函数），则 $\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{-\mathrm{i}Q\theta}$，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}}(x)\to\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) &= \bar{\psi}'(x)(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi'(x)\\ &= \bar{\psi}(x)e^{-\mathrm{i}Q\theta}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)e^{\mathrm{i}Q\theta}\psi(x)=\mathcal{L}_{\text{free}}(x)\end{aligned}$$

可见，自由狄拉克旋量场的拉氏量具有 **U(1) 整体对称性**

根据**诺特定理**，U(1) 群的荷（生成元）Q 是**守恒**的

U(1) 规范对称性

- 若变换参数 θ 是**时空坐标的函数**，则上述变换变成局域的 U(1) **规范变换**

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{iQ\theta(x)}\psi(x)$$

- 从而 $\partial_\mu\psi'(x)=e^{iQ\theta(x)}[\partial_\mu+iQ\partial_\mu\theta(x)]\psi(x)$ 导致 $\mathcal{L}'_{\text{free}}(x)\neq\mathcal{L}_{\text{free}}(x)$
- 为了重新得到对称性，引入**规范场** $A_\mu(x)$，令它的 U(1) **规范变换**为

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x),$$

以此补偿变换参数 $\theta(x)$ 的时空导数引起的差异

- 将拉氏量修改为 $\mathcal{L}(x)=\bar\psi(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x)-m\bar\psi(x)\psi(x)$，其中**协变导数**的定义是 $D_\mu\equiv\partial_\mu+iQeA_\mu(x)$，就可以得到 $\mathcal{L}'(x)=\mathcal{L}(x)$
- 因此 $\mathcal{L}(x)$ 具有 U(1) **规范对称性**，描述 U(1) **规范理论**
- 代价是拉氏量中多了一项 $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)=\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}_{\text{free}}(x)=-QeA_\mu(x)\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$
- 此项将旋量场 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu(x)$ 耦合起来，**耦合常数**为 e
- 规范场 $A_\mu(x)$ 是洛伦兹矢量，对应的粒子称为**规范玻色子**，自旋为 1
- $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 导致费米子与规范玻色子发生**规范相互作用**

量子电动力学

量子电动力学（Quantum Electrodynamics）简称 **QED**，是 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ **规范理论**，规范玻色子为**光子**，描述**电磁相互作用**，相应拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} &= \sum_f (\bar{f} \mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu f - m_f \bar{f} f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \sum_f \left[\bar{f}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - Q_f e A_\mu \bar{f}\gamma^\mu f\right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

- 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu$，**电磁耦合常数** e 就是单位电荷量
- f 代表标准模型中各种带电的旋量场，Q_f 为 f 所带**电荷**量子数，m_f 是 f 的质量，$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 中 $\bar{f}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f$ **项**描述旋量场在时空中传播的过程
- **电磁场** A_μ 的**场强张量**定义为 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$；可以验证，$-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ **项**在 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ 规范变换下不变，它描述电磁场在时空中传播的过程
- $-Q_f e A_\mu \bar{f}\gamma^\mu f$ **项**描述旋量场与电磁场的电磁相互作用

费米子 f	上型夸克 u, c, t	下型夸克 d, s, b	带电轻子 e^-, μ^-, τ^-
电荷 Q_f	$+2/3$	$-1/3$	-1

旋量系数和极化矢量

- $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 中 $\bar{f}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ **项**与自由旋量场拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ 形式相同，描述远离相互作用顶点的费米子；根据**最小作用量原理**，此项对应于**狄拉克方程**

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f(x) = 0$$

- 经过傅立叶变换之后，动量空间中的旋量系数 $u(p,\lambda)$ 和 $v(p,\lambda)$ 满足

$$(\not{p} - m_f)u(p,\lambda) = 0, \quad (\not{p} + m_f)v(p,\lambda) = 0, \quad \not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$$

- $\lambda = \pm 1$ 称为**螺旋度**，是自旋在动量方向上的投影被归一化后的值
- $\lambda = +1\ (-1)$ 对应于右旋（左旋）极化的费米子，螺旋度求和关系为

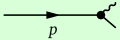
$$\sum_{\lambda=\pm 1} u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \not{p} + m_f, \quad \sum_{\lambda=\pm 1} v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda) = \not{p} - m_f$$

- $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 中 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ **项**描述远离相互作用顶点时的光子
- 在动量空间中用**极化矢量** $\varepsilon_\mu(p,\lambda)$ 描写光子的运动，光子的螺旋度可取 $\lambda = \pm 1$
- $\lambda = +1\ (-1)$ 对应于右旋（左旋）极化的光子，螺旋度求和关系为

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon_\mu(p,\lambda)\varepsilon_\nu^*(p,\lambda) \to -g_{\mu\nu}$$

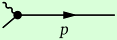
QED 费曼规则

🐄 $\bar{f}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ 项和 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项分别提供费米子与光子的**初末态**和**传播子**的费曼规则，而 $-Q_f e A_\mu \bar{f}\gamma^\mu f$ 项提供**电磁相互作用顶点**的费曼规则



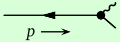
$= u(p,\lambda)$

正费米子初态



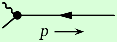
$= \bar{u}(p,\lambda)$

正费米子末态



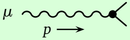
$= \bar{v}(p,\lambda)$

反费米子初态



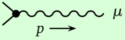
$= v(p,\lambda)$

反费米子末态



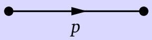
$= \varepsilon_\mu(p,\lambda)$

光子初态



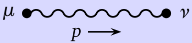
$= \varepsilon^*_\mu(p,\lambda)$

光子末态



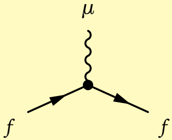
$$= \frac{\mathrm{i}(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

费米子传播子



$$= \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

光子传播子



$$= -\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$$

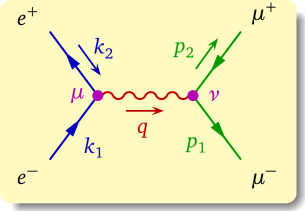
电磁相互作用顶点

🌊 光子用**波浪线**表示

⛲ 费米子用**带箭头的实线**表示，线上的箭头方向是费米子数的方向；正粒子的动量方向与费米子数方向**相同**，反粒子则**相反**

$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 散射振幅

右图为 QED 散射过程 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的领头阶费曼图，利用费曼规则将它表达成**不变振幅**



$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= \bar{v}(k_2,\lambda_2)(ie\gamma^\mu)u(k_1,\lambda_1)\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\\
&\quad\times\bar{u}(p_1,\lambda_1')(ie\gamma^\nu)v(p_2,\lambda_2')
\end{aligned}
$$

通常考虑没有极化的初态，需对初态螺旋度**取平均**，即 $\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2}$；对末态螺旋度则通过**求和**包括所有情况，即 $\sum_{\lambda_1'}\sum_{\lambda_2'}$。因而**非极化振幅模方**为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}\Big[\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)\bar{u}(k_1,\lambda_1)\gamma^\rho v(k_2,\lambda_2)\\
&\qquad\times\bar{u}(p_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(p_2,\lambda_2')\bar{v}(p_2,\lambda_2')\gamma_\rho u(p_1,\lambda_1')\Big]\\
&= \frac{e^4}{4q^4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\rho\right]\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\rho\right]
\end{aligned}
$$

每个电磁相互作用顶点贡献一个耦合常数 e，故 $\mathcal{M}\propto e^2$，$|\mathcal{M}|^2\propto e^4$

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面

对狄拉克矩阵乘积作求迹运算，得

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)+(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)+m_e^2(p_1\cdot p_2)+m_\mu^2(k_1\cdot k_2)+2m_e^2m_\mu^2]$$

在质心系中，设 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的夹角为 θ，则 $\mathbf{p}_2$ 与 $\mathbf{k}_2$ 的夹角也为 θ，有

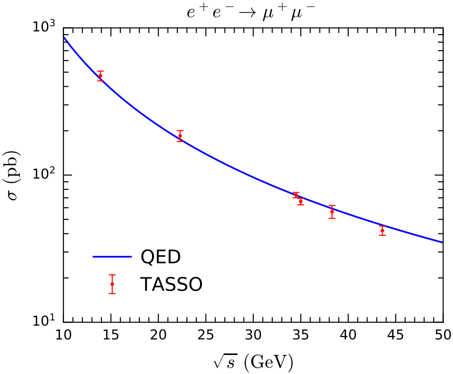
$$q^2 = (k_1+k_2)^2 = (p_1+p_2)^2 = s, \quad k_1\cdot k_2 = \frac{s}{2} - 2m_e^2, \quad p_1\cdot p_2 = \frac{s}{2} - 2m_\mu^2,$$
$$k_1\cdot p_1 = k_2\cdot p_2 = \frac{s}{4}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta), \quad k_1\cdot p_2 = k_2\cdot p_1 = \frac{s}{4}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta),$$

其中 $\beta_e \equiv \sqrt{1-4m_e^2/s}$，$\beta_\mu \equiv \sqrt{1-4m_\mu^2/s}$。从而，散射截面为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2E_\mathcal{A}2E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A}-\mathbf{v}_\mathcal{B}|}\int d\Omega_1 \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\mathrm{CM}}}\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\alpha^2\beta_\mu}{4s\beta_e}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{s}\right] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3s\beta_e}\left(1+\frac{2m_e^2}{s}\right)\left(1+\frac{2m_\mu^2}{s}\right)\end{aligned}$$

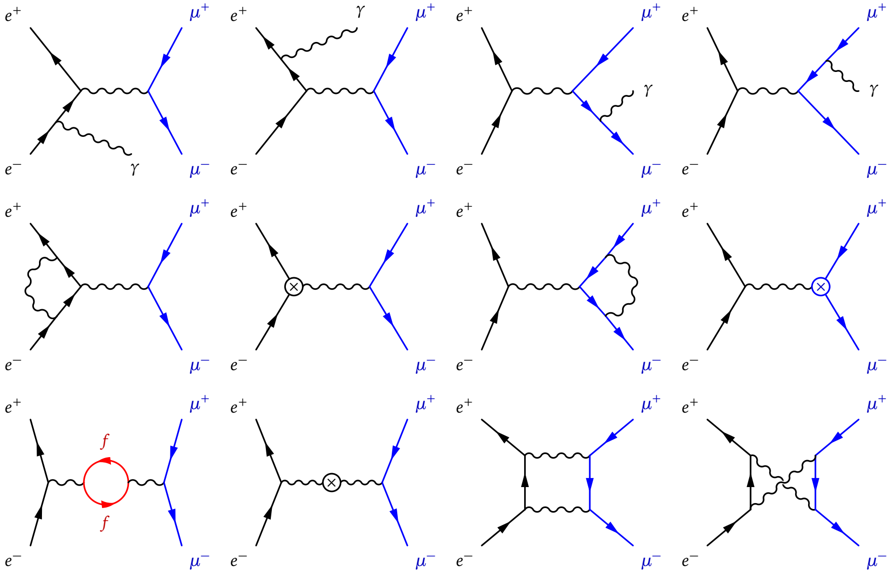
与实验数据对比

将 $\alpha = 1/137.036$、$m_\mu = 105.658$ MeV、$m_e = 0.510999$ MeV 代入以上公式，得到 **QED 领头阶**预言的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面



1988 年，德国 DESY 研究中心 PETRA 对撞机上的 **TASSO 探测器**测量了多个**质心能** $\sqrt{s}$ 处的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面数据，与 QED 预言比较**符合**

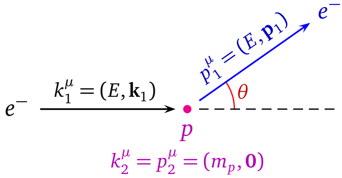
$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程 QED 次领头阶费曼图



ep 库仑散射

在**非相对论性**的**经典物理学**中，假设质子在散射前后都是**静止**的，则初末态电子的运动速率相同，记为 v，运动方向相差**散射角** θ，那么，库仑力引起的微分散射截面为

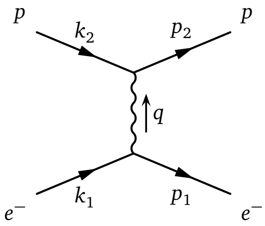
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \quad \textbf{(Rutherford 公式)}$$



质子静止系

QED 理论会修正这条公式

当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的**点粒子**一样，此时可以用旋量场描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点



QED 领头阶给出的非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2}\left[(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_2) + (k_1\cdot k_2)(p_1\cdot p_2) - m_p^2(k_1\cdot p_1) - m_e^2(p_2\cdot k_2) + 2m_e^2 m_p^2\right]$$

Mott 公式

🌒 在质子静止系中，初末态电子的能量相等，记为 E，初末态电子的动量大小也相等，记为 $Q\equiv|\mathbf{k}_1|=|\mathbf{p}_1|=\sqrt{E^2-m_e^2}$，初末态电子的运动速率为 $v=Q/E=\sqrt{1-m_e^2/E^2}$

🌔 故 $k_1\cdot p_1=E^2(1-v^2\cos\theta)$，$k_2\cdot p_2=m_p^2$

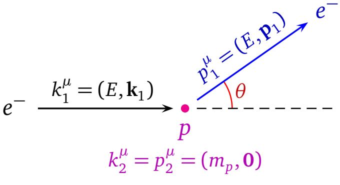
$$k_1\cdot p_2=p_1\cdot k_2=k_1\cdot k_2=p_1\cdot p_2=m_pE$$

$$q^2=-2Q^2(1-\cos\theta)$$

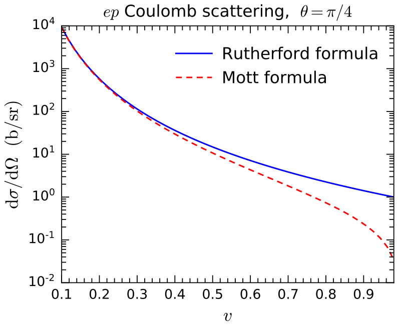
🌕 由此得到 **QED 领头阶**微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2[1-v^2\sin^2(\theta/2)]}{4v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\quad \textbf{(Mott 公式)}$$

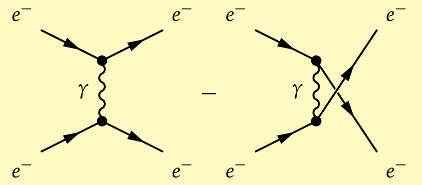
✨ 在**非相对论极限**下，$v\ll1$，$Q\simeq m_ev$，Mott 公式退化为 Rutherford 公式



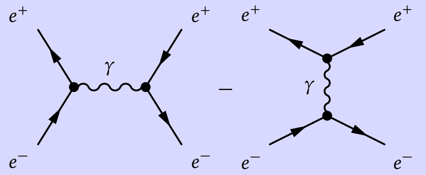
质子静止系



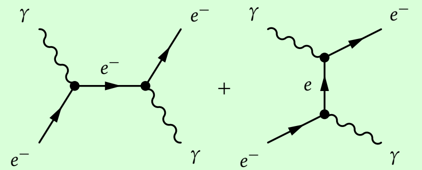
其它 QED 两体散射过程



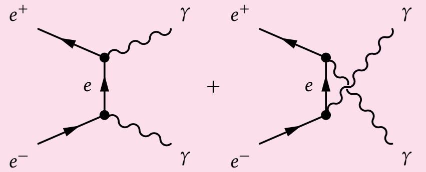
Møller 散射 $e^-e^- \to e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \to e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \to e^-\gamma$



e^+e^- **湮灭到双光子** $e^+e^- \to \gamma\gamma$

- 初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**

Compton 散射

🐮 电子与光子的散射过程 $e^-\gamma\to e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射**

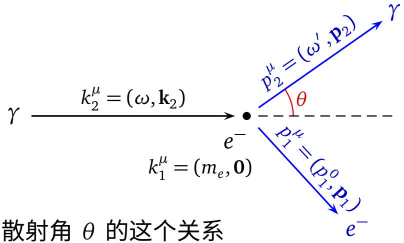
✨ 1923 年，A. H. Compton 发现 X 射线照射核外电子之后波长变长；他用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，核外电子可看作自由的

⭐ 在实验室系中，初态电子静止，初态光子通过散射将能动量传递给末态电子；在自然单位制下，光子的能量 E 等于它的圆频率 ω，即 $E=\hbar\omega=\omega$，而波长 λ 与圆频率的关系为 $\lambda=2\pi c/\omega=2\pi/\omega$

🌙 $$m_e^2=p_1^2=(k_1+k_2-p_2)^2$$
$$=m_e^2+2m_e(\omega-\omega')-2\omega\omega'(1-\cos\theta)$$

👉 $m_e(\omega-\omega')=\omega\omega'(1-\cos\theta)$

👉 $$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\frac{2\pi}{\omega'}-\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{m_e}(1-\cos\theta)$$



☀️ Compton 在实验中证实了波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的这个关系

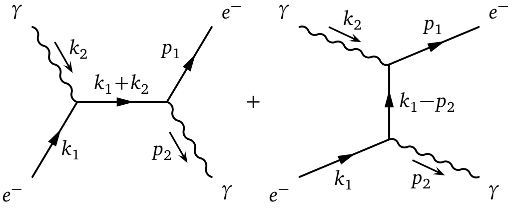
👉 为光的粒子性提供了强有力的支持

Compton 散射截面

🐷 对于低能电磁辐射与电子散射的过程，J. J. Thomson 根据**经典电磁学**推导出微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta)$$

(Thomson 公式)

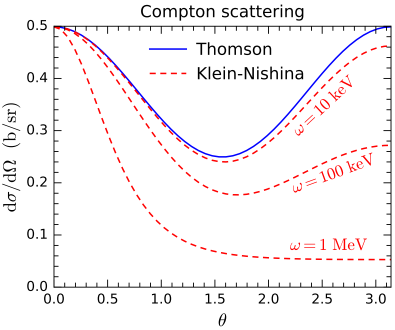


🐻 **QED 领头阶**给出的非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2}+\frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2}+2m_e^2\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2}-\frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)+m_e^4\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2}-\frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)^2\right]$$

👉 $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)$$

(Klein-Nishina 公式)



e^+e^- 湮灭到双光子

对于 $e^+e^- \to \gamma\gamma$，设质心系中某个末态光子与初态电子运动方向的夹角为 θ，**QED 领头阶**给出的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s\beta_e}\left[\frac{1+\beta_e^2\cos^2\theta}{1-\beta_e^2\cos^2\theta} + \frac{8m_e^2}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

1983 年，PETRA 对撞机上的 **JADE 探测器**测量了 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 微分散射截面，与 QED 符合得比较好