

宇宙线相关粒子物理知识

第三节 强子相互作用

余钊焕

中山大学物理学院

<http://yzhxxxzy.github.io>



2019 年 LHAASO 暑期学校
山东大学青岛校区
8 月 18 日至 26 日



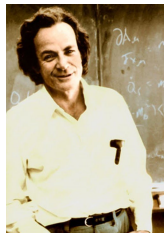
深度非弹性散射与部分子模型

💥 1960 年代末，在高能轻子与核子散射的实验中发现，出现**大动量转移**过程的概率很高，即常常发生**深度非弹性散射**

👉 这意味着核子内部存在**局域的散射中心**，类似于**卢瑟福散射实验**中 α 粒子与原子中局域的原子核发生散射的情况

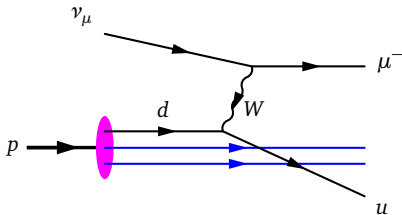
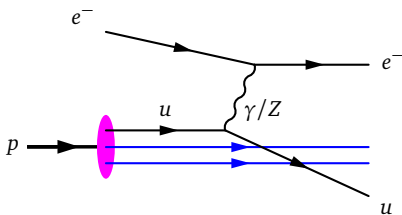
💡 据此，费曼于 1969 年提出**部分子模型**，假设强子由一些在深度非弹性散射中**几乎自由**的**部分子**组成

✨ 进一步实验数据和理论分析表明，有些部分子与夸克具有相同的量子数，它们就是**夸克**；其它部分子是电中性的，后来证实是**胶子**



R. Feynman

(1918-1988)



$e^- + p \rightarrow e^- + X$ 深度非弹性散射

● 动量转移很大时，忽略电子质量，有

$$q^2 = (p_e - p'_e)^2 = 2m_e^2 - 2p_e \cdot p'_e$$

$$\simeq -2E_e E'_e + 2|\mathbf{p}_e||\mathbf{p}'_e| \cos \theta \simeq -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2)$$

● 定义 $Q^2 \equiv -q^2 \geq 0$ ， $Q \equiv \sqrt{Q^2}$ 即**动量转移**

✨ 具有**大动量转移**的散射过程可以探测靶粒子的**微小结构**，尺度 $\Delta x \sim 1/Q$

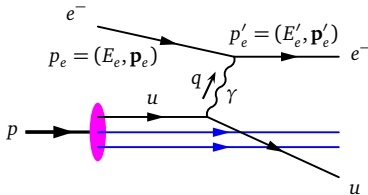
● 在**部分子模型**中， $e^- + p \rightarrow e^- + X$ 单举微分截面表达为

$$\frac{d\sigma}{dy} = \sum_i \int_0^1 \left\{ \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} x s [(1-y)^2 + 1] \right\} Q_i^2 f_{i/p}(x) dx, \quad x = \frac{p_i^\mu}{p_p^\mu}, \quad y = \frac{E_e - E'_e}{E_e}$$

☾ x 是部分子 i 动量占质子 p 动量的**分数**， y 是电子的**非弹性度**

★ 花括号内的因子是 QED 领头阶**电子与单位点电荷的散射截面**

☀ $f_{i/p}(x)$ 称为**部分子分布函数** (parton distribution function, **PDF**)，描述在质子 p 中找到动量分数为 x 的部分子 i 的数量



Bjorken 标度律

💡 从上述公式抽取**结构函数** $F_2(x) = \sum_i Q_i^2 x f_{i/p}(x)$ 来描述**质子的夸克结构**

☀️ $F_2(x)$ 不依赖于 Q^2 , 这个现象称为 **Bjorken 标度律**(scaling)

✨ Bjorken 标度律是**近似的**, 它在 Q^2 变化范围较大时遭到**破坏**

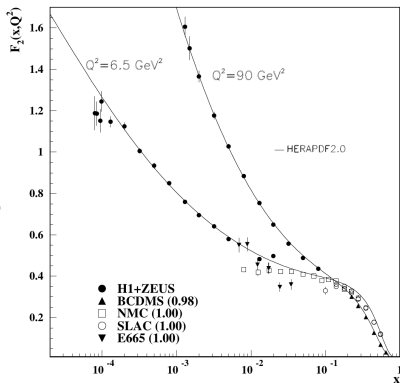
🌑 部分子可以通过 **QCD 耦合** 辐射出更多部分子; Q 越大, 辐射部分子的数量越多

🌑 虚度为 $\mu^2 = p^\mu p_\mu > 0$ 的部分子能够**自由**地参与空间尺度 $\Delta x \sim 1/\mu$ 的散射过程

🌑 μ 是能够**分辨**自由部分子的**因子化能标**, 受到动量转移 Q 的限制, $\mu < Q$

🌑 受 QCD 耦合影响, PDF 实际上依赖于能标 μ , 结构函数依赖于动量转移 Q

$$f_{i/p}(x) \rightarrow f_{i/p}(x, \mu^2), \quad F_2(x) \rightarrow F_2(x, Q^2)$$



[PDG 2018]

部分子分布函数

💥 强子的部分子包括**胶子**和两种来源的夸克

🟡 **价夸克**：构成强子的组分夸克，贡献各种量子数

🟡 **海夸克**：来自**真空极化**，即由胶子分裂而来，正反夸克成对出现

✨ 质子的价夸克为 uud ，反映为

$$\int_0^1 dx [f_{u/p}(x, \mu^2) - f_{\bar{u}/p}(x, \mu^2)] = 2$$

$$\int_0^1 dx [f_{d/p}(x, \mu^2) - f_{\bar{d}/p}(x, \mu^2)] = 1$$

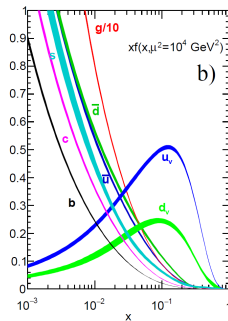
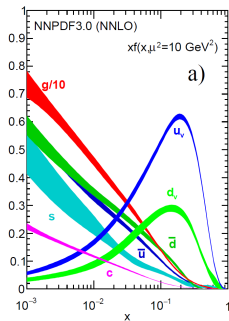
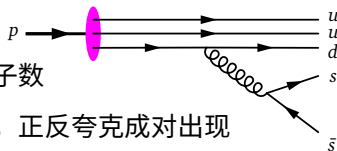
$$f_{s/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{s}/p}(x, \mu^2)$$

$$f_{c/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{c}/p}(x, \mu^2)$$

$$f_{b/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{b}/p}(x, \mu^2)$$


★ **能动量守恒**体现为

$$\int_0^1 dx \sum_i x f_{i/p}(x, \mu^2) = 1, \quad i = g, d, u, s, c, b, \bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}$$



[PDG 2018]

部分子分布函数的演化

 强子 h 中部分子 i 的 **PDF 随能标的演化** 由 Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (**DGLAP**) **方程** 描述

$$\frac{\partial f_{i/h}(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \sum_j P_{i \leftarrow j}(z) f_{j/h}\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right)$$


 在 QCD 领头阶，**分裂函数** $P_{i \leftarrow j}(z)$ 为

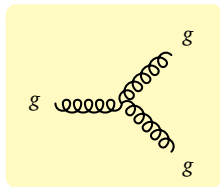
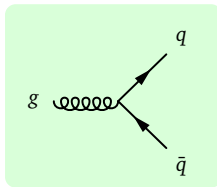
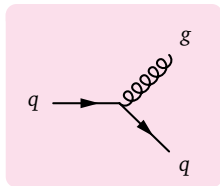
$$P_{q \leftarrow q}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z)$$

$$P_{g \leftarrow q}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+(1-z)^2}{z}$$


$$P_{q \leftarrow g}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$


$$P_{g \leftarrow g}(z) = 6 \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \right] + \left(\frac{11}{2} - \frac{n_f}{3} \right) \delta(1-z)$$


 n_f 是满足 $m_q < \mu$ 的**有效轻夸克味数**



部分子分布函数的确定

 假设 PDF 具有一定的**参数化**形式，用 DGLAP 方程将 PDF **演化**到不同能标以联系多个实验，再对实验数据进行**全局拟合**来确定参数

 各个实验有各自敏感的 x 和 Q^2 范围


 **固定靶**实验的 $\ell^\pm N$ 、 NN 、 νN ($N = p, n$) 深度非弹性散射数据

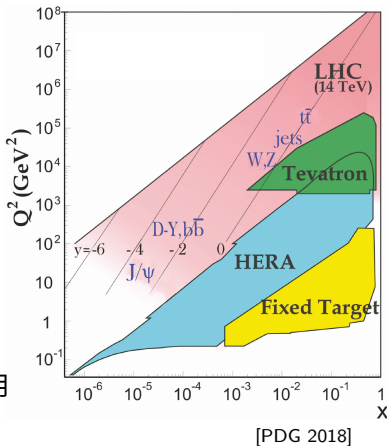
 $e^\pm p$ 对撞机 **HERA** 深度非弹性散射数据

 $p\bar{p}$ 对撞机 **Tevatron** 硬散射数据

 pp 对撞机 **LHC** 硬散射数据

 常用的 PDF 集包括 CT (CTEQ)、MSTW、NNPDF、MMHT、HERAPDF、ABMP、JR 等

 这些 PDF 集可以通过软件包 **LHAPDF** 调用
<https://lhapdf.hepforge.org>



中微子-核子散射

☀ 由于同位旋对称性，质子 p 和中子 n 的 PDF 有一定的联系

$$f_{u/n} = f_{d/p}, \quad f_{d/n} = f_{u/p}, \quad f_{\bar{u}/n} = f_{\bar{d}/p}, \quad f_{\bar{d}/n} = f_{\bar{u}/p}$$

🌙 反强子 PDF 与正强子 PDF 也有关联， $f_{q/\bar{p}} = f_{\bar{q}/p}$, $f_{g/\bar{p}} = f_{g/p}$

🖋 如果固定靶上有等量的质子和中子，设同位旋单态核子 $N = (p + n)/2$ ，则高能中微子带电流打靶过程 $\nu N \rightarrow \ell^- X$ 的微分截面可表达为

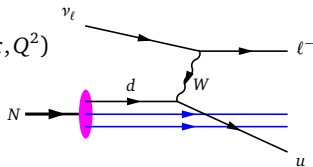
$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{2G_F^2 E_\nu m_N}{\pi} \left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 x [q(x, Q^2) + (1-y)^2 \bar{q}(x, Q^2)]$$

$$q(x, Q^2) = \frac{1}{2} [f_{u/p}(x, Q^2) + f_{d/p}(x, Q^2)] + f_{s/p}(x, Q^2) + f_{b/p}(x, Q^2)$$

$$\bar{q}(x, Q^2) = \frac{1}{2} [f_{\bar{u}/p}(x, Q^2) + f_{\bar{d}/p}(x, Q^2)] + f_{\bar{c}/p}(x, Q^2) + f_{\bar{t}/p}(x, Q^2)$$

★ $q(x, Q^2) \leftrightarrow \bar{q}(x, Q^2)$ 🖐 $\bar{\nu} N \rightarrow \ell^+ X$ 微分截面

✨ 中性流过程 $\nu N \rightarrow \nu X$ 也有类似表达式



中微子深度非弹性散射



中微子深度非弹性散射具有下列特点



在中微子-核子散射过程中，**带电流**截面比**中性流**截面大



弱相互作用**破坏宇称** 🖐️ 当 $E_\nu \lesssim 1 \text{ PeV} = 10^{15} \text{ eV}$ 时，**反中微子**截面偏小



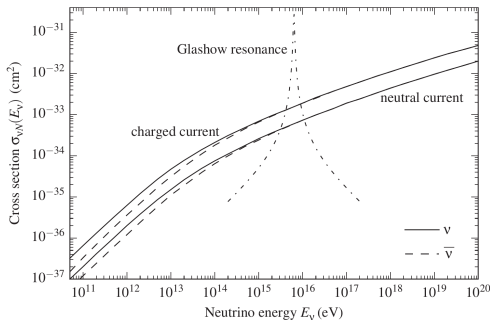
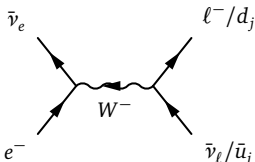
当中微子与**原子**散射时，中微子与**电子**的散射截面通常可以忽略



例外的是，**反电子型中微子** $\bar{\nu}_e$

在 $E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_W^2}{2m_e} \simeq 6.3 \text{ PeV}$ 处通过 W^-

共振峰发生散射 $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow W^- \rightarrow X$ ，
截面**非常大**，这就是**格拉肖共振**



[Gaisser et al., 2016]

强子—强子硬散射



对于**大动量转移**，强子 A 与 B 的 **QCD 硬散射**微分截面可用 PDF 表达为

$$\frac{d\sigma_{\text{hard}}(s)}{d^2p_T} = \int dx_1 dx_2 \sum_{ijkl} \frac{1}{1 + \delta_{kl}} f_{i/A}(x_1, \mu^2) f_{j/B}(x_2, \mu^2) \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})}{d^2p_T}$$

● $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})$ 是部分子散射过程 $ij \rightarrow kl$ 的截面，可通过**微扰 QCD** 计算

● 部分子层面上的质心能为 $\hat{s} = x_1 x_2 s = (p_i + p_j)^2 = (p_k + p_l)^2$

● p_T 是任一末态部分子的**横向动量**， \hat{s} 受到 p_T 的限制， $\hat{s} \geq 4p_T^2$


👉 可以用 p_T 的大小衡量散射过程的**软硬程度**


● 质心能很高时胶子 PDF 很大， $gg \rightarrow gg$ 主导， $\frac{d\hat{\sigma}_{gg \rightarrow gg}(\hat{s})}{d^2p_T} \sim \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{2\pi} \frac{1}{p_T^4}$


● QCD 硬散射截面随 \sqrt{s} 增长的趋势为

$$\sigma_{\text{hard}}(s) \sim \int_{4p_T^2/s}^1 \frac{dx_1}{x_1} x_1^{-\lambda} \int_{4p_T^2/(x_1 s)}^1 \frac{dx_2}{x_2} x_2^{-\lambda} \sim s^\lambda \ln s$$


软过程


 强子相互作用中的**软过程**具有很小的动量转移, $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$

 $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$ 是 α_s 跑到到**无穷大**的低能标度, 因此处理软过程时关于 $\alpha_s(Q^2)$ 的**微扰展开失效**, **非微扰效应**主导


 由于**夸克禁闭**, 软过程中的部分子**不是自由的**


 **可微扰过程**

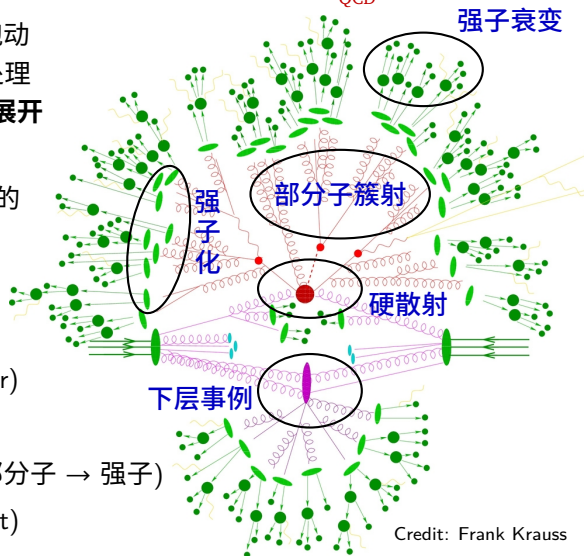
 硬散射 (hard scattering)

 部分子簇射 (parton shower)

 **非微扰软过程**

 强子化 (hadronization, 部分子 \rightarrow 强子)

 下层事例 (underlying event)



Credit: Frank Krauss

碎裂函数

💡 在**单举截面**的因子化微扰计算框架中，**强子化**过程可用普适的**碎裂函数** (fragmentation function) 描述

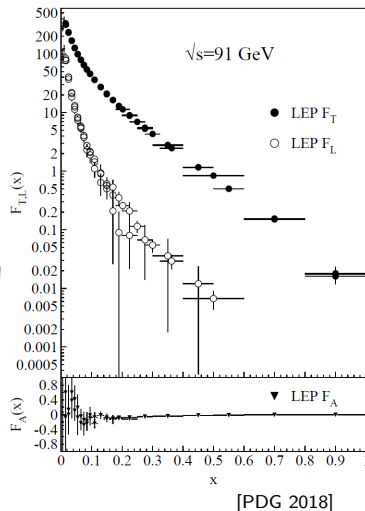
✎ 正负电子对撞过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma/Z \rightarrow h + X$ 中
强子 h 的微分单举截面可以表达为

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx d\cos\theta} = \frac{3}{8} (1 + \cos^2\theta) F_T^h(x, s) + \frac{3}{4} \sin^2\theta F_L^h(x, s) + \frac{3}{4} \cos\theta F_A^h(x, s)$$

🌑 σ_0 是归一化因子， $x = 2E_h/\sqrt{s} \leq 1$ 是 h 的能量分数， θ 是质心系中 h 运动方向与电子束流方向的夹角

🌑 **横向碎裂函数 F_T^h** 和**纵向碎裂函数 F_L^h** 分别对应于 γ/Z 的**横向极化**和**纵向极化**

🌑 **不对称碎裂函数 F_A^h** 描述宇称破坏效应



部分子碎裂函数

上述微分截面对 θ 积分, 就得到**总碎裂函数** $F^h(x, s) = F_T^h(x, s) + F_L^h(x, s)$

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx} = F^h(x, s) = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} C_i \left(z, \alpha_s(\mu^2), \frac{s}{\mu^2} \right) D_i^h \left(\frac{x}{z}, \mu^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)$$

系数函数 C_i 依赖于部分子类型

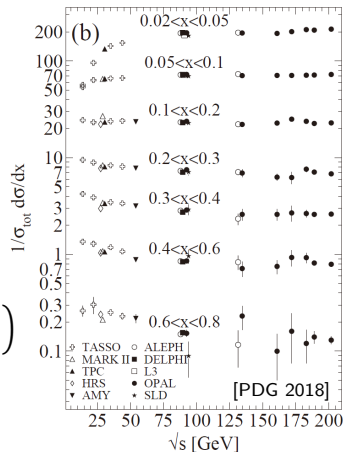
部分子碎裂函数 $D_i^h(z, \mu^2)$ 描述部分子 i 碎裂出具有动量分数 z 的强子 h 的数量

能动量守恒要求 $\int_x^1 dz \sum_h z D_i^h(z, \mu^2) = 1$

$D_i^h(z, \mu^2)$ 的演化由**微扰 QCD** 给出

$$\frac{\partial D_i^h(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \sum_j \int_x^1 \frac{dz}{z} \tilde{P}_{i \leftarrow j}(z, \alpha_s(\mu^2)) D_j^h \left(\frac{x}{z}, \mu^2 \right)$$

在 QCD 领头阶, $\tilde{P}_{i \leftarrow j}(z, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{i \leftarrow j}(z)$



Lund 弦碎裂模型

💡 在蒙特卡罗产生子中，强子化过程通常用一些唯象学模型来描述

🖋️ 蒙特卡罗产生子 **PYTHIA** 采用著名的 **Lund 弦碎裂模型**

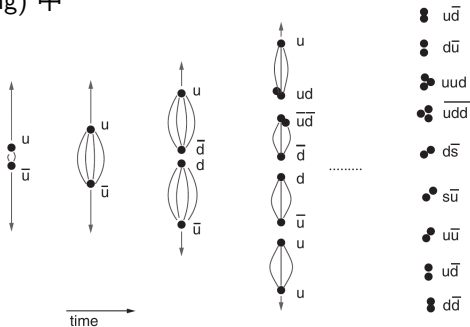
<http://home.thep.lu.se/~torbjorn/Pythia.html>

🌑 假设在高能对撞中产生一对正反夸克，构成色单态系统，认为夸克的动能储存在一根两端连接着它们的弦 (string) 中

🌑 当弦储存的能量密度足够高时，量子涨落导致出现一对正反夸克或双夸克 (diquark)，将弦断开成两根弦

🌑 这些弦持续断裂，直到每根弦储存的能量密度过低，不足以提供进一步的量子涨落

🌑 按照夸克成分和不变质量将每个色单态系统辨识为相应的强子



[Gaisser et al., 2016]

强子—强子散射截面

😞 通过微扰 QCD 理论**不能够**准确地计算强子—强子散射截面

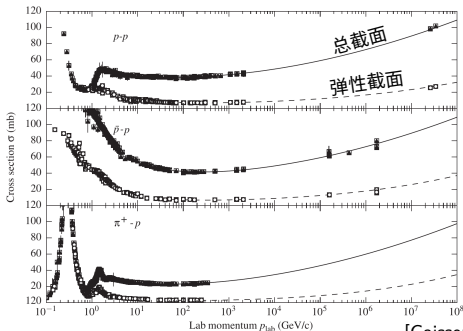
☀️ **加速器**上的截面测量 + **唯象学模型** ➡️ **宇宙线**散射截面

🟡 **粒子产生阈能以下**，如果没有湮灭道，则总截面与弹性截面**相同**

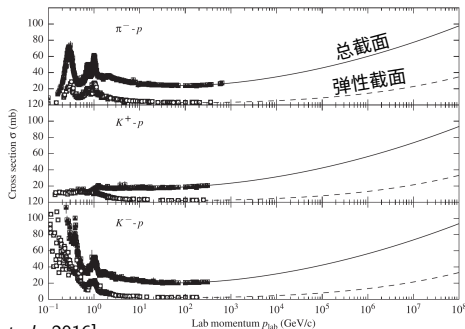
🟡 **粒子产生阈能以上**，非弹性道打开，总截面**大于**弹性截面

🌙 共振区域以上， πp 与 pp 总截面之比 $\sim 2/3$ ，反映价夸克数目差异

✨ 高能处，以 $\ln^2 s$ 关系将截面**外推**



[Gaisser et al., 2016]



弹性截面

💡 弹性散射的**动量转移**可用 Mandelstam 变量 $t = q^2 = -4k^2 \sin^2(\theta/2)$ 衡量

★ k 是质心系中任一粒子三维动量的大小, θ 是质心系中的散射角

🌙 当 $|t|$ 比较小时, **弹性微分截面**近似为

$$\frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} \simeq \frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} \Big|_{t=0} e^{-B_{\text{ela}}(s)|t|}$$

✨ 对撞机能量处**斜率参数** $B_{\text{ela}}(s) \propto \ln s$

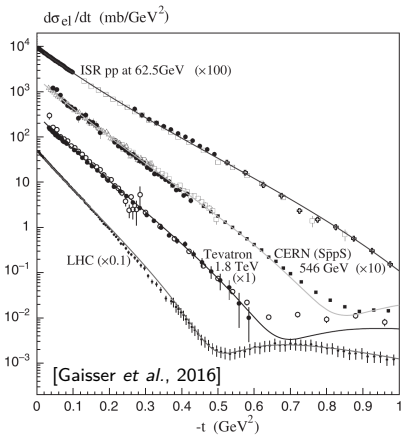
🖋 用**不变振幅** $\mathcal{M}(s, t)$ 表达, 则有

$$\frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} = \frac{1}{64\pi s k^2} |\mathcal{M}(s, t)|^2$$

💡 **忽略自旋影响**, 不变振幅可展开为

$$\mathcal{M}(s, t) = 16\pi \sum_l (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta)$$

☀ $P_l(\cos \theta)$ 是勒让德多项式, $a_l(s)$ 是角动量量子数 l 对应的**分波振幅**



么正性与总截面上限

● 概率守恒意味着散射矩阵具有么正性，应用到弹性散射的分波振幅上，有

$$\left| a_l - \frac{i}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{👉} \quad |\operatorname{Re} a_l| \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \operatorname{Im} a_l \leq 1$$

● 通过么正性还可以推出光学定理，从而给出总截面与向前弹性振幅的关系

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \operatorname{Im} \mathcal{M}(s, t \rightarrow 0) \simeq \frac{1}{s} \operatorname{Im} \mathcal{M}(s, t \rightarrow 0)$$

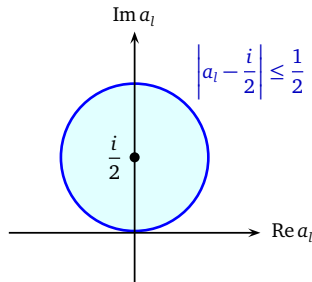
● 分波 l 对总截面的贡献 $\sigma_{\text{tot}}^l \leq \frac{4\pi}{k^2} (2l+1)$

● 由上式推出总截面上限， $\sigma_{\text{tot}} \leq \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}} (2l+1) = \frac{4\pi}{k^2} (l_{\text{max}}+1)^2$

✨ 对于典型截面 $\sigma_{\text{tot}} \sim 50 \text{ mb}$, $k = 100 \text{ GeV}$ 👉 $l_{\text{max}} \gtrsim 320$

LHC 上 $k \simeq \sqrt{s}/2 \sim 6.5 \text{ TeV}$ 👉 $l_{\text{max}} \gtrsim 2 \times 10^4$

☀ 质心能升高时，有贡献的分波数量必定增加，才能满足观测到的强子截面



碰撞参数振幅

💡 当 l_{\max} 很大时, 可以采用**经典极限**, 角动量 $l\hbar \rightarrow kb$, 其中 b 为**碰撞参数**

👉 弹性振幅 $\mathcal{M}(s, t) = 16\pi \sum_l (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta)$

$$\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 16\pi \int_0^\infty dl (2l+1) a(l, s) P_l(\cos \theta) = 4s \int d^2b \tilde{a}(b, s) e^{i\mathbf{q}_T \cdot \mathbf{b}}$$

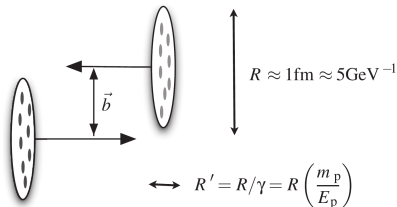
☀ $a(l, s)$ 是分波振幅 $a_l(s)$ 的解析延拓, **碰撞参数振幅** $\tilde{a}(b, s) = a(l, s)|_{l=kb}$

★ 碰撞参数矢量 \mathbf{b} 是横向平面上的矢量, 利用二维傅立叶变换关系, 可得

$$\tilde{a}(b, s) = \frac{1}{4s} \int \frac{d^2q_T}{(2\pi)^2} \mathcal{M}(s, t) e^{-i\mathbf{q}_T \cdot \mathbf{b}}$$

● **弹性截面** $\sigma_{\text{ela}} = 4 \int d^2b |\tilde{a}(b, s)|^2$

● **总截面** $\sigma_{\text{tot}} = 4 \int d^2b \text{Im} \tilde{a}(b, s)$



[Gaisser et al., 2016]

碰撞参数振幅的近似形式

💡 $|t|$ 较小时, 用斜率参数 $B_{\text{ela}}(s)$ 作近似描述, $\frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} = \frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} \Big|_{t=0} e^{-B_{\text{ela}}(s)|t|}$

💡 假设碰撞参数振幅的实部与虚部之比为 ρ , 可以推出

$$\tilde{a}(b, s) = (\rho + i) \frac{\sigma_{\text{tot}}(s)}{8\pi B_{\text{ela}}(s)} \exp\left[-\frac{b^2}{2B_{\text{ela}}(s)}\right]$$

✨ 上式为高斯密度分布, 1σ 半径 $R = \sqrt{B_{\text{ela}}}$, 中心不透明度为 $\sigma_{\text{tot}}/(8\pi B_{\text{ela}})$

● 最大非弹性散射对应于黑盘极限

💡 黑盘半径为 R 时, 碰撞参数振幅的形式为 $\tilde{a}(b, s) = \begin{cases} i/2, & |b| \leq R \\ 0, & |b| > R \end{cases}$

👉 弹性截面 $\sigma_{\text{ela}} = 4 \int d^2b |\tilde{a}|^2 = \pi R^2$, 总截面 $\sigma_{\text{tot}} = 4 \int d^2b \text{Im} \tilde{a} = 2\pi R^2$

👉 非弹性截面由盘的面积给出, $\sigma_{\text{ine}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{ela}} = \pi R^2$

✨ 高能粒子具有波动性, 衍射导致弹性截面等于黑盘面积

Regge 轨道

💡 如果一族强子具有**相同**的价夸克、同位旋和内禀宇称，但价夸克的轨道角动量**不同**，那么，它们的质量 m 与自旋 J 近似满足**经验公式**

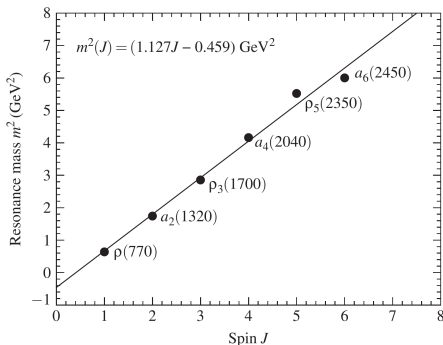
$$m^2(J) \simeq m_0^2 + aJ, \text{ 其中 } m_0 \text{ 和 } a \text{ 为常数}$$

👉 $J = \alpha(m^2) \simeq \frac{m^2 - m_0^2}{a}$, $\alpha(m^2)$ 称为这族强子的 **Regge 轨道** (trajectory)

✨ Regge 轨道 $\alpha(m^2)$ 不一定是 m^2 的线性函数，但线性近似在大多数情况下成立


🌙 在散射过程中交换一个 **Regge 轨道中的所有强子**等价于交换一个具有实数自旋 $\alpha(t) = (t - m_0^2)/a$ 的**准粒子**

☀️ 这样的准粒子称为 **Reggeon**





[Gaisser et al., 2016]

Regge 理论


 **Regge 理论**根据**么正性**和散射振幅**最大解析性**假设来计算**分波振幅之和**


 粒子 a 与粒子 b 通过交换 **Regge 轨道** α_k 中的强子发生**弹性散射**


 不变振幅表达为 $\mathcal{M}_k(s, t) = \left\{ -\frac{1 + \tau e^{-i\pi\alpha_k(t)}}{\sin[\pi\alpha_k(t)]} \right\} \beta_{a,k}(t) \beta_{b,k}(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_k(t)}$


 **花括号因子**决定振幅实部与虚部之比，以及多个振幅叠加时的相对符号

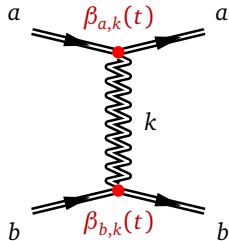
 $\tau = \pm$ 是 Regge 轨道 α_k 的**宇称**

 **函数** $\alpha_k(m^2)$ 由 $m^2 > 0$ 的强子质量谱测得，需要**外推**到 $m^2 = t < 0$ 处使用

 $\beta_{a,k}(t)$ 和 $\beta_{b,k}(t)$ 相当于 **Reggeon** k 与粒子 a 和粒子 b 的**耦合常数**

 **能标** s_0 与 Regge 轨道中的强子质量有关

 与弹性散射相关的 Regge 轨道具有**真空量子数**；考虑具有任意量子数的 Regge 轨道，就可以把上述表达式**推广**到一般过程 $ab \rightarrow cd$



Regge 弹性散射截面

💡 将所有 Regge 轨道的贡献叠加起来，得到 a 与 b 的**弹性微分截面**

$$\frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} = \frac{1}{16\pi} \left| \sum_k \left\{ -\frac{1 + \tau e^{-i\pi\alpha_k(t)}}{\sin[\pi\alpha_k(t)]} \right\} \beta_{a,k}(t) \beta_{b,k}(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_k(t)-1} \right|^2$$

🌑 在**线性近似**中，将 Regge 轨道参数化为 $\alpha_k(t) = \alpha_k(0) + \alpha'_k(0)t$

🌑 $\alpha_k(0)$ 称为 **Regge 截距**， $\alpha'_k(0)$ 是 Regge 轨道的**斜率**

🌑 当 $|t|$ 比较小时，通常只需要考虑一个 Regge 轨道 α_k

🌑 再将耦合常数近似为 $\beta_{i,k}(t) \sim e^{B_{i,k}t}$ ，可以推出

$$\frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} \simeq \frac{d\sigma_{\text{ela}}}{dt} \Big|_{t=0} e^{-B_{\text{ela}}(s)|t|}, \quad B_{\text{ela}}(s) = 2B_{a,k} + 2B_{b,k} + 2\alpha'_k(0) \ln s$$

✨ 可见，弹性截面的**斜率参数** B_{ela} 与 Regge 轨道的斜率 $\alpha'_k(0)$ 直接相关，即与所交换强子的**自旋—质量关系**直接相关，而且 B_{ela} 的增长正比于 $\ln s$

🌙 这样的预言与 $\sqrt{s} \lesssim 40 \text{ GeV}$ 的实验数据**相符**

Pomeron



在**高能**处，**总截面**的能量依赖性基本上由**最大的 Regge 截距 $\alpha_l(0)$** 决定

$$\sigma_{\text{tot}} \simeq \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \sum_k \text{Im } \mathcal{M}_k(s, t) \propto \beta_{a,l}(0) \beta_{b,l}(0) s^{\alpha_l(0)-1}$$



所有已知的 Regge 截距都**小于 1**



意味着总截面应该随质心能升高而**降低**



1960 年代以来实验发现，质心能升高到一定程度之后，总截面变得**平坦**，而后**上升**



据此，Pomeranchuk 假设存在一条截距 $\alpha_p(0) \simeq 1$ 的 Regge 轨道 α_p



α_p 准粒子称为 **Pomeron**，具有真空量子数，以相同方式与所有强子耦合

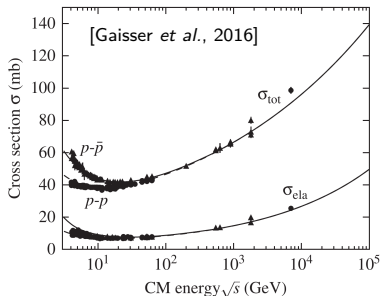


胶球被认为有可能是 Pomeron 轨道束缚态，但其存在未被实验确切证实



根据高能截面测量数据计算出来的 Pomeron 轨道为

$$\alpha_p(t) \simeq \alpha_p(0) + \alpha'_p(0) t \simeq 1.08 + 0.25 \text{ GeV}^{-2} t$$



Regge 因子化和截面参数化

在 Regge 理论中, Reggeon 的耦合常数 $\beta_{i,k}(t)$ 是普适的

不同强子的散射截面之间存在一定的因子化关系

例如, 强子 a, b, c, d 彼此散射的总截面 (或弹性截面) 满足 $\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ac}} = \frac{\sigma_{db}}{\sigma_{dc}}$

在相同质心能处, $\frac{\sigma_{\Lambda N}}{\sigma_{NN}} \simeq \frac{\sigma_{\pi N}}{\sigma_{\pi N}}, \quad \sigma_{\pi N}^2 \simeq \sigma_{\pi\pi} \sigma_{NN}, \quad N = p, n$

根据 Regge 理论框架, 中能段至高能段的强子散射总截面可以参数化为

$$\sigma_{\text{tot}} = Xs^{\epsilon} + Ys^{-\eta}, \quad \epsilon = 0.0808, \quad \eta = 0.4525$$


普适的指数 ϵ 源于 Pomeron, η 源于 Reggeon; X 和 Y 依赖于入射强子

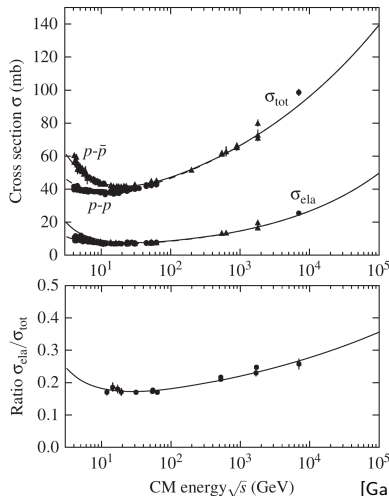
据此推出弹性截面与总截面的关系为 $\sigma_{\text{ela}} \simeq (1 + \rho^2) \frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{16\pi B_{\text{ela}}}$

ρ 是 $t \rightarrow 0$ 时弹性振幅的实部与虚部之比

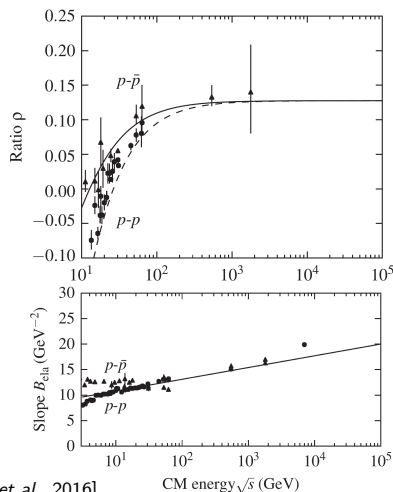
设碰撞参数振幅满足高斯分布, 有 $\text{Im} \tilde{a}(b=0, s) = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{8\pi B_{\text{ela}}} = \frac{2}{1 + \rho^2} \frac{\sigma_{\text{ela}}}{\sigma_{\text{tot}}}$

拟合 pp 和 $p\bar{p}$ 散射截面

 按上述参数化拟合 pp 和 $p\bar{p}$ 截面测量数据, 在 $\sqrt{s} \simeq 7 \text{ TeV}$ 处, $\rho \simeq 0.13$, $\sigma_{\text{ela}}/\sigma_{\text{tot}} \simeq 0.25$, 故 $\text{Im} \tilde{a}(0, s) \simeq 0.49$, 基本上达到黑盘极限 $\tilde{a}(0, s) = i/2$



[Gaisser *et al.*, 2016]



外推至更高能量

🟡 上述截面参数化**不能够**外推到很高的能量

🖋️ 对于满足高斯分布的碰撞参数振幅，**么正性限制**给出

$$\text{Im } \tilde{a}(b=0, s) = \frac{\sigma_{\text{tot}}(s)}{8\pi B_{\text{ela}}(s)} = \frac{Xs^\epsilon + Ys^{-\eta}}{8\pi[B_0 + 2\alpha'(0)\ln s]} \leq 1$$

❗ 随着质心能不断升高，这个不等式最终遭到**破坏**

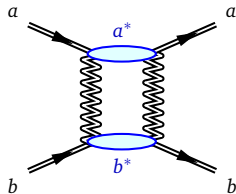
👉 这表明振幅计算不完善，意味着**交换多个 Pomeron** 的过程变得重要

🟡 严格的散射理论计算为总截面给出 **Froissart-Martin 上限**

$$\sigma_{\text{tot}} \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \left(\frac{s}{s_0} \right), \quad \text{其中能标 } s_0 \text{ 估计为 } s_0 = \frac{\sqrt{2} m_\pi^2}{17\pi^{3/2}}$$

😎 实验测得的 pp 和 $p\bar{p}$ 散射截面在 高能段 似乎依照 $\ln^2 s$ **规律** 上升，这有可能是散射截面在 高能端 接近 Froissart-Martin 上限的标志

😬 然而，由 s_0 估计值得到的 Froissart-Martin 上限在数值上 **远大于** 实验值



粒子产生：共振区域

💣 从粒子产生阈到 $\sqrt{s} \sim 1-2 \text{ GeV}$ ，强子散射过程由**强子共振态**的形成和衰变主导

✎ 设入射强子**自旋**为 S_1 和 S_2 ，**共振态** R 的**自旋**为 J ，那么，自旋平均的**Breit-Wigner 共振截面**为

$$\sigma_{\text{BW}}(\sqrt{s}) = \frac{2J+1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \frac{\pi}{k^2} \frac{B_{\text{in}} B_{\text{out}} \Gamma_{\text{tot}}^2}{(\sqrt{s} - m_R)^2 + \Gamma_{\text{tot}}^4/4}$$

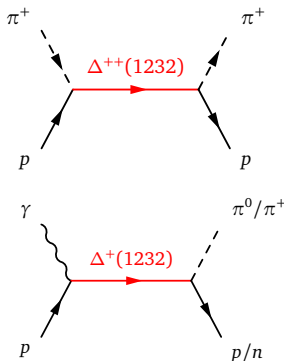
🌑 m_R 是 R 的**质量**， Γ_{tot} 是 R 的**衰变总宽度**

🌑 B_{in} 和 B_{out} 分别是 R 衰变到初态和末态的**分支比**

✎ 自旋 3/2 的重子 $\Delta^{++}(1232)$ 的夸克成分为 uuu ， $\Delta^+(1232)$ 的夸克成分为 uud ，它们属于同一个**同位旋多重态**，质量约为 1232 MeV

🌑 在 π^+p 共振散射过程中， $\Delta^{++}(1232)$ 只衰变到 π^+p

🌑 在 γp 共振散射过程中， $\Delta^+(1232)$ 以 2:1 的比例衰变到 $\pi^0 p$ 和 $\pi^+ n$



粒子产生：标度律区域

✨ 共振区域以上到 $\sqrt{s} \sim 100$ GeV，强子散射截面近似符合**标度律** (scaling)

🌑 1969 年，费曼假设**次级粒子单举产生截面**在渐近高能处满足**费曼标度律**

$$E \frac{d\sigma_{ab \rightarrow c}}{d^3p} = f_{ab \rightarrow c} \left(x_F = \frac{p_L}{p_L^{\max}}, p_T \right)$$

★ 即假设碎裂出来的领头粒子的分布在高能处趋近于一个**普适**的形式

🌑 应用费曼标度律假设，Koba、Nielsen 和 Olesen 证明次级粒子的**多重度** (multiplicity, 即数量) n 的分布 $P_n = \sigma_n / \sigma_{\text{tot}}$ 遵循 **KNO 标度律**


$$P_n(\sqrt{s}) = \frac{1}{\langle n \rangle} \Psi \left(z = \frac{n}{\langle n \rangle} \right), \quad \sum_n P_n = \int \Psi(z) dz = 1$$


🌙 实验测得的多重度分布**近似符合** KNO 标度律，体现为多重度分布的各阶


矩与能量无关，即 $\gamma_q \equiv \frac{\langle (n - \langle n \rangle)^q \rangle}{\langle n \rangle^q} = \text{常数}$


✨ 一般来说，测得多重度分布的矩比泊松分布相应的矩**大得多**


pp 散射中的次级粒子分布


 右上图显示 pp 散射中次级粒子的**平均多重度**随能量的演化


 末态质子的平均多重度**略大于 1**


 其它粒子平均多重度大致**随能量对数增长**


 **重子数守恒**使反重子 (如 \bar{p}) 产生**阈能较高**

 右下图显示次级粒子**关于 x_F** 的微分分布

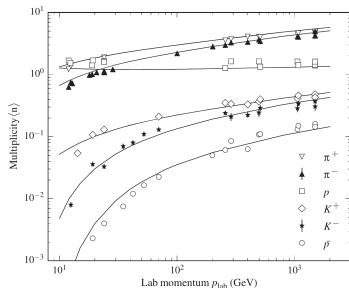
 质子作为束流残留物, 分布基本上是**平坦的**

 其它粒子的典型分布为 $dN/dx_F \sim (1-x_F)^\alpha$

 K^+ 可通过束流质子加一对真空极化 $s\bar{s}$ 产生, $p(uud) \rightarrow \Lambda(uds) + K^+(u\bar{s})$, $K^-(s\bar{u})$ 不能

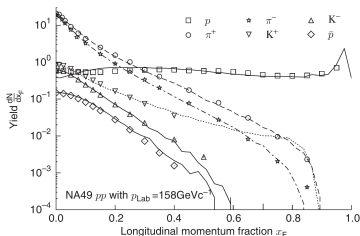
 K^+ 的分布比 K^- 的分布**更硬**

 束流质子带正电  π^+ 分布比 π^- **略硬**



[Gaisser et al., 2016]

— Sibyll 2.3rc3b



NA49 pp with $p_{\text{Lab}} = 158 \text{ GeV/c}$

粒子产生：迷你喷注区域

💥 当 $\sqrt{s} \gtrsim 100$ GeV 时，对撞机实验产生一串**方向接近**的粒子，称为**粒子喷注** (jet)；它们被认为是由硬散射过程产生的**高能部分子**的**簇射和强子化**形成的，可以用**微扰 QCD** 描述

👉 $\sqrt{s} \gtrsim 100$ GeV 时硬散射过程由可微扰计算的**迷你喷注** (minijet) 过程主导

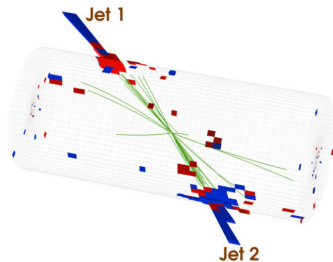
🖋️ 产生**迷你喷注对**的单举**硬散射截面**为

$$\sigma_{\text{hard}} = \int d^2p_T dx_1 dx_2 \sum_{ijkl} \frac{1}{1 + \delta_{kl}} f_{i/a}(x_1, \mu^2) f_{j/b}(x_2, \mu^2) \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})}{d^2p_T}$$

🟡 为保证**微扰论**计算成立，部分子横向动量应满足 $p_T \geq p_T^{\text{cutoff}} \sim 2 - 4$ GeV

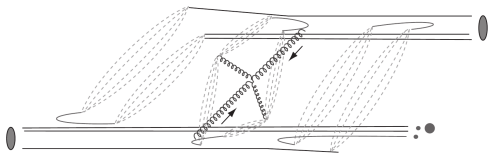
🟡 总截面和弹性截面实验数据表明，合适的 p_T 截断值应该从 $\sqrt{s} \sim 100$ GeV 处的 $p_T^{\text{cutoff}} \sim 2.5$ GeV **缓慢增长**到 $\sqrt{s} \sim 14$ TeV 处的 $p_T^{\text{cutoff}} \sim 3.5$ GeV

🟢 p_T^{cutoff} 的能量依赖性可能反映了迷你喷注模型的**不完备性**



多重散射

✎ 高能时，一个散射过程可以包含 n_h 个迷你喷注硬散射过程和 n_s 个软过程，即多重散射过程



💡 受 Regge 理论启发，软过程

截面参数化为 $\sigma_{\text{soft}} = g_a g_b \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\Delta_s}$

$(n_h, n_s) = (1, 2)$ 的多重散射过程

[Gaisser et al., 2016]

★ g_a 和 g_b 是耦合常数，低能数据预示着指数 $\Delta_s \sim \alpha_p(0) - 1$

✎ 设碰撞参数振幅形式为 $a(b, s) = \frac{i}{2} [1 - e^{-\chi(b, s)}]$ ，则相应的非弹性截面是

$$\sigma_{\text{ine}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{ela}} = 2 \int (1 - e^{-\chi}) d^2b - \int |1 - e^{-\chi}|^2 d^2b = \int (1 - e^{-2\chi}) d^2b$$

✨ $\chi(b, s)$ 称为 eikonal 函数，硬散射过程和软过程对它的贡献分别是

$$\chi_h(b, s) = \frac{1}{2} \sigma_{\text{hard}} A_{\text{hard}}(b, s), \quad \chi_s(b, s) = \frac{1}{2} \sigma_{\text{soft}} A_{\text{soft}}(b, s)$$

🌙 $A_{\text{hard}}(b, s)$ 和 $A_{\text{soft}}(b, s)$ 描述相应部分子关于碰撞参数 b 的横向密度分布

硬散射平均数量

💡 在高能强子散射中，出现硬过程和软过程的概率都遵循**泊松分布**

👉 具有 n_h 个硬过程和 n_s 个软过程的**多重散射截面**为

$$\sigma_{n_h, n_s} = \int d^2b \frac{[2\chi_h(b, s)]^{n_h}}{n_h!} \frac{[2\chi_s(b, s)]^{n_s}}{n_s!} e^{-2\chi_h(b, s) - 2\chi_s(b, s)}$$

🌙 这样的 **eikonal** 近似满足**概率守恒**

👉 由此可得 $\sigma_{\text{hard}} = \sum_{n_h + n_s \geq 1} n_h \sigma_{n_h, n_s}$,

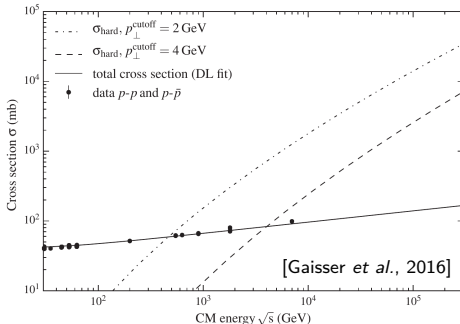
而**硬散射平均数量**为 $\langle n_h \rangle = \frac{\sigma_{\text{hard}}}{\sigma_{\text{ine}}}$

🌑 当 $\sqrt{s} \sim 200$ GeV 时，每次 pp 碰撞会出现 **1 个**迷你喷注对

🌑 在 LHC 能量处，每次碰撞预期出现**超过 10 个**这样的迷你喷注对

🌑 迷你喷注截面的迅速上升**破坏**了费曼标度律和 KNO 标度律

🌑 处理多重散射时，必须考虑各项的**干涉和相消**，否则得不出正确的总截面



原子核散射

💥 在**原子核散射**中，如果散射过程只导致原子核分解，而没有产生新的次级强子，则称为**准弹性** (quasi-elastic) 散射

✨ 典型准弹性过程是两个原子核中的两个核子发生弹性散射，而反冲作用使原子核分解

🖋 从**非弹性散射截面** $\sigma_{\text{ine}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{ela}}$ 中减去**准弹性散射截面** σ_{qela} ，得到**产生截面**

$$\sigma_{\text{prod}} = \sigma_{\text{ine}} - \sigma_{\text{qela}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{ela}} - \sigma_{\text{qela}}$$

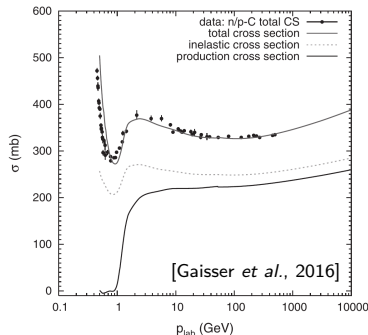
🌑 产生截面描述产生至少一个新的次级强子的所有过程

🌒 计算宇宙线传播中星际介质对原子核的吸收 ➡ 质子-核**非弹性截面**


🌕 计算大气簇射发展 ➡ 质子-空气**产生截面**

🌙 图中曲线是考虑**非弹性屏障修正**的 **Glauber 模型**预言的核子-碳核截面

★ 由于没有考虑核子的**费米运动**，粒子产生阈附近的预言与数据**不相符**




强子—原子核散射截面


 在 **Glauber 模型** 的简化版本中, 强子 h 与原子核 A 的**非弹性截面**表达为


$$\sigma_{\text{ine}}^{hA} = \int d^2b \left\{ 1 - \exp \left[-\sigma_{\text{tot}}^{hp} T(b) \right] \right\}, \quad T(b) = \int dz d^2b_N \rho_N(\mathbf{r}) A_{hp}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_N)$$


 σ_{tot}^{hp} 是**强子—核子总截面**, $A_{hp}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_N)$ 是相应的**横向密度分布**

 $\rho_N(\mathbf{r})$ 是与原子核中心距离为 $r = \sqrt{b_N^2 + z^2}$ 的**核子数密度**


 类似的, hA **产生截面**表达为 $\sigma_{\text{prod}}^{hA} = \int d^2b \left\{ 1 - \exp \left[-\sigma_{\text{ine}}^{hp} T(b) \right] \right\}$


 $\sigma_{\text{ine}}^{hp} T(b)$ **很小**对应于**透明极限**, $\sigma_{\text{prod}}^{hA} \simeq \int d^2b \sigma_{\text{ine}}^{hp} T(b) = A \sigma_{\text{ine}}^{hp}$

 $\sigma_{\text{ine}}^{hp} T(b)$ **很大**对应于**黑盘极限**, $\sigma_{\text{prod}}^{hA} \simeq \pi R_A^2 \propto A^{2/3}$, R_A 为核的有效半径

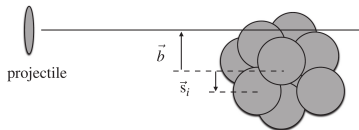
 束流动量在 20 – 50 GeV 范围内:

 $\sigma_{\text{ine}}^{pA} \simeq 45 \text{ mb } A^{0.69}$, 指数**接近**黑盘极限

 $\sigma_{\text{ine}}^{\pi A} \simeq 28 \text{ mb } A^{0.75}$, 指数**远离**黑盘极限

 原子核—原子核非弹性截面的参数化形式为

$$\sigma_{\text{ine}}^{A_1 A_2} = \pi R_0^2 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3} - \delta)^2, \quad R_0 = 1.47 \text{ fm}, \quad \delta = 1.12$$



[Gaisser et al., 2016]

原子核散射中的粒子产生

★ 在一次质子—原子核散射过程中，参加相互作用的核子数由**碰撞参数**和核子在原子核中的**几何分布**决定

💡 根据**概率守恒**，参加非弹性散射的**核子平均数**为 $\langle n_{\text{part}} \rangle = \frac{A \sigma_{\text{ine}}^{pp}}{\sigma_{\text{prod}}^{pA}}$

✨ **质量数**越大， $\langle n_{\text{part}} \rangle$ 越多，产生的次级粒子越多，但此效应对**轻核不显著**

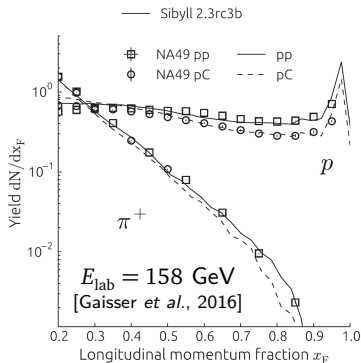
☁ 空气质量数为 $A_{\text{air}} = 14.45$

☀ 对于**质子—空气**散射， $E_{\text{lab}} \sim 500 \text{ GeV}$ 时 $\langle n_{\text{part}} \rangle \simeq 1.8$ ， $E_{\text{lab}} \sim 10^{17} \text{ eV}$ 时 $\langle n_{\text{part}} \rangle \simeq 2.5$

✎ 右图显示**次级粒子**关于 x_F 的微分分布

🌑 在 pp 和 pC 碰撞中，末态领头粒子 (质子) 的分布略有不同，这是**能量守恒**的效应

🌑 在 pp 和 $p\text{-air}$ 碰撞中， π 介子和 K 介子分布在 $0.2 \lesssim x_F \lesssim 0.7$ 之间**非常类似**



光子—强子散射

💥 粒子产生阈附近光子与强子和原子核散射在许多天体物理环境中很重要

✍ 例如，加速后的强子在 CMB 或局域光源的光子背景场中传播的过程

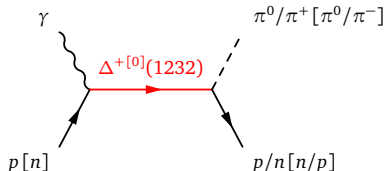
🐟 $\sqrt{s} \lesssim 2-3\text{GeV}$ 时，光子—强子散射由吸收光子产生共振态的过程主导

🌑 由于电磁相互作用不保证同位旋守恒，有许多共振态可以产生

🌑 最重要的是 $\gamma p \rightarrow \Delta^+(1232)$ [412 μb]

和 $\gamma n \rightarrow \Delta^0(1232)$ [452 μb]

🌑 $\Delta^+(1232)$ [$\Delta^0(1232)$] 以 2 : 1 的比例衰变到 $\pi^0 p$ [$\pi^0 n$] 和 $\pi^+ n$ [$\pi^- p$]



🐟 在更高能量处，光子—强子和光子—原子核散射可以用矢量主导模型描述

🌑 高能时，可以将光子态认为是裸光子态和矢量介子涨落态的叠加

🌑 光子态以 α 量级的概率涨落成参与强相互作用的矢量介子态

🌑 裸光子态的电磁散射截面太小，通常可以忽略

矢量主导模型

✨ 在**矢量主导模型**中，假设光子涨落成三种质量最低的**矢量介子** ρ 、 ω 和 ϕ

✏ 由这些矢量介子引起的**光子—强子散射振幅**表达为

$$\mathcal{M}_{\gamma h \rightarrow X}(s, t, q^2, \dots) = \sum_{V=\rho, \omega, \phi} \frac{e}{f_V} \frac{m_V^2}{m_V^2 - q^2 - im_V \Gamma_V} \mathcal{M}_{Vh \rightarrow X}(s, t, \dots)$$

● q^μ 是入射光子的四维动量， m_V 和 Γ_V 是矢量介子的质量和衰变宽度

● **耦合常数** e/f_V 由介子衰变宽度和准弹性产生过程 $\gamma p \rightarrow Vp$ 数据确定

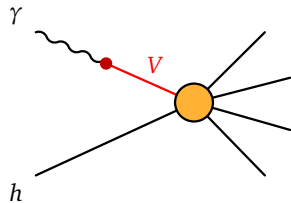
$$\frac{e^2}{f_\rho^2} \simeq 0.0036, \quad \frac{e^2}{f_\omega^2} \simeq 0.00031, \quad \frac{e^2}{f_\phi^2} \simeq 0.00055$$

● $\mathcal{M}_{Vh \rightarrow X}$ 是 Vh **强子散射振幅**

● 对 q^2 的依赖性只出现在矢量介子的**传播子**上

● 发生弹性散射的矢量介子会**继承**光子的**极化**

👉 如果入射光子是**实**的 ($q^2 = 0$)，则弹性散射的末态矢量介子具有**横向极化**



光子-强子散射截面

根据上述振幅，**光子-强子总截面**可以用**矢量介子-强子总截面**表示成

$$\sigma_{\text{tot}}^{\gamma p} = \sum_{V=\rho, \omega, \phi, \dots} \frac{e^2}{f_V^2} \left(\frac{m_V^2}{m_V^2 - q^2} \right)^2 \sigma_{\text{tot}}^{Vp} \simeq \frac{1}{300} \sigma_{\text{tot}}^{\pi p}$$

最后一步的**近似**只对**实光子** ($q^2 = 0$) 成立

当能量升高时，能参与相互作用的**虚强子态数目**会增加

向高能量外推时，如果 σ_{tot}^{Vp} 以 $\ln^2 s$ 规律上升，则 $\sigma_{\text{tot}}^{\gamma p}$ 以 $\ln^3 s$ 规律上升

产生子 SOPHIA 使用包含四个分量的模型来描述光子-强子散射截面

直接分量：光子直接产生 π 介子

共振分量：对 8 种共振过程求和

多 π 分量：矢量介子非弹性散射

衍射分量：矢量介子弹性散射

